アクシオン電磁気学における一般化対称性とその応用

横倉諒 (慶應義塾大学)

2024. 8. 21

素粒子物理学の進展 2024

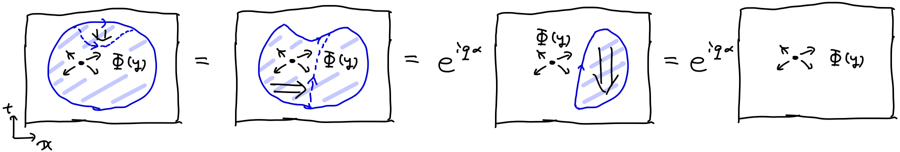
メッセージ

一般化対称性 $=$ 保存量の存在

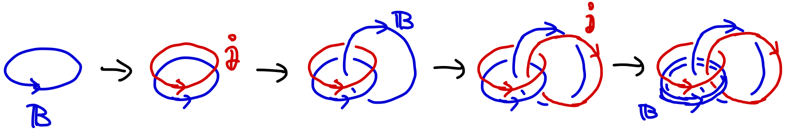
一般化対称性はダイナミクスに応用できる

概要

- 一般化対称性はウォード・高橋恒等式を元にした対称性の拡張



- アクシオン電磁気学には一般化対称性が存在し、ダイナミカルな現象を解析する役に立つ



1. カイラル不安定性で生成される磁場は、非可逆対称性によって安定
2. 電場中での不安定性で生成されるアクシオンと磁場は、非可逆1次対称性によって安定

できるだけ具体例を用いて、実用的・ボトムアップな観点から話したいと思います

もくじ

1 導入1: 通常の対称性

2 導入2: 一般化対称性

3 アクシオン電磁気学におけるカイラル不安定性と非可逆対称性

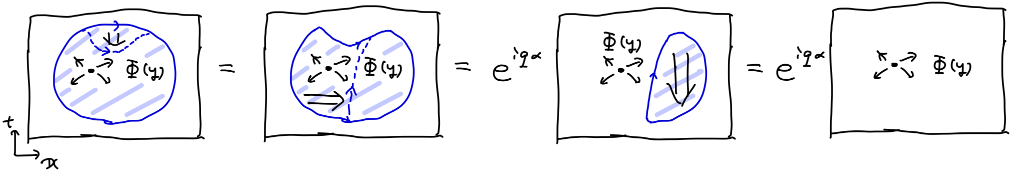
4 アクシオン電磁気学における電場中の不安定性と非可逆1次対称性

導入1: 通常の対称性

Gaiotto, Kapustin, Seiberg, Willett, JHEP 02 (2015) 172 [1412.5148] に基づくレビュー

メッセージ

対称性 ⇒ 保存量の存在 & ウォード・高橋恒等式 = トポロジカルな 3d 物体の存在



大域的対称性

このトークでは「対称性」と言ったら大域的対称性を指すことにします

教科書的な定義

群 G による場 Φ の変換 $\Phi \to g \cdot \Phi$ の元での作用の不変性

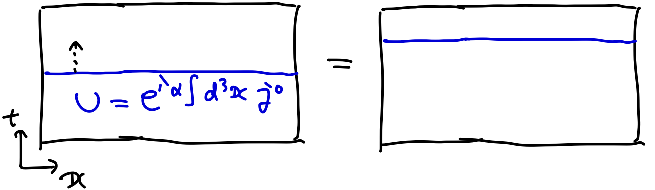
$$S[g \cdot \Phi] = S[\Phi]$$

場の量子論において重要

- 存在すべき場 (粒子) を群の表現論で予言
- 相互作用を対称性変換の不変性で制限
- 大域的連続対称性の自発的破れ $\to$ 南部・ゴールドストン (NG) の定理 $=$ 低エネルギーの自由度を説明

対称性の重要な帰結: 3次元的に広がった保存する物体 (保存量) の存在

大域的対称性がある $\to$ 3次元的に広がった保存する物体が存在する



- 連続的対称性に関してはネーターの定理。カレント保存則 $\partial_\mu j^\mu = 0$ から

  3d に広がった物体 (保存量) $Q(t) = \int j^0(t,\boldsymbol{x})d^3\boldsymbol{x}$ および $U_\alpha(t) = \exp\left(i\alpha Q(t)\right)$ (α: パラメータ) が存在し、

  $\frac{dU_\alpha(t)}{dt} = 0$ をみたす
- 離散対称性: ハミルトニアンとの可換性 $\frac{\partial U}{\partial t} \propto [U, H] = 0$ をみたす演算子 U が存在

場の量子論でのネーターの定理 = ウォード・高橋恒等式

ウォード・高橋 (WT) 恒等式

以降は簡単のため連続対称性の場合の話をします。離散対称性の場合は有限の変換に対応。

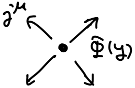
WT恒等式は対称性の帰結として実用的に重要

- 散乱振幅の関係式、カレント代数、南部・ゴールドストンの定理、量子異常、…

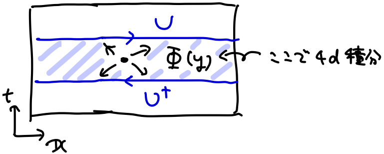
$U(1)$ 対称性の例: 場の対称性変換 $\Phi \to e^{iq\alpha}\Phi$ (q は電荷) は保存量で生成できる

- 微分形 WT 恒等式: $\langle \partial_\mu j^\mu(x)\Phi(y)\rangle = q\delta^4(x-y)\langle\Phi(y)\rangle$

  ($\langle\ldots\rangle$ は経路積分形式での真空期待値)



- 積分形 WT 恒等式: 演算子を挟む 2 つの時間一定面の内部で 4d 積分
  - 無限小: $\langle [Q(y^0), \Phi(y)]\rangle = q\langle\Phi(y)\rangle$
  - 有限変換: $\langle U_\alpha(y^0)\Phi(y)U_\alpha^\dagger(y^0)\rangle = e^{iq\alpha}\langle\Phi(y)\rangle$



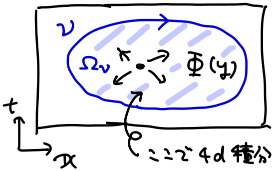
問い: 積分領域をもう少し自由にとっても良いのでは？

保存量の積分領域は時間一定面以外でもOK

微分形 WT 恒等式を、 3d 境界 $\mathcal{V}$ を持つ 4d 部分空間 $\Omega_{\mathcal{V}}$ で積分してみる

$\mathcal{V}$ 上の保存量 $Q(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} d\tilde{V}_\mu j^\mu$ (dV_μ は体積要素。例: $dV_0 = d^3\boldsymbol{x}$) を用いると WT 恒等式は

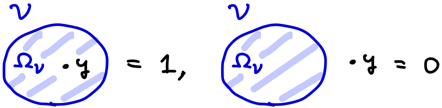
- 無限小: $\langle Q(\mathcal{V})\Phi(y)\rangle = q\,\mathrm{Link}\,(\mathcal{V}, y)\langle\Phi(y)\rangle$ (経路積分形式なので時間順序積)
- 有限: $\langle U_\alpha(\mathcal{V})\Phi(y)\rangle = e^{iq\alpha\,\mathrm{Link}\,(\mathcal{V},y)}\langle\Phi(y)\rangle, \quad U_\alpha(\mathcal{V}) = e^{i\alpha Q(\mathcal{V})}$



使ったもの

- 左辺: ガウスの定理 $\int_{\Omega_{\mathcal{V}}} d^4x \partial_\mu j^\mu = \int_{\mathcal{V}} d\tilde{V}_\mu j^\mu = Q(\mathcal{V})$
- 右辺: リンク数 $\mathrm{Link}\,(\mathcal{V}, y) = \int_{\Omega_{\mathcal{V}}} d^4x\delta^4(x-y)$

  $\mathcal{V}$ が点 y を包んでいれば 1、そうでなければ 0



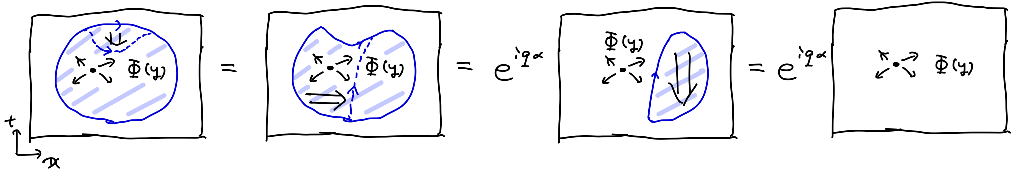
積分領域は自由に取れる $\to$ WT 恒等式は保存量のトポロジカルな解釈を導く

WT 恒等式のトポロジカルな解釈

対称性 $\Rightarrow$ WT 恒等式 $=$ 保存量 $U_\alpha(\mathcal{V})$ はトポロジカル $=$ 積分領域 $\mathcal{V}$ を色々な形に連続変形できる

WT 恒等式のおかげで

- 荷電物体 Φ がないところで保存量を連続変形できる
- 荷電物体 Φ を通り過ぎると保存量が対称性変換を生成する (リンク数が変わる)

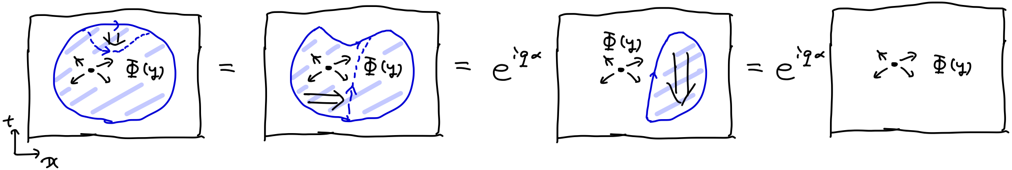


使っているのはガウスの定理やリンク数 (デルタ関数の積分) だけ

ここまでのまとめ

場の理論での対称性

対称性 $\Rightarrow$ WT恒等式 $=$ トポロジカルな広がった物体の存在



WT恒等式は対称性の帰結として実用的に重要

- 散乱振幅の関係式、カレント代数、南部・ゴールドストンの定理、量子異常、…

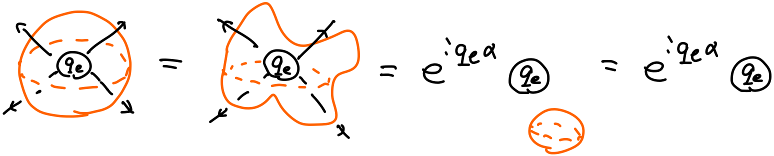
問い: 実用上大事なのは対称性そのものより保存量？

つまり、WT 的恒等式をもつトポロジカルな物体があれば、対称性の仲間に含めても実用上良いのでは？

導入2: 一般化対称性

Gaiotto, Kapustin, Seiberg, Willett, JHEP 02 (2015) 172 [1412.5148] に基づくレビュー

メッセージ



一般化対称性 = ウォード・高橋的恒等式を持つトポロジカルな物体の存在

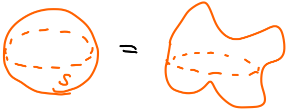
- 3次元的に広がってなくても良い → 高次対称性
- 群論 (ネーターの定理) 由来でなくても良い → 非可逆対称性

真空中の電磁気学を具体例に説明します

真空中の電磁気学

- 作用: $S = -\frac{1}{4}\int d^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$
- トポロジカルな物体: 閉曲面 $\mathcal{S}$ を貫く電気力線 $Q^e(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}$

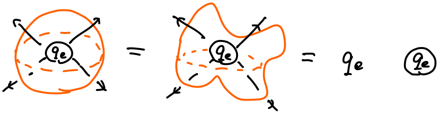
  電気的ガウスの法則 $\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0$ より連続変形できる



- 荷電物体 = 電気力線のソース = 試験電荷。空間内の点 $\boldsymbol{y}$ 上に試験電荷 q_e があると、

  ガウスの法則 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}(x) = q_e\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \to$ 微分形 WT 恒等式?

  電気力線 $Q^e(\mathcal{S}) = q_e \to$ 積分形 WT 恒等式?



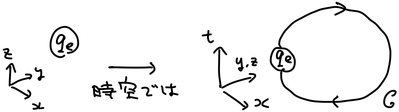
ガウスの法則は WT 恒等式っぽい

試験電荷がある元でのガウスの法則は場の量子論的にどう書ける？

試験電荷 = 電気力線のソース = ウィルソンループ

場の量子論では、試験電荷は世界線 = ウィルソンループ

- 古典論: 試験電荷の世界線の作用 $S_{\text{test}} = q_e \int_{\mathcal{C}} dx^\mu A_\mu$ ($\mathcal{C}$: 閉曲線)
- 量子論: ウィルソン・ループ $W(q_e, \mathcal{C}) := e^{iS_{\text{test}}} = e^{iq_e \int_{\mathcal{C}} dx^\mu A_\mu}$
- なぜ世界線？: 電荷の保存則より試験電荷は突然生成消滅できないから



試験電荷がある元での量子論的なガウスの法則

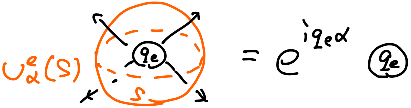
- $\langle \nabla \cdot \boldsymbol{E}(x) \rangle_{\text{試験電荷}} = \langle \nabla \cdot \boldsymbol{E}(x)\, W(q_e, \mathcal{C}) \rangle$
- ちょうどWT恒等式 $\langle \partial_\mu j^\mu(x) \Phi(y) \rangle = ...$ のアナロジーになっている！

相関関数 $\langle \nabla \cdot \boldsymbol{E}(x)\, W(q_e, \mathcal{C}) \rangle$ を計算してみよう

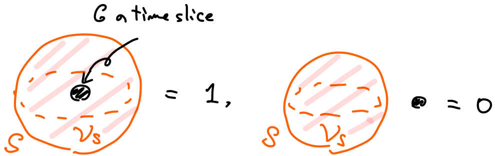
場の量子論でのガウスの法則

ガウスの法則は経路積分の中で A_0 に関する変分をとると得られる

- 微分形: $\langle \nabla \cdot \boldsymbol{E}(x)\, W(q_e, \mathcal{C}) \rangle = q_e \int_{\mathcal{C}} dy^0 \delta^4(x-y)\, \langle W(q_e, \mathcal{C}) \rangle$
- 積分形 (無限小): $\langle Q^e(\mathcal{S})\, W(q_e, \mathcal{C}) \rangle = q_e\, \mathrm{Link}\,(\mathcal{S}, \mathcal{C}) \langle W(q_e, \mathcal{C}) \rangle$
- 積分形 (有限): $\langle U^e_\alpha(\mathcal{S}) W(q_e, \mathcal{C}) \rangle = e^{i q_e \alpha\, \mathrm{Link}\,(\mathcal{S}, \mathcal{C})} \langle W(q_e, \mathcal{C}) \rangle$



使ったもの: ガウスの定理とリンク数 $\mathrm{Link}\,(\mathcal{S}, \mathcal{C}) = \int_{\mathcal{V}_\mathcal{S}} d^3\boldsymbol{x} \int_{\mathcal{C}} dy^0 \delta^4(x-y) = 1$ or 0 (電磁気学で使うガウスの法則と同じ)



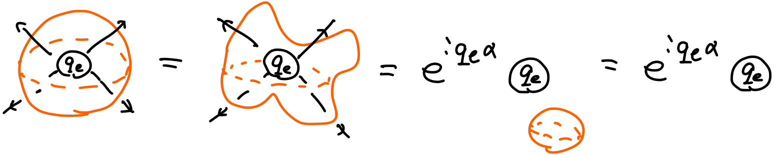
WT 恒等式 $\langle U_\alpha(\mathcal{V}) \Phi(y) \rangle = e^{iq\alpha\, \mathrm{Link}\,(\mathcal{V}, y)} \langle \Phi(y) \rangle$ と同じ構造をしている！

ガウスの法則は WT 恒等式の仲間

ガウスの法則 $=$ 保存量 $U_\alpha(\mathcal{S})$ はトポロジカル $=$ 積分領域 $\mathcal{S}$ を連続変形できる $=$ WT 恒等式の仲間

ガウスの法則があることで

- 試験電荷がないところで保存量を連続変形できる
- 試験電荷を通り過ぎると保存量が変換を生成する (リンク数が変わる)



使っているのはガウスの定理やリンク数だけ

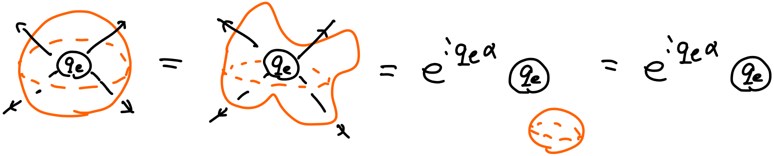
WT 恒等式的なもので連続変形できるトポロジカルな物体があれば、実用上対称性とみなそう

一般化対称性とは? [Gaiotto, Kapustin, Seiberg, Willett '14]

定義

一般化対称性 := 連続変形できるトポロジカルな物体の存在

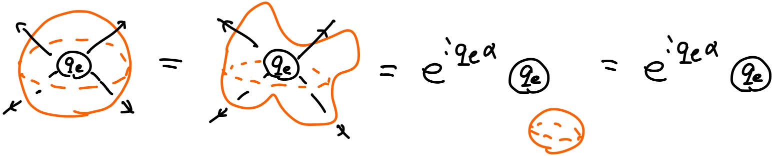
(ただしトポロジカルな物体のゲージ不変性は要求する。大域的対称性は物理的状態の間の変換に関するもの)



トポロジカルな物体があれば起源は問わない

- 3次元的物体でなくても良い → 高次対称性
- 群論を仮定しなくても良い → 非可逆対称性

一般化その1: 高次対称性 [Gaiotto, Kapustin, Seiberg, Willett '14]



一般化その1: 高次対称性

- 通常の対称性: 演算子の次元は空間次元と同じ (体積積分) だった $U_\alpha = \exp(i\alpha \int d^3\boldsymbol{x} j^0)$

  $\to$ 電気力線 $\int d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{E}$ のように連続変形できれば空間次元が低くても良い

  例: 磁束 (2d) $\int_S d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{B}$, $U(1)$ NG ボソン χ の巻きつき数 (1d) $\int_C dx^\mu \partial_\mu \chi$,...

- 通常の対称性: 変換を受ける対象は 0次元の局所演算子 $\Phi(x)$

  $\to$ 試験電荷の世界線のように時空内で広がっていても良い。

  例: 磁気単極子 (1d)、超流動渦 (2d)、...

p 次対称性 $= p$ 次元の物体に作用する対称性 (電気力線の保存則は1次対称性)

一般化その2: 非可逆対称性 [e.g., Bhardwaj & Tachikawa '17]

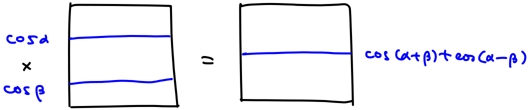
非可逆対称性の具体例はこれから出します

- 通常の対称性: 対称性の演算子は群で記述: 逆演算子がある $U^{-1}U = UU^{-1} = 1.$

  $\rightarrow$ 逆元がない集合でパラメータづけされていても良い

逆元のない集合の例:

- 自然数 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$: 乗法の逆元がない
- コサイン $\cos\alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$: 乗法の逆元がない, e.g., $\cos\frac{\pi}{2} = 0$



なぜ一般化対称性？ Ginzburg-Landau を超えた場の量子論の相分類が可能

一般化対称性の発展

1. 素粒子から物性までの既知の様々な概念を、対称性の言葉で統一 [Gaiotto, Kapustin, Seiberg, Willett '14]
   - ヤン・ミルズ理論の閉じ込め相 = 1次対称性が保たれた相 (従来はゲージ対称性の中心対称性が保たれた相)
   - トポロジカル秩序相 = 1次対称性が自発的に破れた相 (従来の対称性の相分類ではギャップ相)

     電荷1のヒッグス場のヒッグス相と電荷2のヒッグス相を1次対称性で区別できる
2. 相構造に関する新たな知見を非摂動的に解明
   - $(3+1)$ 次元ヤン・ミルズ理論における $\theta = \pi$ での CP 対称性の自発的破れ [Gaiotto, Kapustin, Komargodski, Seiberg '17]
3. 一般化対称性は特別なものではなく、場の量子論に遍在する
   - $(3+1)$ 次元イジング模型 ($\mathbb{Z}_2$ ゲージ理論) の自己双対点における非可逆対称性 [Koide, Nagoya, Yamaguchi, '21]

ここ2,3年の問い

どのような系にどのような一般化対称性が具体的に存在するか？

一般化対称性がでてくる場の理論的な具体例

できることなら

- 場の理論で割と扱う模型
- 現実的な物理への応用と関係がある $(3+1)$ 次元の模型
- 閉じ込めなど非摂動的なことが起きてない
- 非可逆対称性も高次対称性も自然と出てくる (あまり人為的でない)
- 一般化対称性と物理量の関係がわかりやすい

がいいなぁ・・・

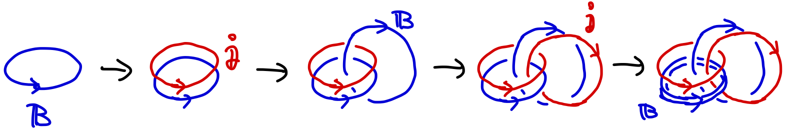
そのような例としてアクシオン電磁気学がある！

アクシオン電磁気学におけるカイラル不安定性と非可逆対称性

N. Yamamoto & RY, JHEP **07** (2023) 045 [2305.01234] に基づく

メッセージ

- アクシオン電磁気学には非可逆対称性がある
- カイラル不安定性で生成される磁場の安定性を保証する概念として自然と現れる



アクシオン電磁気学 = アクシオン ϕ + 光子 A_μ + トポロジカル結合

[Wilczek '87]

作用 (このトークでは無質量のアクシオンと光子を考えます)

$$S = -\int d^4x \left(\frac{v^2}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{16\pi^2} \phi F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \right)$$

- アクシオンは 2π シフト不変な擬スカラー場 $\phi + 2\pi \sim \phi$ (ゲージ対称性とみなす)
- 光子は $U(1)$ ゲージ場 (電荷と磁荷の量子化)

特徴

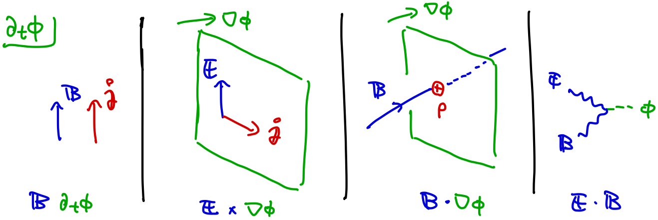
1. 素粒子・宇宙・ハドロン・物性など、現実的な理論に遍在するシンプルな模型

   QCD アクシオン、インフラトン、π^0 中間子、トポロジカル物質、…

2. 場の 3 次のトポロジカル結合 $\phi F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$: 係数は量子異常で決まる。

3 次のトポロジカル結合 $\phi F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$ は運動方程式に非自明な変更を与える

トポロジカル結合の運動方程式への寄与



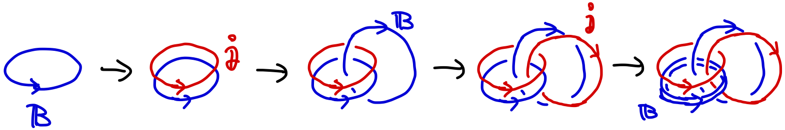
- 誘導電流: $\nabla \times \boldsymbol{B} - \partial_t \boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi^2}(\boldsymbol{B}\partial_t\phi - \boldsymbol{E}\times\nabla\phi)$

  (カイラル磁気効果 [Fukushima, et al. '08] 異常ホール効果 [Sikivie '84])

- 誘導電荷: $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = -\frac{1}{4\pi^2}\boldsymbol{B}\cdot\nabla\phi$ [Sikivie '84]
- 電磁場はアクシオンのソース: $(\partial_t^2 - \nabla^2)\phi = \frac{1}{4\pi^2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$

$\partial_t\phi$ が一様である外場中において、電磁場に不安定性が現れる

カイラル不安定性 [Carroll, et al. '89] (cf. 山本さんのトーク)



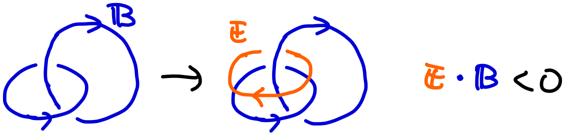
- アンペールの法則 $\nabla \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\partial_t \phi$
- 磁場と平行な誘導電流により、磁場が指数関数的に増大する
- 応用例: 中性子星や初期宇宙における磁場生成 [Joyce & Shaposhnikov '97; Anber & Sorbo '07; Akamatsu & Yamamoto '13]

  ($\partial_t \phi$: カイラル化学ポテンシャル or インフラトンの時間変化)
- 技術的には、赤外領域のタキオン的不安定性: 空間1階微分項 → 分散関係 $\omega^2 = |\boldsymbol{k}|^2 \pm |\partial_t \phi||\boldsymbol{k}|$.

  $|\boldsymbol{k}| < |\partial_t \phi|$ で ω が純虚数となり、$\boldsymbol{B} \sim e^{i\omega t} \sim e^{\sqrt{|\boldsymbol{k}\partial_t \phi| - |\boldsymbol{k}|^2}\, t}$ となる

この不安定性は病的なものではなく、磁場の増加とともに弱くなる

$\partial_t \phi$ の減少と磁気ヘリシティの増加



$\partial_t \phi$ の減少 (少なくとも線形近似で)

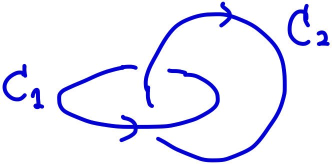
- ファラデーの電磁誘導の法則: $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial_t \boldsymbol{B}$
- アクシオンの運動方程式: $\partial_t^2 \phi = \frac{1}{4\pi^2} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} < 0$

磁気ヘリシティ $\int d^3\boldsymbol{x} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ の増加

- 運動方程式 $\partial_\mu (\partial^\mu \phi + \frac{1}{8\pi^2} A_\nu \tilde{F}^{\mu\nu}) = 0$ より、 $\int d^3\boldsymbol{x} (\partial_t \phi + \frac{1}{8\pi^2} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$ が保存
- $\partial_t \phi$ が小さくなるので $\int d^3\boldsymbol{x}\, \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ が増加

磁気ヘリシティの物理的意味は？

磁気ヘリシティ $=$ 磁束のリンク数 [Demoulin, et al., '06]



簡単のため磁束チューブを考えると、 $\int d^3\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 2\Phi_1\Phi_2\,\mathrm{Link}\,(C_1, C_2)$

- Φ_1, Φ_2 それぞれ磁束チューブ C_1, C_2 の磁束
- $\mathrm{Link}\,(C_1, C_2)$: 閉曲線 C_1 と C_2 のリンク数

導出: ベクトルポテンシャルに関するビオ・サヴァールの法則

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3\boldsymbol{x}'\,\frac{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}')\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}$ を使う

問い: 磁気ヘリシティの安定性を保証する対称性はある？

保存量 = 一般化対称性?

カイラル不安定性では保存量 $\int d^3\boldsymbol{x}(\partial_0\phi + \frac{1}{8\pi^2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$ が重要だった

Q. この保存量に対応する対称性はあるか？素朴にはアクシオンのシフト対称性だと思うが...

A. ある。しかしユニタリー演算子で表せるような従来の対称性ではない。

Q. 対称性変換 $Ue^{i\phi}U^\dagger = e^{i\alpha}e^{i\phi}$ を与えるようなユニタリー演算子

$$U = \exp\left(i\alpha\int_V d^3\boldsymbol{x}(\partial_0\phi + \frac{1}{8\pi^2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\right), \quad (\alpha\in\mathbb{R},\ V\text{: 閉じた3次元空間})$$

の何が問題なのか？

A1. 磁気ヘリシティ $\exp\left(i\alpha\int d^3\boldsymbol{x}\frac{1}{8\pi^2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right)$ がゲージ不変なのは $e^{i\alpha}=1$ のみ

A2. カイラル量子異常の帰結

近年の発展: パラメータが有理数 (e.g., $\alpha = \frac{2\pi}{q}$, $q\in\mathbb{Z}$) のとき、ユニタリー性を捨てれば磁気ヘリシティ $\exp\left(i\alpha\int d^3\boldsymbol{x}\frac{1}{8\pi^2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right)$ をゲージ不変に定義することができる!

ゲージ不変な磁気ヘリシティ [Choi, et al., '22; Córdova & Ohmori, '22]

Chern-Simons 理論を用いた磁気ヘリシティの書き換え

$$\exp\left(\frac{i}{4\pi q}\int_V d^3\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right)\to\int\mathcal{D}c\exp\left(i\int_V d^3\boldsymbol{x}\left(-\frac{q}{4\pi}\epsilon^{ijk}c_i\partial_j c_k+\frac{i}{2\pi}\epsilon^{ijk}c_i\partial_j A_k\right)\right)$$

- 実質 $\frac{1}{q}x^2\to -qy^2+2xy$ を行っているだけ
- 右辺は $U(1)$ Chern-Simons 理論の分配関数 (分数量子ホール効果で使われる)
  - c_μ: V 上の $U(1)$ ゲージ場, Dirac 量子化 $\int\partial_\mu c_\nu dS^{\mu\nu}\in 2\pi\mathbb{Z}$
  - ゲージ不変性は係数 q が整数であるため保たれる
  - 従来の磁気ヘリシティは、自明な Dirac 量子化 $\int\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0$ の元で EOM $c_{\mu\nu}=\frac{1}{q}F_{\mu\nu}$ から得られるナイーブなもの
  - 位相因子の和 (経路積分) なのでユニタリー性が失われた

この変形によって対称性の生成子を構成できる

非可逆対称性 [Choi, et al., '22; Córdova & Ohmori, '22]

ゲージ不変な保存量を具体的に構成できる:

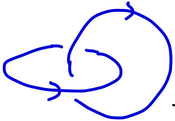
非可逆対称性の生成子

$$D = \exp\left(\frac{2\pi i}{q}\int_V d^3\boldsymbol{x}\,\partial_0\phi\right) \times \int \mathcal{D}c \exp\left(i\int_V d^3\boldsymbol{x}\left(-\frac{q}{4\pi}\epsilon^{ijk}c_i\partial_j c_k + \frac{i}{2\pi}\epsilon^{ijk}c_i\partial_j A_k\right)\right)$$

- 保存則 = アクシオンの EOM によってトポロジカル
- アクシオンの有理数パラメータによる変換 $\langle De^{i\phi}\rangle = e^{\frac{2\pi i}{q}}\langle e^{i\phi}D\rangle$ (WT 恒等式の一般化)
- 対称性は非可逆: 特に、 $D|$磁気単極子$\rangle = 0$ となることがある (磁荷や V の取り方による)

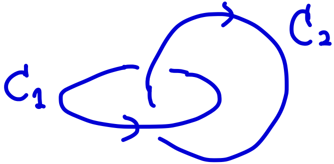
磁気ヘリシティの安定性は非可逆対称性で保証される

非可逆対称性でも磁気ヘリシティ = リンク数 [Yamamoto & RY, '23]

$D\Big[A =$  $\Big] \propto \exp\left(\frac{2\pi i}{q}\Phi_1\Phi_2\,\mathrm{Link}(C_1, C_2)\right)$

- 非可逆対称性についても磁気ヘリシティとリンク数の関係は成立する

非可逆で高次な対称性はアクシオン電磁気学にある？



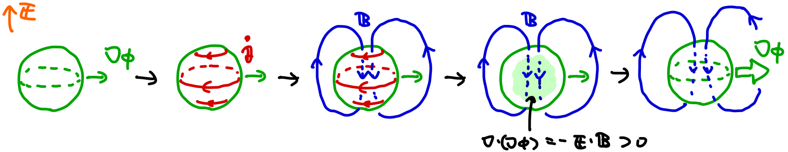
- ここまでの例は通常の対称性 (アクシオンのシフト対称性) が非可逆になったもの
- 1次対称性が非可逆になっている例もある？ (電気的ガウスの法則はアクシオン電磁気学だと？)
- 非可逆な1次対称性は磁気ヘリシティのような量を保証する？

アクシオン電磁気学における電場中の不安定性と非可逆1次対称性

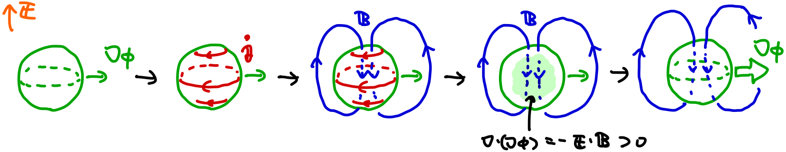
N. Yamamoto & RY, JHEP **07** (2023) 045 [2305.01234] に基づく

メッセージ

- アクシオン電磁気学には非可逆1次対称性がある
- 電場中の不安定性で生成されるアクシオンと磁場の安定性を保証する概念として自然と現れる



電場中のアクシオン電磁気学の不安定性 [Bergman, et al., '11; Ooguri & Oshikawa '11]

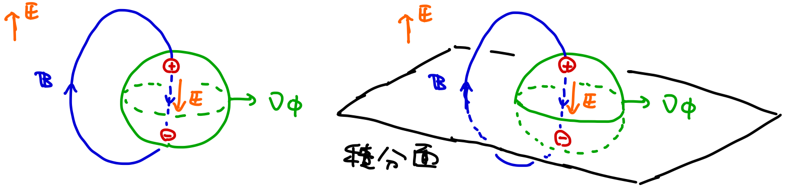


一様電場中で $\nabla\phi$ と $\boldsymbol{B}$ が増幅する不安定性が生じる ($\nabla\phi$ も磁場の一種と見なす)

- アンペールの法則 $\nabla \times \boldsymbol{B} = -\frac{1}{4\pi^2}\boldsymbol{E} \times \nabla\phi$
- アクシオンの運動方程式 $\nabla^2\phi = -\frac{1}{4\pi^2}\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B}$

$\nabla\phi$ と $\boldsymbol{B}$ の増幅 $\to$ 外場 $\boldsymbol{E}$ の減少

電場の減少と電気分極の増加



誘導電荷が電場を打ち消す

- ガウスの法則より $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = -\frac{1}{4\pi^2} \boldsymbol{B} \cdot \nabla\phi$
- 誘導電荷により外場と逆向きの電場が生成される

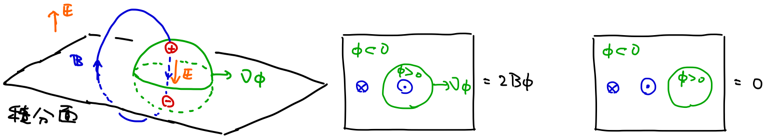
電気分極の増加

- ガウスの法則より電束 $\int_S d\boldsymbol{S} \cdot (\boldsymbol{E} + \frac{1}{4\pi^2}\phi\boldsymbol{B})$ が保存
- $\boldsymbol{E}$ が減少するので、電気分極 $\int_S d\boldsymbol{S} \cdot \frac{1}{4\pi^2}\phi\boldsymbol{B}$ が増加する

電気分極 $\int_S d\boldsymbol{S} \cdot \phi\boldsymbol{B}$ にトポロジカルな意味はあるか？ (cf. 磁気ヘリシティとリンク数の関係)

一般化磁気ヘリシティ

$\int_S d\boldsymbol{S}\cdot\phi\boldsymbol{B}$ は積分面上での $\boldsymbol{B}$ と $\nabla\phi$ のリンク数



簡単のため $\boldsymbol{B}$ が磁束チューブ、$\nabla\phi$ が無限に薄い面だとする。

- 電束の積分面上では $\boldsymbol{B}$ は向きを持った2点、$\nabla\phi$ は閉曲線
- 閉曲線の内外で ϕ の符号が変わる。
- $\boldsymbol{B}$ の 2点と $\nabla\phi$ の閉曲線がリンクしていると面積分が有限、リンクしていないと面積分が0になる

生成された $\boldsymbol{B}$ と $\nabla\phi$ はトポロジカルに安定であると理解できる

電束の保存則 = 対称性?

アクシオン電磁気学の電場中の不安定性では、保存する電束 $\int_S d\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{E}+\frac{1}{4\pi^2}\phi\boldsymbol{B})$ が重要だった

Q. この保存則に対応する1次対称性はあるか？

A. ある。しかしユニタリー演算子で表せるような従来の対称性ではない。

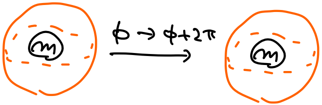
Q. 対称性変換 $\langle U^e_\beta W(q_e,\mathcal{C})\rangle = e^{iq_e\beta}\langle W(q_e,\mathcal{C})\rangle$ を与えるようなユニタリー演算子

$$U^e_\beta = \exp\left(\frac{i\beta}{4\pi^2}\int_{\mathcal{S}}\phi\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}\right) \times e^{i\beta\int_S \frac{1}{e^2}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}}$$

の何が問題なのか？

A. ユニタリ演算子は変換パラメータが自明 $e^{i\beta}=1$ な場合にしか $\phi\to\phi+2\pi$ の元でゲージ不変にならない

とくに磁気単極子があるとゲージ不変性が破れる



$$U^e_\beta \times e^{\frac{i\beta}{2\pi}\int B\cdot dS} = U^e_\beta\, e^{i\beta m}$$

わかったこと: ユニタリー演算子であることをやめれば、

有理数パラメータ, e.g., $\beta=\frac{2\pi}{q}$ $(q\in\mathbb{Z})$ に対する対称性演算子をゲージ不変に構成できる

トポロジカル場の理論を使う [Choi, Lam, Shao, '22; RY '22]

$\exp\left(\frac{i}{2\pi q}\int_{\mathcal{S}}\phi\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}\right)$ をゲージ不変に変形できる

トポロジカル場の理論を用いた変形

$$\exp\left(\frac{i}{2\pi q}\int_{\mathcal{S}}\phi\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}\right)\to\int\mathcal{D}\chi\mathcal{D}u_\mu\exp\left(-\frac{i}{2\pi}\int_{\mathcal{S}}dS^{\mu\nu}(q\chi w_{\mu\nu}-\chi F_{\mu\nu}-\phi w_{\mu\nu})\right)$$

- 2次式の変形 $\frac{1}{q}xy\to -qab+ax+by$ をしているだけ

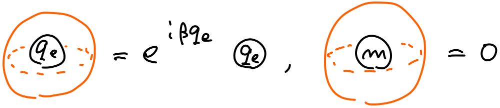
  変形のための補助場
  - χ: 2π 周期性を持つ擬スカラー
  - u_μ: $U(1)$ ゲージ場，　場の強さ $w_{\mu\nu}=\partial_\mu u_\nu-\partial_\nu u_\mu$，　ディラック量子化条件 $\int_{\mathcal{S}}w_{\mu\nu}dS^{\mu\nu}\in 2\pi\mathbb{Z}$
- 整数 q が分子にあるので、2π 周期性が保たれている
- 元々のもの: ディラック量子化条件が自明な部分でのみ成立するナイーブなもの
- 位相因子の和をとっているので、変形後はユニタリーでない

非可逆1次対称性 [Choi, Lam, Shao, '22; RY '22]

Symmetry generator

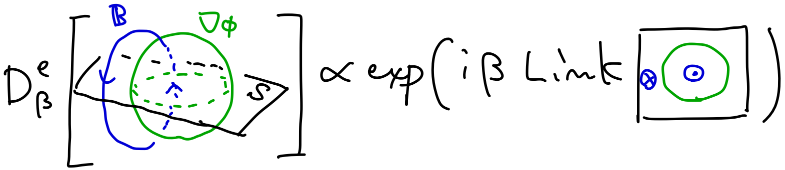
$$D^e_{\beta=\frac{2\pi}{q}} = \int \mathcal{D}\chi\mathcal{D}u \exp\left(\frac{i}{2\pi}\int_{\mathcal{S}} dS^{\mu\nu}(q\chi w_{\mu\nu} - \chi F_{\mu\nu} - \phi w_{\mu\nu})\right) \cdot e^{i\beta\int_{\mathcal{S}} \tilde{F} dS}$$

- 保存則 = ガウスの法則によってトポロジカル
- ウィルソンループの有理数パラメータによる変換 $W(q_e, \mathcal{C}) \to e^{iq_e\beta} W(q_e, \mathcal{C})$ (WT 恒等式の一般化)
- 対称性は非可逆: 特に、 $D^e_\beta|$磁気単極子$\rangle = 0$ となることがある [Choi, Lam, Shao, '22]



一般化磁気ヘリシティの安定性は非可逆1次対称性で保証される

非可逆1次対称性でも一般化磁気ヘリシティ ＝ リンク数 [Yamamoto & RY, '23]



- 非可逆1次対称性についても磁場と $\nabla\phi$ のリンク数の関係は成立する

コメント: 一般化カイラル不安定性

- カイラル不安定性と電場中の不安定性とでパラレルな議論ができた
- 理由: 場の3次のトポロジカル結合をもつ可換ゲージ理論の普遍的な性質だから

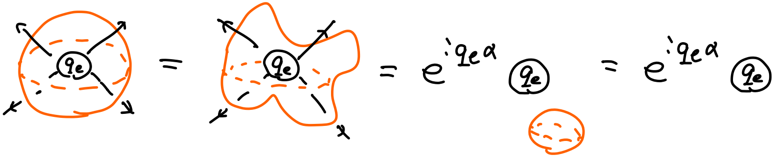
(アクシオンは0階のテンソルゲージ場とみなす)

一般化カイラル不安定性

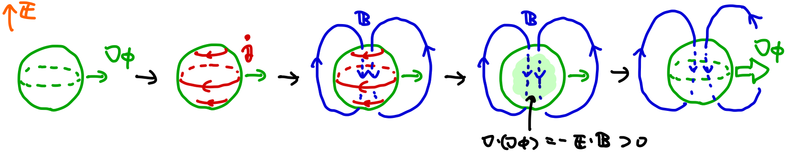
- 場の3次のトポロジカル結合をもつ無質量可換反対称テンソルゲージ場において、
一様なテンソル電場をかけるとタキオン的不安定性が生じる
- 不安定性によって、テンソル磁場が生成し電場が小さくなる
- 生成した磁場は非可逆高次対称性によって安定性が保証されている

まとめ

- 一般化対称性はウォード・高橋恒等式を元にした対称性の拡張



- アクシオン電磁気学には一般化対称性が存在し、ダイナミカルな現象を解析する役に立つ



1. カイラル不安定性で生成される磁場は、非可逆対称性によって安定
2. 電場中での不安定性で生成されるアクシオンと磁場は、非可逆1次対称性によって安定

今後の課題: 現実的な模型にどのような一般化対称性があり、 (既知 or 未知の) 物理を意味するか？

Appendix

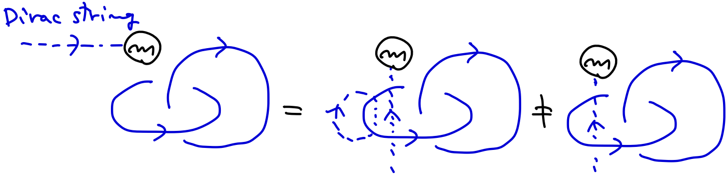
磁気ヘリシティの大局的ゲージ不変性 (1/3)

Large gauge invariance のこと

大局的ゲージ不変性 = ディラック弦の挿入に対する物理量の不変性

- 磁気単極子 $\int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = 2\pi m$
- ディラック弦 = ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を一価にするための非物理的磁束
- 物理量はディラック弦の挿入の仕方で不変であるべし (ディラックの量子化条件もここから導く)

しかし、磁気ヘリシティはディラック弦の挿入で値が変わってしまう



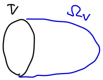
より正確には...

磁気ヘリシティの大局的ゲージ不変性 (2/3)

ユニタリー演算子 $\exp\left(i\alpha \int_V d^3\boldsymbol{x}\, \frac{1}{8\pi^2} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right)$ における
ストークスの定理とディラック量子化条件の整合性が重要

- 問題: 被積分関数がゲージ不変でない
- ストークスの定理で被積分関数を無理やりゲージ不変にする

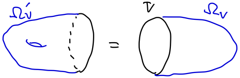
$$\exp\left(i\alpha \int_V d^3\boldsymbol{x}\, \frac{1}{8\pi^2} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right) = \exp\left(i\alpha \int_{\Omega_V} d^4x\, \frac{1}{16\pi^2} F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\right), \quad \partial\Omega_V = V$$



- 右辺はゲージ不変だが、 Ω_V を手でとってしまった。

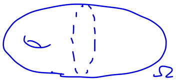
磁気ヘリシティの大局的ゲージ不変性 (3/3)

- 4次元空間 Ω_V の取り方に依存しない条件が必要



- つまり、

$$\exp\left(-i{\color{red}\alpha}\int_{\Omega} d^4x \frac{1}{16\pi^2} F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\right) = 1$$



- ディラックの量子化条件より、 $\int_{\Omega} d^4x \frac{1}{16\pi^2} F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \in \mathbb{Z}$ であるので、

  $e^{i{\color{red}\alpha}} = 1$ でなければならない。

- よって $U \propto \exp\left(i{\color{red}\alpha}\int_V d^3\boldsymbol{x} \frac{1}{8\pi^2} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right)$ は非自明な変換を生成しない

Bibliography

Bibliography - I

[1] D. Gaiotto, A. Kapustin, N. Seiberg, and B. Willett, “Generalized Global Symmetries,” JHEP **02** (2015) 172, [arXiv:1412.5148 [hep-th]].
(pages 5, 13, 19, 20).

[2] L. Bhardwaj and Y. Tachikawa, “On finite symmetries and their gauging in two dimensions,” JHEP **03** (2018) 189, [arXiv:1704.02330 [hep-th]].
(page 21).

[3] F. Wilczek, “Two Applications of Axion Electrodynamics,” Phys. Rev. Lett. **58** (1987) 1799.
(page 26).

[4] P. Sikivie, “On the Interaction of Magnetic Monopoles With Axionic Domain Walls,” Phys. Lett. **137B** (1984) 353–356.
(page 27).

[5] K. Fukushima, D. E. Kharzeev, and H. J. Warringa, “The Chiral Magnetic Effect,” Phys. Rev. D **78** (2008) 074033, [arXiv:0808.3382 [hep-ph]].
(page 27).

[6] S. M. Carroll, G. B. Field, and R. Jackiw, “Limits on a Lorentz and Parity Violating Modification of Electrodynamics,” Phys. Rev. D **41** (1990) 1231.
(page 28).

[7] M. Joyce and M. E. Shaposhnikov, “Primordial magnetic fields, right-handed electrons, and the Abelian anomaly,” Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 1193–1196, [arXiv:astro-ph/9703005].
(page 28).

[8] M. M. Anber and L. Sorbo, “Nflationary Magnetic Fields,” AIP Conf. Proc. **903** (2007) no. 1, 669–672.
(page 28).

[9] Y. Akamatsu and N. Yamamoto, “Chiral Plasma Instabilities,” Phys. Rev. Lett. **111** (2013) 052002, [arXiv:1302.2125 [nucl-th]].
(page 28).

[10] Y. Choi, H. T. Lam, and S.-H. Shao, “Non-invertible Global Symmetries in the Standard Model,” arXiv:2205.05086 [hep-th].
(pages 32, 33).

Bibliography - II

[11] C. Cordova and K. Ohmori, "Non-Invertible Chiral Symmetry and Exponential Hierarchies," arXiv:2205.06243 [hep-th]. (pages 32, 33).