

宇宙膨張と重力的な物質生成

金田邦雄 (新潟大学)

KK, S.M. Lee, K. Oda [[JCAP09\(2022\)018](#); [2206.10929](#)]

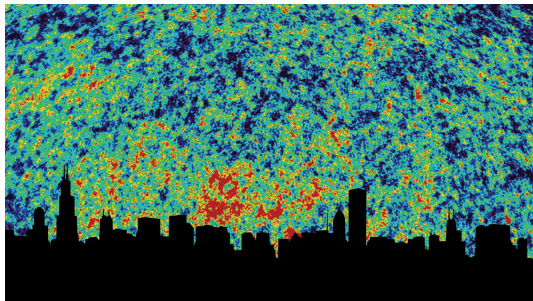
KK, K. Oda [[JCAP10\(2023\)048](#); [2304.12578](#)]

KK, W. Ke, Y. Mambrini, K. Olive, S. Verner [[Phys.Rev.D108, 115027](#); [2309.15146](#)]

M. Garcia, **KK**, W. Ke, Y. Mambrini, K. Olive, S. Verner [[JCAP 06 \(2024\) 014](#); [2311.14794](#)]

基研研究会 素粒子物理学の進展 2024 (2024年8月19日)

目次



[Symmetry Magazine]

■ イン트로ダクション

- 宇宙膨張
- Schrödinger の仕事
- インフレーション

■ 摂動的な粒子生成

- インフラトンダイナミクス
- 曲がった時空上の QFT 入門
- Boltzmann の方法と残された課題

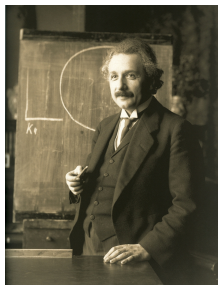
■ 非摂動的な粒子生成

- 時空の構造変化による粒子生成
- いくつかの簡単な例
- 自己相互作用がある場合

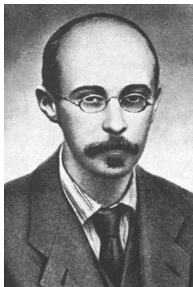
■ イン트로ダクション

現代的宇宙研究のはじまり (1917-)

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R}_{\text{時空構造}} = \underbrace{8\pi GT_{\mu\nu}}_{\text{物質}}$$



[Einstein (Wikipedia)]



[Friedmann (Wikipedia)]

■ 一様等方を仮定 (宇宙原理)

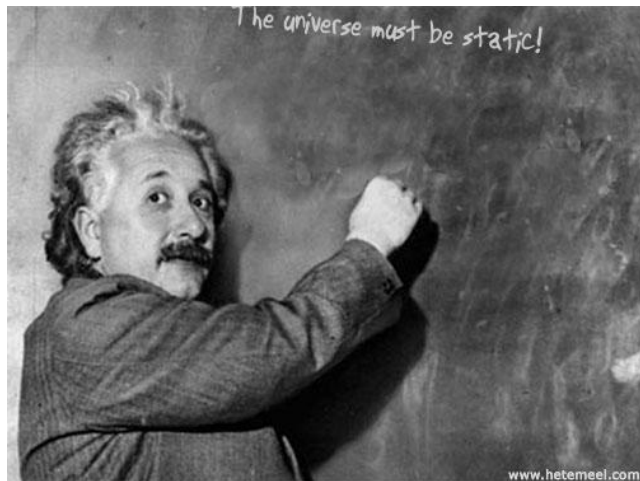
- $ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\vec{x}^2$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{\text{matter}}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_{\text{matter}} + 3p_{\text{matter}})$$

- 動的宇宙が解として存在

宇宙定数の導入



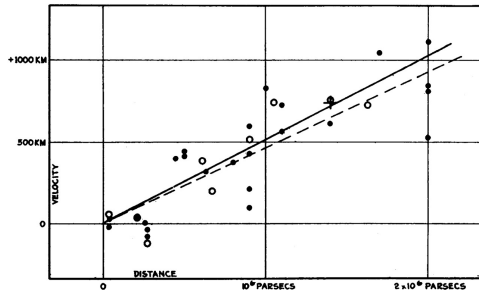
- $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \Rightarrow \Lambda = 4\pi G\rho_{\text{matter}}$ なら静的宇宙 ($\dot{a} = \ddot{a} = 0$)

宇宙膨張の発見

- 宇宙膨張の発見 ⇒ 静的宇宙観に終止符



[Wikipedia]



[Hubble '29]

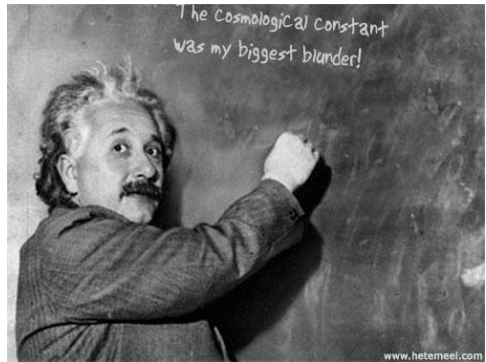
- $v = Hd$ ($\dot{a} = Ha$)

- $H \simeq 530$ km/sec/Mpc

- G. Lemaitre (1927) $H \simeq 625$ km/sec/Mpc (paper in French)



Einstein and Hubble at Mt. Wilson [Caltech archives]



www.hetemeel.com

宇宙膨張による粒子生成



THE PROPER VIBRATIONS
OF THE EXPANDING UNIVERSE

by ERWIN SCHRÖDINGER

[Schrödinger, '39]

■ Schrödinger による最初の計算

- 静的宇宙以外では一般に粒子の対生成が起こる
- FLRW metric & Klein-Gordon 方程式:

$$g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \psi = 0$$

- 解ける例: $a(t) = \alpha + \beta t \Rightarrow \psi(t) \sim \frac{1}{a(t)} e^{\pm ik \ln a(t)}$
- 時間変化により正振動数解と負振動数解が入れ替わる
- 光子が back-to-back に対生成されると解釈

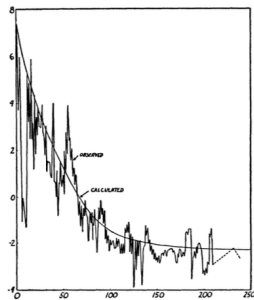
■ 注意が必要なくつかの問題も

- 初期条件が曖昧 (implicit に大きな角運動量を仮定)
- 光子は conformal symmetry により生成されないはず

■ この課題に取り組む時期が早すぎた (インフレーションを待つ必要)

元素合成

- 1940年代に元素の起源が関心を集める
- 素粒子論（ミクロ）と宇宙論（マクロ）が協力し、元素の起源解明を試みる

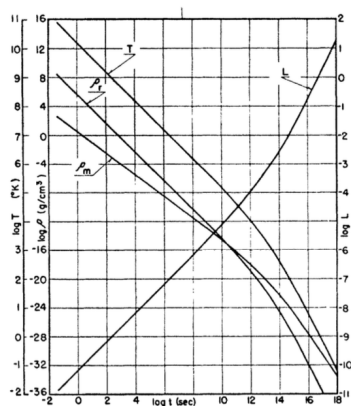


[Alpher, Bethe, Gamow '48]

- 原子の反応率と宇宙膨張による温度低下 \Rightarrow Boltzmann 方程式
- 初期条件は中性子優勢宇宙（中性子の free lunch!）
- のちに林忠四郎が誤り（高温宇宙は粒子のスープ & neutrino decoupling）を指摘

[Hayashi '50]

副産物の宇宙背景マイクロ波



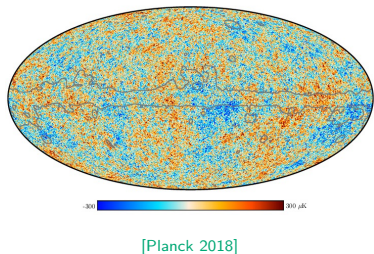
[Alpher, Herman, '50]

- Big Bang Nucleosynthesis (BBN) は大成功
- 成功は軽元素残存量の説明にとどまらない
- $\rho_m^{\text{today}} \sim 10^{-30} \text{ g/cm}^3$ を BBN で説明するためには
 - $T_{\text{BBN}} \sim 100 \text{ keV}$
 - $\rho_m^{\text{BBN}} \sim 10^{-6} \text{ g/cm}^3$
- $\rho_m/n_\gamma = \text{const.}$ から T_{today} が計算可能

$$T_{\text{today}} \sim (\rho_m^{\text{today}} / \rho_m^{\text{BBN}})^{1/3} T_{\text{BBN}} \sim 5 \text{ K}$$

- 50年代当時の技術で5 KレベルのCMBの検出は困難だったらしい

地平線問題



- 全天で一様に $T_{\text{today}} \simeq 2.7255 \text{ K}$ が明らかに
- しかし、一様なのが問題に...

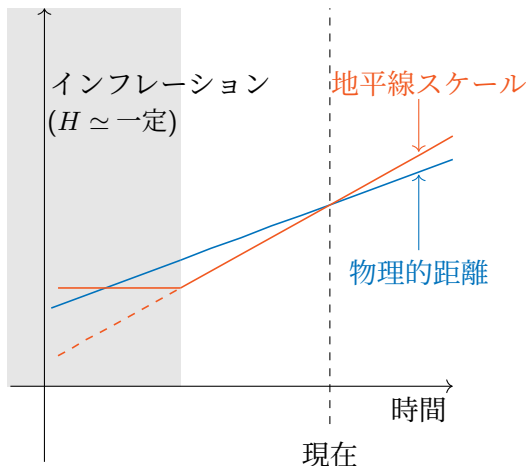
$$\begin{cases} t_0 \sim 1.4 \times 10^{10} \text{ yr} \leftrightarrow d_H(t_0) = c/H(t_0) \sim 10^{26} \text{ m} \\ t_{\text{CMB}} \sim 4 \times 10^5 \text{ yr} \leftrightarrow d_H(t_{\text{CMB}}) \sim 10^{21} \text{ m} \end{cases}$$

- 距離 $d(t_0) = d_H(t_0)$ だけ離れた2点

$$d(t_{\text{CMB}}) \sim d(t_0)/z_{\text{CMB}} \sim 10^{23} \text{ m} \gg d_H(t_{\text{CMB}})$$

- これらの2点は t_{CMB} で因果関係を持ってない
- 地平線問題

解決策としてのインフレーション

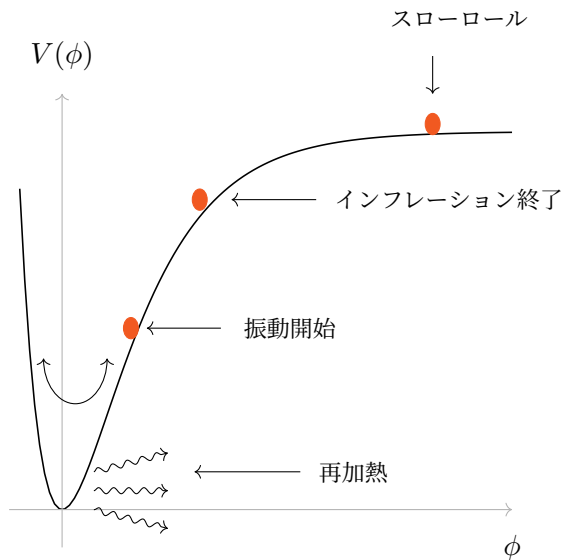


- 地平線 $\propto 1/H \propto a^{3/2}$ or a^2
- 物理的距離 $\propto a$
- もし H が定数なら?
- 過去で d_H が一定

$$\Rightarrow d_H > d \quad (t \ll t_{\text{CMB}})$$

- 過去に d が地平線の内側に
- 地平線問題の解決!

インフレーション模型



■ どう「 $H \simeq \text{一定}$ 」を実現？

■ Freedman 方程式

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{\text{tot}}$$

- 時間変化しない ρ_{tot}
- 真空エネルギーが有力候補

■ シナリオ

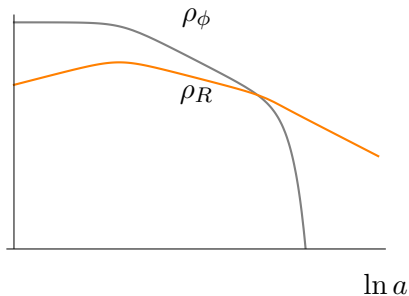
1. インフラトン場の P.E. によるインフレーション期
2. インフレーション終了 (P.E. \sim K.E.)
3. 真空エネルギーから輻射エネルギーへ遷移 (再加熱)

インフレーション模型の例

- T-model [Kallosh, Linde, '13]:

$$V(\phi) = 6\lambda M_P^4 \tanh^2\left(\frac{\phi}{\sqrt{6}M_P}\right) \simeq \begin{cases} 6\lambda M_P^4 & (\phi \gg M_P) \\ \frac{1}{2}(2\lambda M_P)\phi^2 & (\phi \ll M_P) \end{cases}$$

- インフラトンと標準模型粒子の相互作用: $\mathcal{L} \supset y\phi\bar{f}f \Rightarrow \Gamma_\phi = \frac{y^2}{8\pi}m_\phi$
- インフラトン崩壊により作られた粒子が熱浴を形成



- Boltzmann Eqs.

$$\begin{cases} \dot{\rho}_\phi + 3H\rho_\phi = -\Gamma_\phi\rho_\phi \\ \dot{\rho}_R + 4H\rho_R = +\Gamma_\phi\rho_\phi \end{cases}$$

- 再加熱温度:

$$\begin{aligned} \rho_\phi(a_{\text{RH}}) = \rho_R(a_{\text{RH}}) &\equiv \frac{\pi^2 g_*}{30} T_{\text{RH}}^4 \\ \Rightarrow T_{\text{RH}} &\simeq 10^{14} \text{ GeV} \times y \left(\frac{m_\phi}{10^{13} \text{ GeV}} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

振動するコヒーレント状態の崩壊

- インフレーション終了後: $S_{\text{inf}} \simeq \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m_\phi^2 \phi^2 \right]$
- インフラトン = コヒーレント状態 \Rightarrow 空間的に一様 ($\phi = \phi(t)$)

■ EoM: $\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m_\phi^2 \phi = 0$

- $\phi(t) = \phi_0(t) \cdot \mathcal{P}(t) \quad \begin{cases} \phi_0(t) = \phi_e / m_\phi t = \phi_e / a^{3/2} \\ \mathcal{P}(t) = \sin(m_\phi t) \end{cases}$

- $\rho_\phi = \langle T_\phi^{00} \rangle_{\text{period}} = V(\phi_0) = \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi_0^2$

- Fourier 展開: $\mathcal{P}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_n e^{-in\omega t}$
($\omega = m_\phi, \mathcal{P}_{n=\pm 1} = i/2, \mathcal{P}_{n \neq \pm 1} = 0$)

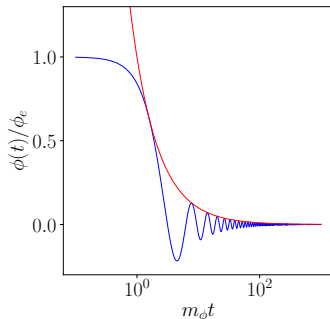
■ 崩壊チャンネル: $\mathcal{L}_I = y\phi\bar{f}f$

- モードごとに: $\mathcal{M}_n = y\phi_0(t)\mathcal{P}_n \bar{u}(p_A)v(p_B)$

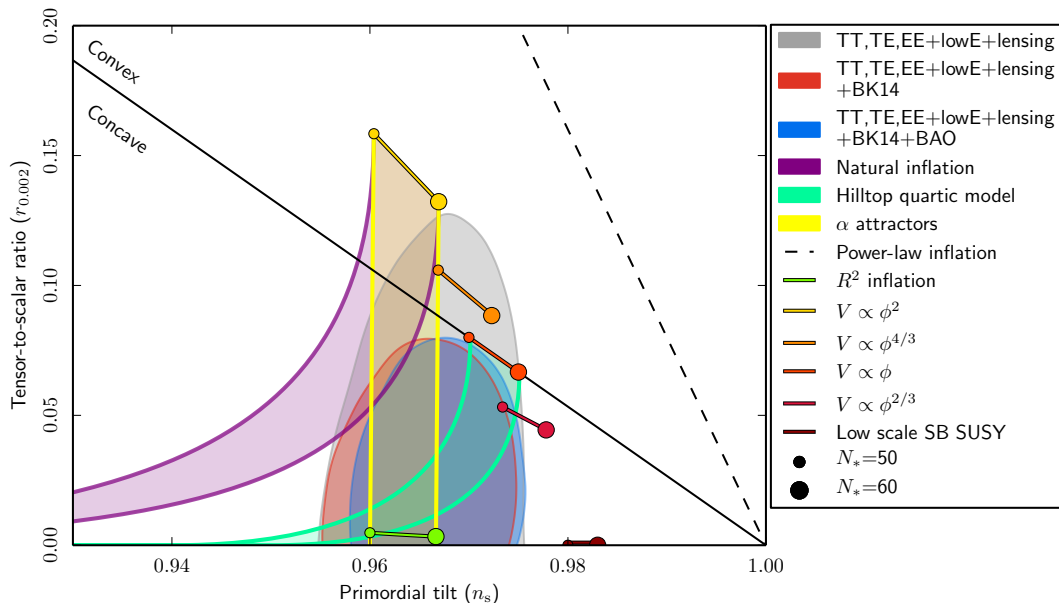
- Energy transfer rate Γ_ϕ :

$$\Gamma_\phi = \frac{1}{8\pi\rho_\phi} \sum_{n=1}^{\infty} |\mathcal{M}_n|^2 \underbrace{E_n}_{(E_n=n\omega)} = \frac{y^2}{8\pi} m_\phi$$

- Γ_ϕ は実は静止粒子の崩壊幅と一致 (ϕ は condensate なので $\vec{p} = 0$)



現実的な模型と観測データ



[Planck 2018 results]

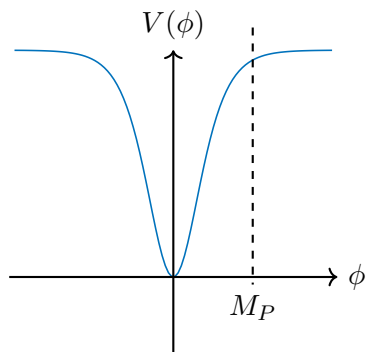
■ 摂動的な粒子生成

セットアップ

GR + インフラトン (ϕ) + 実スカラー場 (χ):

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x [\mathcal{L}_{\text{EH}} + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_\chi], \quad \begin{cases} \mathcal{L}_{\text{EH}} &= -\frac{M_P^2}{2} R \\ \mathcal{L}_\phi &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \\ \mathcal{L}_\chi &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi - \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2 \end{cases}$$

インフラトンセクター (例):



- T-model: $V(\phi) = 6\lambda M_P^4 \tanh^2\left(\frac{\phi}{\sqrt{6}M_P}\right)$
- CMB データ: $A_S \simeq 2.1 \times 10^{-9}$ ($k = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$)

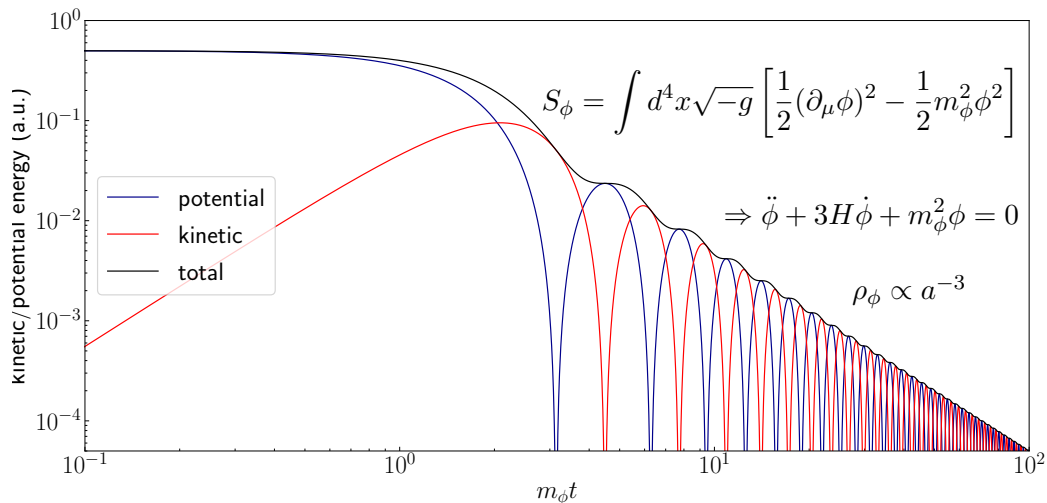
$$\lambda \simeq \frac{18\pi^2 A_S}{6N^2} \simeq 2.1 \times 10^{-11} \quad (N = 55)$$

- インフラトン振動期 ($\phi \ll M_P$):

$$V(\phi) \simeq \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2, \quad m_\phi^2 = 2\lambda M_P^2 \simeq (10^{13} \text{ GeV})^2$$

インフラトン・ダイナミクス

インフラトン = コヒーレント状態 \Rightarrow 空間的に一様に分布



運動エネルギー・ポテンシャルエネルギーの激しい振動が重力的粒子生成では本質

曲がった時空上の QFT (in a nutshell)

- いまやスタンダードな計算手法 (?)
- 便利のため $ad\eta = dt$ と $\tilde{\chi} \equiv a\chi$ を使う:

$$S_\chi = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_\chi = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\tilde{\chi}')^2 - \frac{1}{2} \tilde{\chi} \omega^2 \tilde{\chi} \right], \quad \begin{cases} \omega^2 \equiv \nabla^2 + a^2 m_\chi^2 + \Delta \\ \Delta \equiv \frac{1}{6} a^2 R \end{cases}$$

- 共役運動量 $\tilde{\pi} \equiv \tilde{\chi}'$ を定義すると:

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \tilde{\pi}^2 + \frac{1}{2} \tilde{\chi} \omega^2 \tilde{\chi} \right]$$

- $\omega = \omega(t) \Rightarrow H$ は**時間の関数**:

$$\tilde{\chi}^{(\text{past})} \neq \tilde{\chi}^{(\text{future})} \iff |0^{(\text{past})}\rangle \neq |0^{(\text{future})}\rangle$$

Bogoliubov 変換

- $\tilde{\chi}_k^{(1)} = \tilde{\chi}_k(t_1)$ と $\tilde{\chi}_k^{(2)} = \tilde{\chi}_k(t_2)$ はそれぞれ生成消滅演算子で展開できる:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\chi}_k^{(1)} \\ \tilde{\pi}_k^{(1)} \end{pmatrix} = a_{\vec{k}} \begin{pmatrix} u_k^{(1)} \\ v_k^{(1)} \end{pmatrix} + a_{-\vec{k}}^\dagger \begin{pmatrix} u_k^{(1)*} \\ v_k^{(1)*} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{\chi}_k^{(2)} \\ \tilde{\pi}_k^{(2)} \end{pmatrix} = b_{\vec{k}} \begin{pmatrix} u_k^{(2)} \\ v_k^{(2)} \end{pmatrix} + b_{-\vec{k}}^\dagger \begin{pmatrix} u_k^{(2)*} \\ v_k^{(2)*} \end{pmatrix}$$

- $(u_k^{(1)}, v_k^{(1)})$ と $(u_k^{(2)}, v_k^{(2)})$ はそれぞれ完全系を成す:

$$\begin{pmatrix} u_k^{(2)} \\ v_k^{(2)} \end{pmatrix} = \alpha_k \begin{pmatrix} u_k^{(1)} \\ v_k^{(1)} \end{pmatrix} + \beta_k \begin{pmatrix} u_k^{(1)*} \\ v_k^{(1)*} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b_{\vec{k}} \\ b_{-\vec{k}}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_k^* & -\beta_k^* \\ -\beta_k & \alpha_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\vec{k}} \\ a_{-\vec{k}}^\dagger \end{pmatrix}$$

- α_k と β_k は Bogoliubov 係数と呼ばれる
- 真空を $a_{\vec{k}}|0^{(1)}\rangle = 0$ で定義すると

$$n_k^{(2)} = \langle 0^{(1)} | b_{\vec{k}}^\dagger b_{\vec{k}} | 0^{(1)} \rangle = |\beta_k|^2 \neq 0$$

Bogoliubov 係数の摂動計算

■ $\tilde{\pi} = \tilde{\chi}'$ と EoM \Rightarrow
$$\begin{cases} \alpha'_k = -i\omega_k \alpha_k + \frac{\omega'_k}{2\omega_k} \beta_k \\ \beta'_k = i\omega_k \beta_k + \frac{\omega'_k}{2\omega_k} \alpha_k \end{cases} \quad \text{に従う}$$

■ $|\omega'_k/\omega_k^2| \ll 1$ の場合には $\beta_k(\eta) \simeq \int_{\eta_i}^{\eta} d\eta' \left[\frac{\omega'_k}{2\omega_k} \right] e^{-2i \int_{\eta_i}^{\eta'} d\eta'' \omega_k(\eta'')}$

■ $k \gg a\bar{H}$ (さもなければ adiabaticity が破れる) に対して、主要な寄与は

$$\beta_k \simeq \frac{1}{2} \int_{\eta} \left[\frac{3}{2} \frac{(a\bar{H})^3 (m_\phi/\bar{H})}{k^2 + a^2 m_\chi^2} \left(1 + \frac{m_\chi^2}{2m_\phi^2} \right) \underbrace{\sin(2m_\phi t)}_{\text{インフラトンの高速振動}} + \dots \right] \underbrace{e^{-2i \int_{\eta} \omega_k}}_{\chi \text{ の振動数変化}}$$

■ 定常位近似を使うと:

$$|\beta_{k \gg a\bar{H}}|^2 \simeq \frac{9\pi}{64} \left(\frac{H_e}{m_\phi} \right)^3 \left(\frac{m_\phi}{k} \right)^{9/2} \left(1 - \frac{m_\chi^2}{m_\phi^2} \right)^{5/4} \left(1 + \frac{m_\chi^2}{2m_\phi^2} \right)^2 \propto k^{-9/2}$$

複雑な計算の末に得られた結果 ... \Rightarrow 実はもっと簡単な方法がある

Bogoliubov 係数の摂動計算

■ $\tilde{\pi} = \tilde{\chi}'$ と EoM \Rightarrow
$$\begin{cases} \alpha'_k = -i\omega_k \alpha_k + \frac{\omega'_k}{2\omega_k} \beta_k \\ \beta'_k = i\omega_k \beta_k + \frac{\omega'_k}{2\omega_k} \alpha_k \end{cases} \quad \text{に従う}$$

■ $|\omega'_k/\omega_k^2| \ll 1$ の場合には $\beta_k(\eta) \simeq \int_{\eta_i}^{\eta} d\eta' \left[\frac{a^3 H m_\chi + (a^2 R)'/6}{k^2 + a^2 m_\chi^2 + a^2 R/6} \right] e^{-2i \int_{\eta_i}^{\eta'} d\eta'' \omega_k(\eta'')}$

■ $k \gg a\bar{H}$ (さもなければ adiabaticity が破れる) に対して、主要な寄与は

$$\beta_k \simeq \frac{1}{2} \int_{\eta} \left[\frac{3 (a\bar{H})^3 (m_\phi/\bar{H})}{2 k^2 + a^2 m_\chi^2} \left(1 + \frac{m_\chi^2}{2m_\phi^2} \right) \underbrace{\sin(2m_\phi t)}_{\text{インフラトンの高速振動}} + \dots \right] \underbrace{e^{-2i \int_{\eta} \omega_k}}_{\chi \text{ の振動数変化}}$$

■ 定常位近似を使うと:

$$|\beta_{k \gg a\bar{H}}|^2 \simeq \frac{9\pi}{64} \left(\frac{H_e}{m_\phi} \right)^3 \left(\frac{m_\phi}{k} \right)^{9/2} \left(1 - \frac{m_\chi^2}{m_\phi^2} \right)^{5/4} \left(1 + \frac{m_\chi^2}{2m_\phi^2} \right)^2 \propto k^{-9/2}$$

複雑な計算の末に得られた結果 ... \Rightarrow 実はもっと簡単な方法がある

Bogoliubov 係数の摂動計算

■ $\tilde{\pi} = \tilde{\chi}'$ と EoM \Rightarrow
$$\begin{cases} \alpha'_k = -i\omega_k \alpha_k + \frac{\omega'_k}{2\omega_k} \beta_k \\ \beta'_k = i\omega_k \beta_k + \frac{\omega'_k}{2\omega_k} \alpha_k \end{cases} \quad \text{に従う}$$

■ $|\omega'_k/\omega_k^2| \ll 1$ の場合には $\beta_k(\eta) \simeq \int_{\eta_i}^{\eta} d\eta' \left[\frac{a^3 H m_\chi + (a^2 R)'/6}{k^2 + a^2 m_\chi^2 + a^2 R/6} \right] e^{-2i \int_{\eta_i}^{\eta'} d\eta'' \omega_k(\eta'')}$

■ $k \gg a\bar{H}$ (さもなければ adiabaticity が破れる) に対して、主要な寄与は

$$\beta_k \simeq \frac{1}{2} \int_{\eta} \left[\frac{3 (a\bar{H})^3 (m_\phi/\bar{H})}{2 (k^2 + a^2 m_\chi^2)} \left(1 + \frac{m_\chi^2}{2m_\phi^2} \right) \underbrace{\sin(2m_\phi t)}_{\text{インフラトンの高速振動}} + \dots \right] \underbrace{e^{-2i \int_{\eta} \omega_k}}_{\chi \text{ の振動数変化}}$$

■ 定常位近似を使うと:

$$|\beta_{k \gg a\bar{H}}|^2 \simeq \frac{9\pi}{64} \left(\frac{H_e}{m_\phi} \right)^3 \left(\frac{m_\phi}{k} \right)^{9/2} \left(1 - \frac{m_\chi^2}{m_\phi^2} \right)^{5/4} \left(1 + \frac{m_\chi^2}{2m_\phi^2} \right)^2 \propto k^{-9/2}$$

複雑な計算の末に得られた結果 ... \Rightarrow 実はもっと簡単な方法がある

Bogoliubov 係数の摂動計算

■ $\tilde{\pi} = \tilde{\chi}'$ と EoM \Rightarrow
$$\begin{cases} \alpha'_k = -i\omega_k \alpha_k + \frac{\omega'_k}{2\omega_k} \beta_k \\ \beta'_k = i\omega_k \beta_k + \frac{\omega'_k}{2\omega_k} \alpha_k \end{cases} \quad \text{に従う}$$

■ $|\omega'_k/\omega_k^2| \ll 1$ の場合には $\beta_k(\eta) \simeq \int_{\eta_i}^{\eta} d\eta' \left[\frac{a^3 H m_\chi + (a^2 R)'/6}{k^2 + a^2 m_\chi^2 + a^2 R/6} \right] e^{-2i \int_{\eta_i}^{\eta'} d\eta'' \omega_k(\eta'')}$

■ $k \gg a\bar{H}$ (さもなければ adiabaticity が破れる) に対して、主要な寄与は

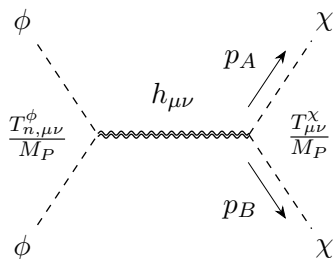
$$\beta_k \simeq \frac{1}{2} \int_{\eta} \left[\frac{3 (a\bar{H})^3 (m_\phi/\bar{H})}{2 k^2 + a^2 m_\chi^2} \left(1 + \frac{m_\chi^2}{2m_\phi^2} \right) \underbrace{\sin(2m_\phi t)}_{\text{インフラトンの高速振動}} + \dots \right] \underbrace{e^{-2i \int_{\eta} \omega_k}}_{\chi \text{ の振動数変化}}$$

■ 定常位近似を使うと:

$$|\beta_{k \gg a\bar{H}}|^2 \simeq \frac{9\pi}{64} \left(\frac{H_e}{m_\phi} \right)^3 \left(\frac{m_\phi}{k} \right)^{9/2} \left(1 - \frac{m_\chi^2}{m_\phi^2} \right)^{5/4} \left(1 + \frac{m_\chi^2}{2m_\phi^2} \right)^2 \propto k^{-9/2}$$

複雑な計算の末に得られた結果 ... \Rightarrow 実はもっと簡単な方法がある

Graviton 媒介過程と解釈



- 関係する重力相互作用 ($g_{\mu\nu} \sim \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$):

$$S \simeq \int d^4x \left[\mathcal{L}_{h,\text{kin}} + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_\chi - \frac{1}{M_P} h^{\mu\nu} (T_{\mu\nu}^\phi + T_{\mu\nu}^\chi) \right]$$

- 分布関数 $f_\chi(t, \vec{p}_A)$ の Boltzmann 方程式:

$$\frac{\partial f_\chi}{\partial t} - H |\vec{p}_A| \frac{\partial f_\chi}{\partial |\vec{p}_A|} = C[f_\chi]$$

- 衝突項 ($\chi\chi \rightarrow \phi\phi$ は無視できるほど小さい時):

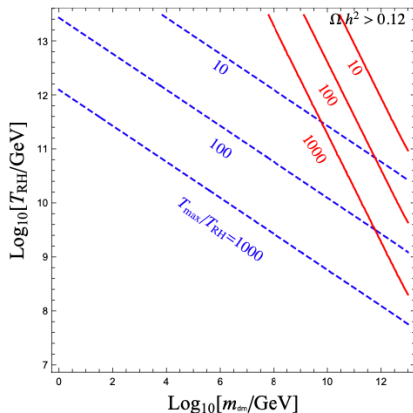
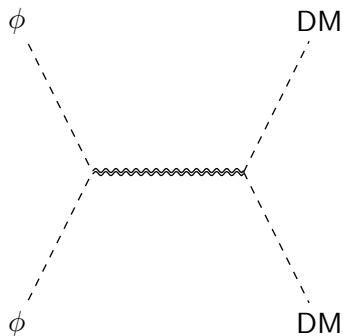
$$C[f_A] = \frac{\pi \rho_\phi^2}{16 \beta m_\phi^2 M_P^4} \left(1 + \frac{m_\chi^2}{2m_\phi^2} \right)^2 \delta(|\vec{p}_A| - \beta m_\phi), \quad \beta \equiv \sqrt{1 - \frac{m_\chi^2}{m_\phi^2}}$$

- χ の位相分布関数 (comoving momentum $k = |\vec{p}_A|a(t)$):

$$f_\chi(t, |\vec{p}_A|) = \frac{9\pi}{64} \left(\frac{H_e}{m_\phi} \right)^3 \left(\frac{m_\phi}{k} \right)^{9/2} \left(1 - \frac{m_\chi^2}{m_\phi^2} \right)^{5/4} \left(1 + \frac{m_\chi^2}{2m_\phi^2} \right)^2 \propto k^{-9/2}$$

Spin-0 の場合

- 実スカラー暗黒物質 [Mambrini, Olive '21]: $T_{\mu\nu}^{\chi} = \partial_{\mu}\chi\partial_{\nu}\chi - \eta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2}\partial^{\alpha}\chi\partial_{\alpha}\chi - \frac{1}{2}m_{\chi}^2\chi^2 \right)$



- Boltzmann 方程式: $\dot{n}_{\chi} + 3Hn_{\chi} = R_{\phi \rightarrow \chi} \sim \frac{\rho_{\phi}^2}{M_P^4} \quad (\rho_{\phi} \propto a^{-3})$
- $\Omega_{\chi} h^2 \sim \left(\frac{T_{RH}}{10^{10} \text{ GeV}} \right)^3 \left(\frac{T_{\max}/T_{RH}}{100} \right)^4 \left(\frac{m_{\chi}}{10^{10} \text{ GeV}} \right)$

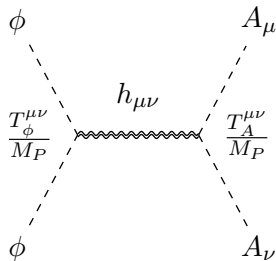
Spin-1 の場合

■ Spin-1 暗黒物質の再加熱期における生成

[Garcia, KK, Ke, Mambri, Olive, Verner, 2311.14794]

■ $\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_A^2 A^\mu A_\mu \Rightarrow T_A^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha}F_{\alpha}^{\nu} + m_A^2 A^\mu A^\nu - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_A$

■ 重力相互作用: $\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{1}{M_P} h_{\mu\nu} (T_{\text{SM}}^{\mu\nu} + T_\phi^{\mu\nu} + T_A^{\mu\nu})$



■ ヘリシティ振幅:

● $\mathcal{M}_{n,\text{LL}} = \frac{V_n}{M_P^2} \left(1 + \frac{2m_A^2}{(n\omega)^2} \right)$ (cf. minimally-coupled scalar)

● $\mathcal{M}_{n,\text{TT}} = \frac{V_n}{M_P^2} \frac{2m_A^2}{(n\omega)^2} \ll \mathcal{M}_{n,\text{LL}}$ for $m_A \ll m_\phi$

■ Boltzmann 方程式から:

$$\Omega_L h^2 \simeq 0.12 \times \left(\frac{T_{\text{RH}}}{10^{10} \text{ GeV}} \right) \left(\frac{m_A}{10^7 \text{ GeV}} \right)$$

$$\Omega_T h^2 \simeq 10^{-16} \times \left(\frac{T_{\text{RH}}}{10^{10} \text{ GeV}} \right) \left(\frac{10^{13} \text{ GeV}}{m_\phi} \right)^4 \left(\frac{m_A}{\text{EeV}} \right)^5$$

Spin-3/2 の場合

- Spin-0 から 2 の中で 3/2 だけない? \Rightarrow Rarita-Schwinger 場 (例: gravitino)

[KK, Ke, Mambrini, Olive, Verner, Phys.Rev.D108, 115027; 2309.15146]

- $\mathcal{L}_{3/2} = \bar{\psi}_\mu (i\gamma^{\mu\rho\nu} \partial_\rho + m_{3/2} \gamma^{\mu\nu}) \psi_\nu$
- $T_{3/2}^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \left[-\frac{1}{2} \bar{\psi}_\rho \gamma^{(\mu} \overleftrightarrow{\partial}^{\nu)} \psi^\rho + \bar{\psi}^{(\nu} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\rho \psi^\rho + \bar{\psi}^\rho \gamma^{(\mu} \overleftrightarrow{\partial}_\rho \psi^{\nu)} \right]$

- ヘリシティ振幅:

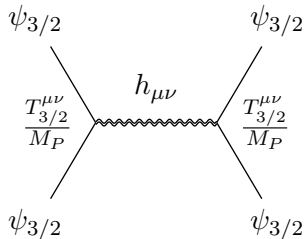
- $\mathcal{M}_{n,LL} = \frac{V_n}{M_P^2} \frac{n\omega}{m_{3/2}} \left(\frac{2}{3} - \frac{m_{3/2}^2}{2(n\omega)^2} \right) \sqrt{1 - \frac{m_{3/2}^2}{(n\omega)^2}} \quad (m_{3/2} \rightarrow 0 \text{ で発散?})$
- $\mathcal{M}_{n,TT} = \frac{V_n}{M_P^2} \frac{m_{3/2}}{2n\omega} \sqrt{1 - \frac{m_{3/2}^2}{(n\omega)^2}} \ll \mathcal{M}_{n,LL} \text{ for } m_{3/2} \ll m_\phi$

- 暗黒物質残存量:

- $\Omega_L h^2 \simeq 10^9 \left(\frac{T_{RH}}{10^{10} \text{ GeV}} \right) \left(\frac{m_\phi}{10^{13} \text{ GeV}} \right)^2 \left(\frac{\text{EeV}}{m_{3/2}} \right) \Rightarrow m_{3/2} \gtrsim 10 \text{ PeV} \quad (T_{RH} \gtrsim 4 \text{ MeV})$
- $\Omega_T h^2 \simeq 10^{-8} \left(\frac{T_{RH}}{10^{10} \text{ GeV}} \right) \left(\frac{m_\phi}{10^{13} \text{ GeV}} \right)^2 \left(\frac{\text{EeV}}{m_{3/2}} \right)^3$

Spin-3/2 の問題点?

■ $m_{3/2} \rightarrow 0$ でユニタリティーの破れ



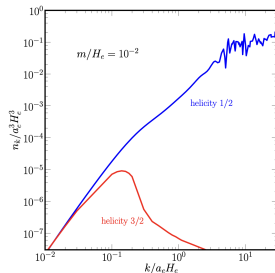
- 縦波成分の散乱を考える: $\psi_\mu \sim \frac{\partial_\mu}{m_{3/2}}$
- $E \sim m_\phi$ の時の散乱振幅:

$$\mathcal{M} \sim \frac{m_\phi^4}{m_{3/2}^2 M_P^2} \gtrsim 1 \quad \text{when} \quad m_{3/2} \lesssim 40 \text{ EeV}$$

- SUSY では, $\mathcal{M} \sim m_\phi^3/m_{3/2} M_P^2 \gtrsim 1 \Rightarrow m_{3/2} \lesssim 0.1 \text{ EeV}$

[Antoniadis, Guillen, Rondeau, '22]

■ Catastrophic production [Hasegawa et al, '17, Kolb, Long, McDonough, '21]



- DM の音速: $c_s^2 = \frac{(P_\phi - 3m_{3/2}^2 M_P^2)^2}{(\rho_\phi + 3m_{3/2}^2 M_P^2)^2}$
- $c_s = 0$ のときに非摂動的な暗黒物質生成
- $f_{3/2}(k) \sim \text{const.} \Rightarrow n_{\text{DM}} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} f_{3/2}(k) \propto \Lambda^3$
- 発散? 背景時空への backreaction?

■ 非摂動的な粒子生成

時空の構造変化による粒子生成

- インフレーション期 (dS) から再加熱期 ($\bar{\eta}_r \equiv \eta_r - \frac{2/(1+3w_r)}{a_r H_r}$):

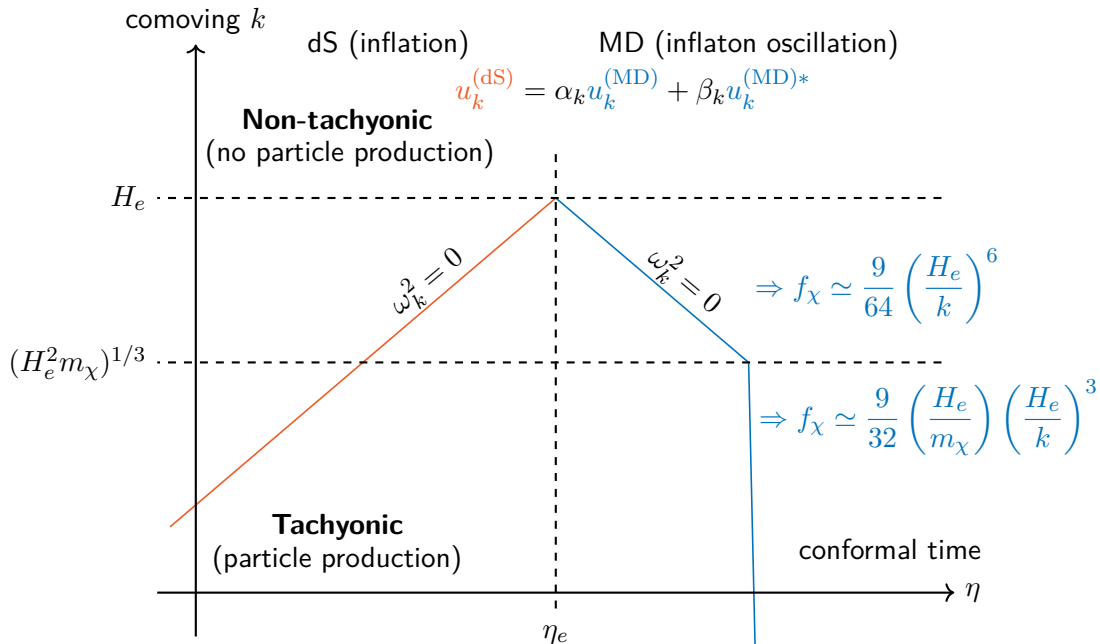
$$\omega_k^2 = \begin{cases} k^2 - \left[2 - \frac{m_\chi^2}{H_e^2} \right] \frac{1}{(\eta - \bar{\eta}_i)^2} & (w = -1) \\ k^2 + \frac{(a_e H_e)^6}{16} \frac{m_\chi^2}{H_e^2} (\eta - \bar{\eta}_e)^4 - \frac{2}{(\eta - \bar{\eta}_e)^2} & (w = 0) \end{cases}$$

- $\omega^{(\text{dS})} \neq \omega^{(\text{MD})} \Leftrightarrow |0^{(\text{dS})}\rangle \neq |0^{(\text{MD})}\rangle$: 粒子生成を示唆
- 運動方程式 $u_k'' + \omega_k^2 u_k = 0$ の解から α_k と β_k が計算可能:

$$\alpha_k = -iW[u_k^{(\text{dS})*}, u_k^{(\text{MD})}], \quad \beta_k = iW[u_k^{(\text{dS})}, u_k^{(\text{MD})}]$$

(Wronskian $W[f, g] \equiv f'g - fg'$ at $\eta = \eta_e$)

粒子生成メカニズムの概要図



最も簡単な例: ゼロ質量粒子

- $m_\chi = 0$ として u_k についての初期条件をセット:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_k(\eta \rightarrow -\infty) = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}} \quad (\text{BD vacuum}) \\ \frac{d^2 u_k}{dy^2} + \left(1 - \frac{2}{y^2}\right) u_k = 0 \quad (y \equiv k(\eta - \bar{\eta}_i)) \end{array} \right. \Rightarrow u_k(y) = \sqrt{\frac{\pi}{4k}} \sqrt{y} H_{3/2}^{(2)}(y)$$

- MD における解も同様に得られる: $u_k(x) = \sqrt{\frac{\pi}{4k}} \sqrt{x} H_{3/2}^{(2)}(x)$ ($x \equiv k(\eta - \bar{\eta}_e)$)
- $\beta_k = iW[u_k^{(\text{dS})}, u_k^{(\text{MD})}]$ から

$$\beta_k = \frac{\pi x_e}{4\sqrt{2}} \left[H_{-\frac{3}{2}}^{(2)}(y_e) H_{\frac{5}{2}}^{(2)}(x_e) - H_{\frac{3}{2}}^{(2)}(x_e) H_{-\frac{1}{2}}^{(2)}(y_e) \right] \Rightarrow |\beta_{k \ll H_e}|^2 \simeq \frac{9}{64} \left(\frac{H_e}{k} \right)^6$$

次に簡単な例: 巨大質量粒子

- $0 \gg m_\chi \lesssim H_e \Rightarrow u_k$ の dS 中の解は

$$u_k(y) = \sqrt{\frac{\pi}{4k}} \sqrt{y} H_\nu^{(2)}(y), \quad \nu \equiv -\sqrt{\frac{9}{4} - \frac{m_\chi^2}{H_e^2}}$$

- $\eta > \eta_e$ の時には $\omega_k^2 \simeq k^2 + \frac{(a_e H_e)^6}{16} \frac{m_\chi^2}{H_e^2} (\eta - \bar{\eta}_e)^4 - \frac{2}{(\eta - \bar{\eta}_e)^2}$
- ω_k は単調増加なので u_k は WKB-like な解になる:

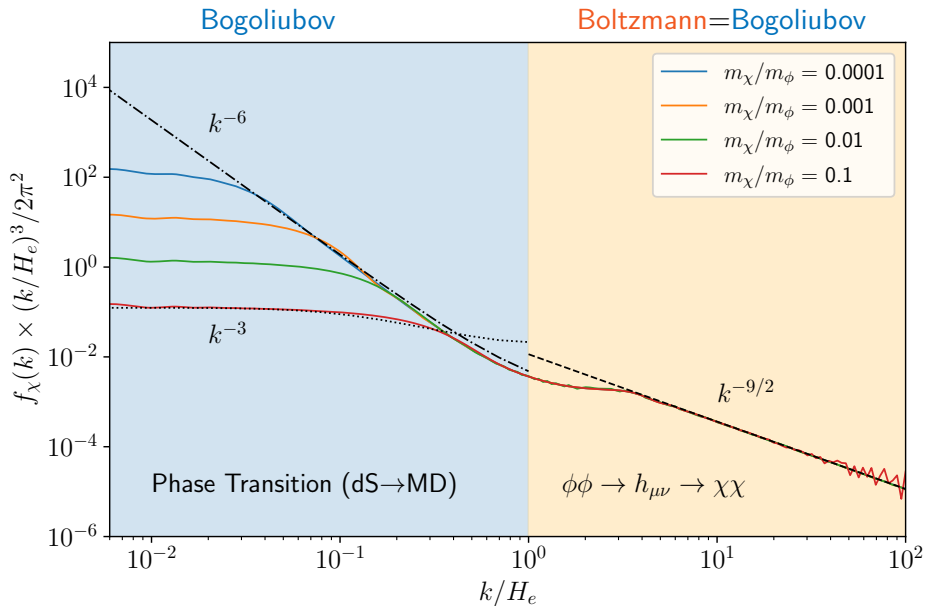
$$u_k(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\omega_k(x)}} e^{-i \int_{\eta_e}^{\eta} d\eta' \omega_k(\eta')}$$

- ゼロ質量の場合と同様に $\beta_k = iW[u_k^{(\text{dS})}, u_k^{(\text{MD})}]$ を使って

$$\beta_k \simeq \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2k}} \left[\left\{ \frac{(1+2\nu)k}{2\sqrt{y_e \omega_k}} + \frac{\sqrt{y_e} \omega'_k}{2\omega_k^{3/2}} + i\sqrt{y_e \omega_k} \right\} H_\nu^{(2)}(y_e) - k\sqrt{\frac{y_e}{\omega_k}} H_{\nu+1}^{(2)}(y_e) \right]$$

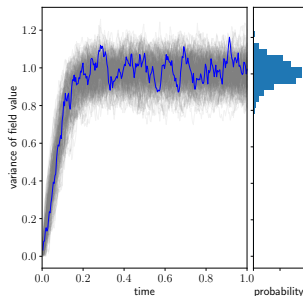
$$\Rightarrow |\beta_{k \ll H_e}|^2 \simeq \frac{9}{32} \left(\frac{H_e}{m_\chi} \right) \left(\frac{H_e}{k} \right)^3$$

摂動的領域と非摂動的領域



もし粒子が（重力以外に）相互作用していたら？

- 今までは（重力以外に）相互作用していない粒子の生成
- 例: $V(\chi) = \frac{1}{2}m_\chi^2\chi^2 + \frac{\lambda}{4}\chi^4 \Rightarrow$ インフレーション中のダイナミクスに影響
- $\chi_{\vec{k}}(t)$ の振る舞い: $\ddot{\chi}_{\vec{k}} + 3H\dot{\chi}_{\vec{k}} + \left(\frac{\vec{k}}{a}\right)^2 \chi_{\vec{k}} + \frac{\partial V}{\partial \chi_{\vec{k}}} = 0$ (integro-differential eq)
- これを直接解かなくて良い stochastic approach が便利 [Starobinsky, Yokoyama, '94]



- χ の位相空間 $\{\chi, \pi \equiv \dot{\chi}\}$ を UV と IR に分ける
- UV が IR に対する揺動として振る舞う
- IR は確率微分方程式に従う
- $\langle \chi_{\text{IR}}^2 \rangle \neq 0$

Stochastic な発展

- UV と IR は window function $W_k(t) = \theta(\epsilon a(t)H - k)$ ($\epsilon \ll 1$ and $H = \text{const.}$) で分離

$$\begin{pmatrix} \chi(t, \vec{x}) \\ \pi(t, \vec{x}) \end{pmatrix} = \underbrace{\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} W_k \begin{pmatrix} \chi_k \\ \pi_k \end{pmatrix}}_{\bar{\chi}, \bar{\pi} \text{ (IR)}} + \underbrace{\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} [1 - W_k] \begin{pmatrix} \chi_k \\ \pi_k \end{pmatrix}}_{\delta\chi, \delta\pi \text{ (UV ~ follows massless EoM)}}$$

- UV が IR へ流出: $\dot{\bar{\chi}} - \bar{\pi} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \dot{W}_k \chi_k \equiv f^{\delta\chi}$

- IR が slow-roll している場合 ($\partial_{\bar{\chi}}^2 V \ll H^2$): $\bar{\pi} \simeq -\frac{\partial_{\bar{\chi}} V(\bar{\chi})}{3H}$

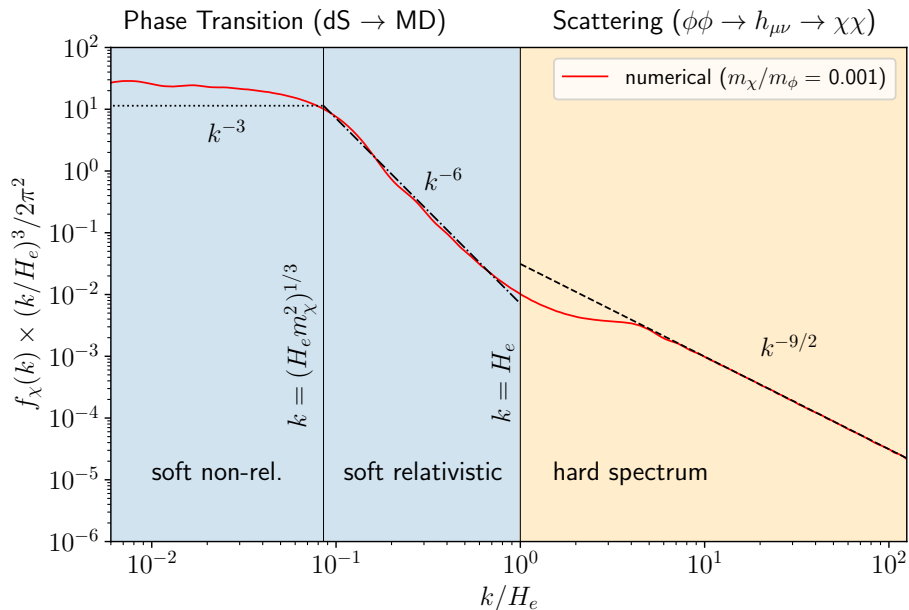
- IR は Langevin 方程式に従う: $\dot{\bar{\chi}} \simeq \underbrace{-\frac{\partial_{\bar{\chi}} V(\bar{\chi})}{3H}}_{\text{drift}} + \underbrace{f^{\delta\chi}}_{\text{noise}}$

- noise は Gaussian: $\langle f^{\delta\chi}(t_1) f^{\delta\chi}(t_2) \rangle = \frac{H_e^3}{4\pi^2} \delta(t_1 - t_2)$

- 十分長い時間がたてば drift と noise が釣り合う:

$$\langle \bar{\chi}^2 \rangle \sim \frac{H_e^2}{\sqrt{\lambda}} \Rightarrow m_{\chi, \text{eff}}^2 \simeq 3\lambda \langle \bar{\chi}^2 \rangle \iff \chi \text{ は (巨大) 質量を獲得}$$

自己相互作用がある場合は非相対論的スペクトル



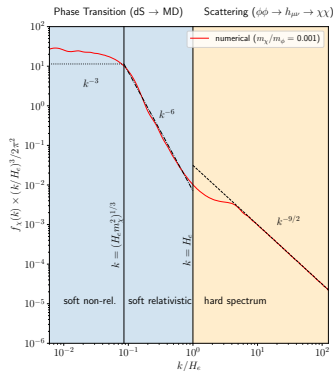
■ まとめ

■ 重力的粒子生成における2つの領域

- $k > m_\phi$: Boltzmann = Bogoliubov
- $k < m_\phi$: Bogoliubov

■ スペクトルの主な特徴

- $k > m_\phi$:
 - ▶ 不可避な寄与かつ摂動計算可能
 - ▶ スピンやインフラトン振動に依存
- $k < m_\phi$:
 - ▶ 多くの場合で無視できない寄与
 - ▶ 生成粒子のスピンや相互作用、インフラトンポテンシャル全体の形に依存



Backup: Graviton について

■ Einstein-Hilbert 作用 (+ 物質 + ゲージ固定): $S = S_{\text{EH}} + S_{\text{m}} + S_{\text{gf}}$

■ 線形化して graviton $h_{\mu\nu}$ を導入: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{2}{M_P} h_{\mu\nu}$

$$S_{\text{EH}} + S_{\text{gf}} \simeq \int d^4x \left[-\frac{1}{2} h^{\mu\nu} P_{\mu\nu\rho\sigma} \square h^{\rho\sigma} \right], \quad P_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}}{2}$$

■ Graviton プロパゲーター

$$\langle 0 | T h_{\mu\nu}(x) h_{\rho\sigma}(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{P_{\mu\nu\rho\sigma}}{k^2 - i\epsilon}$$

■ Graviton の相互作用

$$S_{\text{m}} \simeq \int d^4x \left[\mathcal{L}_{\text{m}} - \frac{1}{M_P} h_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \right], \quad T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\text{m}})}{\delta g^{\mu\nu}}$$

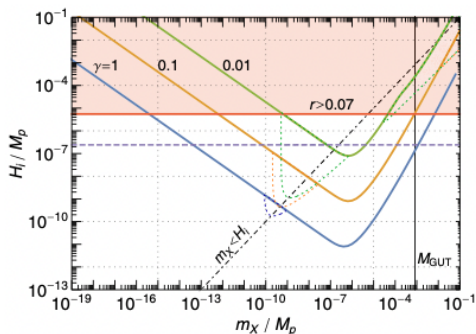
重力はあらゆる物質に対する mediator

Backup: 熱浴からの重力的暗黒物質生成

- 暗黒物質の最小結合模型 (重力のみ) :

$$\mathcal{L} = -\frac{M_P^2}{2}R + \mathcal{L}_{\text{SM}} + \mathcal{L}_{\text{DM}} \Rightarrow \frac{h_{\mu\nu}}{M_P}(T_{\text{SM}}^{\mu\nu} + T_{\text{DM}}^{\mu\nu})$$

- SM + SM \rightarrow graviton \rightarrow DM + DM [Garny, Sandora, Sloth '15]



- 質量 m_X のスカラー暗黒物質を仮定

- Boltzmann 方程式:

$$\dot{n}_X + 3Hn_X = R_{\text{SM} \rightarrow X} \sim \frac{T^8}{M_P^4}$$

$$\Rightarrow \frac{n_X}{T^3} \sim \frac{R_{\text{SM} \rightarrow X}}{T^3 H} \propto T_{\text{RH}}^3$$

- $T_{\text{RH}} \sim \gamma \sqrt{M_P H_i}$

- $\Omega_X h^2 \propto m_X T_{\text{RH}}^3 \propto m_X H_i^{3/2}$

Backup: インフラトンからの重力的暗黒物質生成

- 宇宙初期には $\phi \rightarrow \text{DM}$ の方が $\text{SM} \rightarrow \text{DM}$ より支配的? ($\rho_\phi \gg \rho_R$)

[Ema, Jinno, Mukaida, Nakayama '15,'16, Ema, Nakayama, Tang '18, Mambrini, Olive '21]

- $\phi(t)$ のエネルギー・運動量テンソル: $T_{\mu\nu}^\phi = (\rho_\phi + P_\phi)u_\mu u_\nu - \eta_{\mu\nu}P_\phi$

$$(T_{\mu\nu}^\phi) = \begin{pmatrix} \rho_\phi & & & \\ & P_\phi & & \\ & & P_\phi & \\ & & & P_\phi \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} T_{\mu\nu}^\phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{n,\mu\nu}^\phi e^{-in\omega t}, \quad (\omega = m_\phi) \\ T_{n,\mu\nu}^\phi = 2K_n u_\mu u_\nu - \eta_{\mu\nu}(K_n - V_n) \\ u_\mu = (1, 0, 0, 0)_\mu \\ (T_{n,00}^\phi = K_n + V_n, T_{n,i=j}^\phi = K_n - V_n) \end{cases}$$

- 例えば spin-0 の暗黒物質: $\phi\phi \rightarrow \chi\chi \iff T_{\mu\nu}^\phi$ の n -th が消滅し χ を生成

$$\chi = \text{実スカラー}: \quad \mathcal{M}_n = \frac{V_n}{M_P^2} \left(1 + \frac{2m_\chi^2}{(n\omega)^2} \right) \sim \frac{\rho_\phi}{M_P^2}$$

$$R_{\phi\phi \rightarrow \chi\chi} = \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^3 p_A}{(2\pi)^3 2p_A^0} \frac{d^3 p_B}{(2\pi)^3 2p_B^0} |\mathcal{M}_n|^2 (2\pi)^4 \delta(n\omega - p_A^0 - p_B^0) \delta^3(\vec{p}_A + \vec{p}_B)$$

Backup: Energy-Momentum Tensors

■ Spin-0

$$T_0^{\mu\nu} = \partial^\mu \chi \partial^\nu \chi - \eta^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \partial^\alpha \chi \partial_\alpha \chi - V(\chi) \right]$$

■ Spin-1/2

$$T_{1/2}^{\mu\nu} = \frac{i}{4} \left[\bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}^\nu \psi + \bar{\psi} \gamma^\nu \overleftrightarrow{\partial}^\mu \psi \right] - \eta^{\mu\nu} \left[\frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial}_\alpha \psi - m \bar{\psi} \psi \right]$$

■ Spin-1

$$T_1^{\mu\nu} = -F^\mu{}_\alpha F^{\nu\alpha} + \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

■ Spin-3/2

$$T_{3/2}^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \left[-\frac{1}{2} \bar{\psi}_\rho \gamma^{(\mu} \overleftrightarrow{\partial}^{\nu)} \psi^\rho + \bar{\psi}^{(\nu} \gamma^{\mu)} \overleftrightarrow{\partial}_\rho \psi^\rho + \bar{\psi}^\rho \gamma^{(\mu} \overleftrightarrow{\partial}_\rho \psi^{\nu)} \right]$$