Low energy limit from high energy expansion in mass-gapped theory

京大基研
高浦　大雅

HT 2404.05589

Contents

QCD

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}} = -\frac{1}{4}F^{a\mu\nu}F^{a}_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi$$

where

$$F^{a}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g_s f^{abc}A^b_\mu A^c_\nu \quad , \quad \not{D} = \not{\partial} - i g_s \not{A}^a T^a$$

漸近自由な理論

高エネルギー：弱結合 $(g_s \to 0)$

摂動論により、理論計算が可能

低エネルギー：強結合 $(g_s \gg 1)$

理論的な解析は困難

豊富な現象：質量ギャップ
カラー閉じ込め
カイラル凝縮

摂動論

物理量の高エネルギー$(p^2 \gg \Lambda^2_{\mathrm{QCD}})$の挙動は摂動論で近似できる

$$\mathcal{O}_{\mathrm{phys}}(p^2) = a_0 + a_1 g_s^2(p^2) + a_2 g_s^4(p^2) + \cdots$$

現在計算されている(物理量に対する)最高の摂動次数は $\mathcal{O}(g_s^8)$

OPE（摂動論の拡張）

$$\mathcal{O}_{\mathrm{phys}}(p^2) = \underline{C_0(p^2)} + \underline{C_1(p^2)}\,\frac{\overset{\Lambda_{\mathrm{QCD}}^{d_1}}{\overset{\propto}{\underline{\langle 0|\mathcal{O}_1|0\rangle}}}}{(p^2)^{d_1}} + \underline{C_2(p^2)}\,\frac{\overset{\Lambda_{\mathrm{QCD}}^{d_2}}{\overset{\propto}{\underline{\langle 0|\mathcal{O}_2|0\rangle}}}}{(p^2)^{d_2}} + \cdots \qquad (0 < d_1 < d_2 < \cdots)$$

$(p^2 \gg \Lambda_{\mathrm{QCD}}^2)$ Wilson係数は摂動計算可能

ここに

$$C_0(p^2) = a_0 + a_1 g_s^2(p^2) + a_2 g_s^4(p^2) + \cdots$$

$$C_1(p^2) = a_0' + a_1' g_s^2(p^2) + a_2' g_s^4(p^2) + \cdots$$

$$C_2(p^2) = a_0'' + a_1'' g_s^2(p^2) + a_2'' g_s^4(p^2) + \cdots$$

高エネルギー展開は系統的に計算可能

OPE（摂動論の拡張）

真空期待値は非摂動な解析と合わせて決定可

$$\mathcal{O}_{\mathrm{phys}}(p^2) = \underline{C_0(p^2)} + \underline{C_1(p^2)}\frac{\underline{\langle 0|\mathcal{O}_1|0\rangle}}{(p^2)^{d_1}} + \underline{C_2(p^2)}\frac{\underline{\langle 0|\mathcal{O}_2|0\rangle}}{(p^2)^{d_2}} + \cdots \qquad (0 < d_1 < d_2 < \cdots)$$

$(p^2 \gg \Lambda^2_{\mathrm{QCD}})$ Wilson係数は摂動計算可能

ここに

$$C_0(p^2) = a_0 + a_1 g_s^2(p^2) + a_2 g_s^4(p^2) + \cdots$$

$$C_1(p^2) = a_0' + a_1' g_s^2(p^2) + a_2' g_s^4(p^2) + \cdots$$

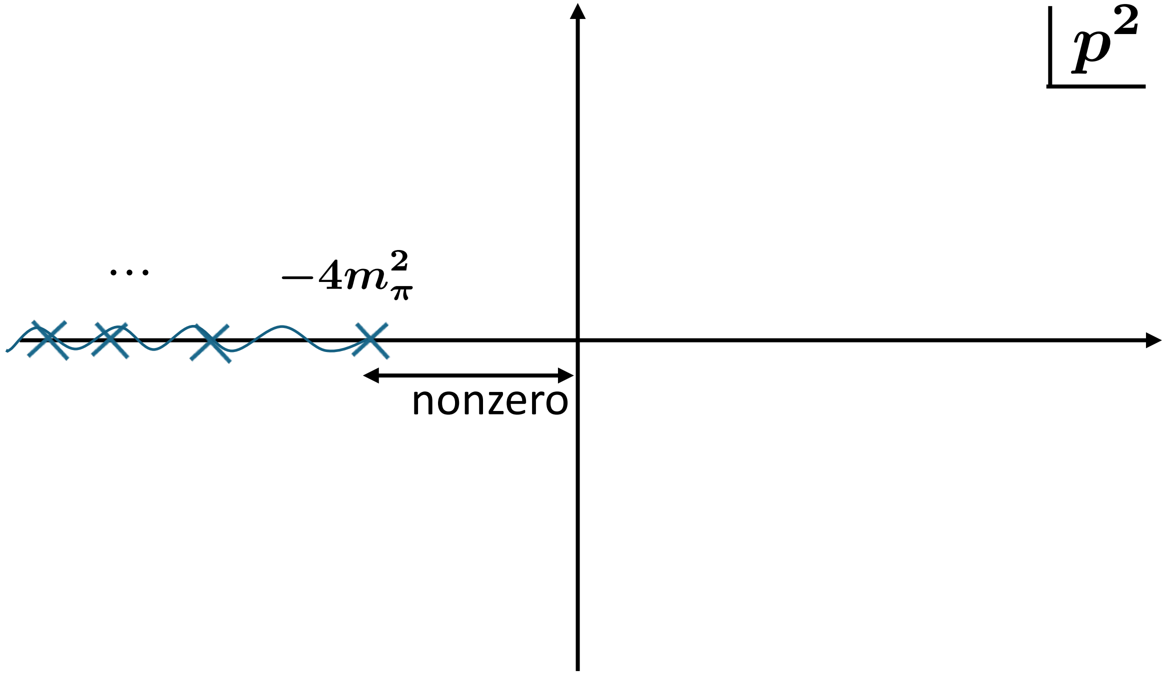
$$C_2(p^2) = a_0'' + a_1'' g_s^2(p^2) + a_2'' g_s^4(p^2) + \cdots$$

高エネルギー展開は系統的に計算可能

物理量の解析性

Adler functionの例 $D(p^2) \sim \int d^4x\, e^{ipx} \langle 0 | J_\mu(x) J^\mu(0) | 0 \rangle$ $\quad (J_\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu \psi(x))$

$$R(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \to \mathrm{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} \sim \mathrm{Im}[D(p^2 = -s)]$$



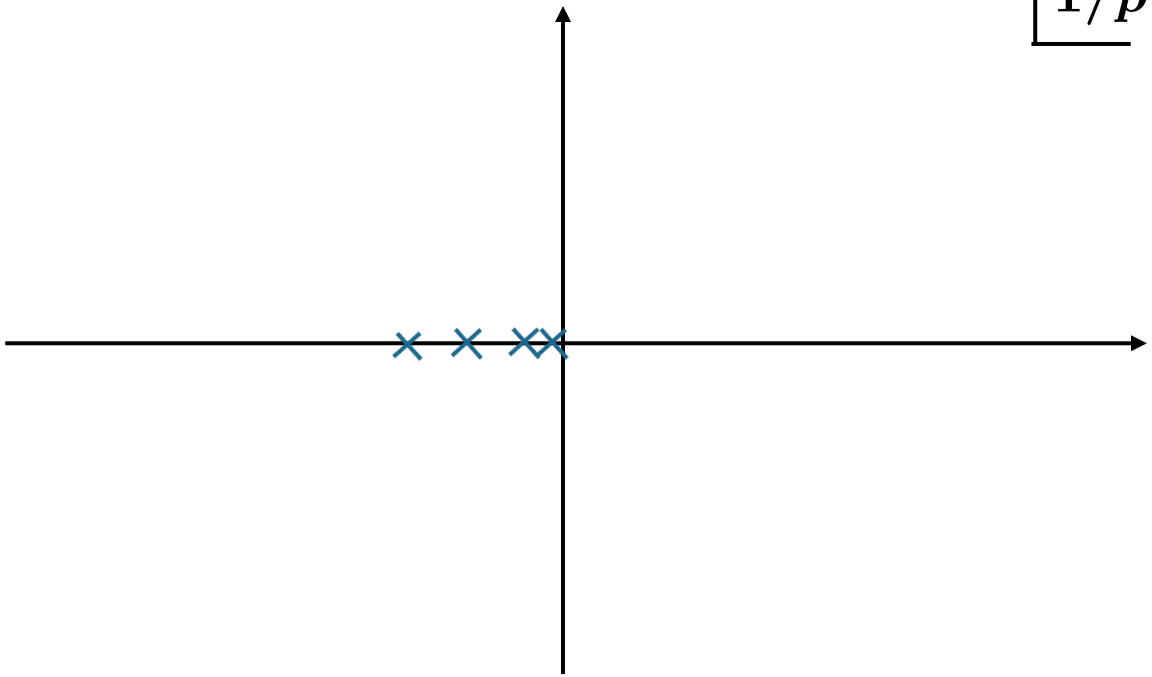
*このトークでは右側をspacelike，左側をtimelikeにとる

物理量の解析性

Adler functionの例 $D(p^2) \sim \int d^4x\, e^{ipx} \langle 0|J_\mu(x) J^\mu(0)|0\rangle$ $\quad (J_\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu \psi(x))$

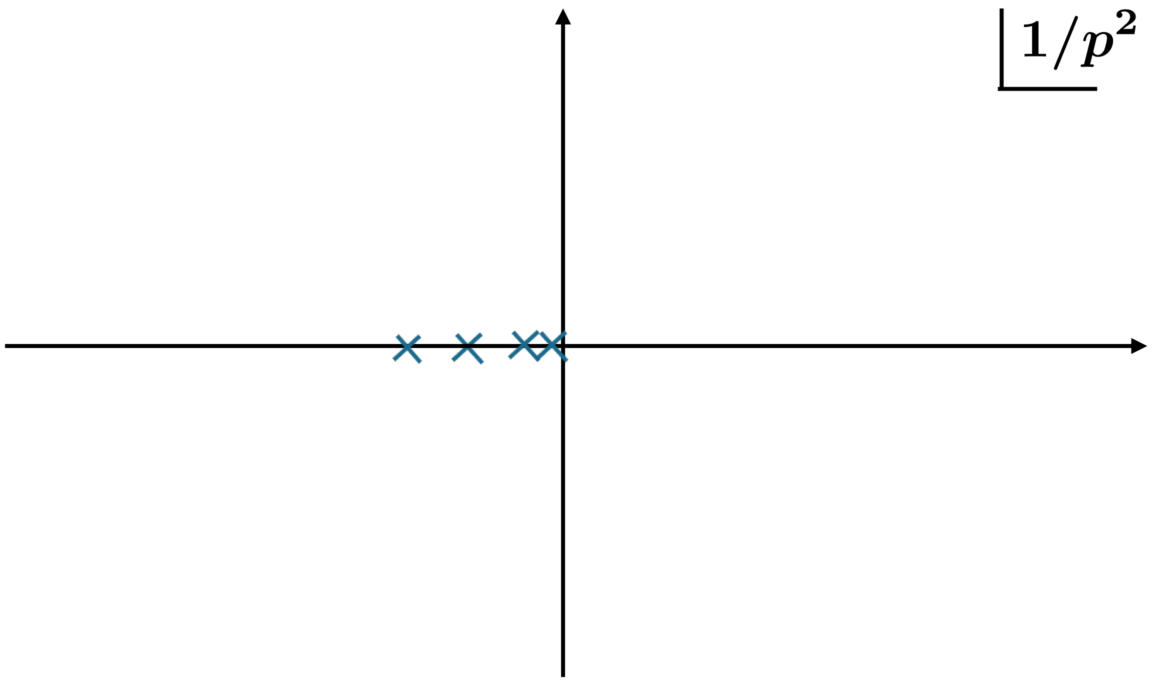
$$R(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} \sim \mathrm{Im}[D(p^2 = -s)]$$

$\lfloor 1/p^2$



いくらでも高エネルギーでハドロン生成が起こるため、0に無限に近い点に特異点が存在！

OPEの収束半径

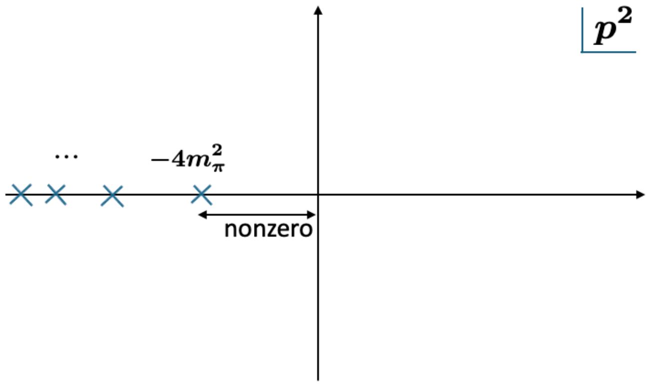


複素関数の定理：Taylor展開は展開点に一番近い特異点の距離に等しい収束半径を持つ

OPEは収束半径0の展開！ $\mathcal{O}_{\mathrm{phys}}(p^2) = C_0(p^2) + C_1(p^2)\frac{\langle 0|\mathcal{O}_1|0\rangle}{(p^2)^{d_1}} + C_2(p^2)\frac{\langle 0|\mathcal{O}_2|0\rangle}{(p^2)^{d_2}} + \cdots$

仮に展開が全次数計算されても低エネルギーの予言能力は持たない

低エネルギー展開



一方、低エネルギー展開

$$D(p^2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{p^2}{\Lambda_{\mathrm{QCD}}^2} \right)^n$$

は、$|p^2| < 4m_\pi^2$ で収束する級数（mass gapのため有限の収束半径）

この展開は強結合のため、計算が困難

このような低エネルギー極限を求められないか?

Key idea

HT 2404.05589

逆ラプラス変換を考える $(p^2 \leftrightarrow \tau)$

$$\tilde{D}(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{dr}{r}D(p^2 = 1/r)e^{\tau r} \qquad (r = 1/p^2)$$

この変換は 2023 Hayashi, Mishima, Sumino, HT でリノーマロン問題を解決するために導入

Key idea

HT 2404.05589

逆ラプラス変換を考える $(p^2 \leftrightarrow \tau)$

$$\tilde{D}(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dr}{r} D(p^2 = 1/r) e^{\tau r} \qquad (r = 1/p^2)$$

このトークで着目する性質

$$D(p^2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{p^2}{\Lambda_{\rm QCD}^2}\right)^n \xrightarrow{\text{逆ラプラス変換}} \tilde{D}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!}\left(\frac{\tau}{\Lambda_{\rm QCD}^2}\right)^n$$

低エネルギー展開の収束半径が無限大に→ τ平面いたる所で解析的

$$\left[f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots \to \tilde{f}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \right]$$

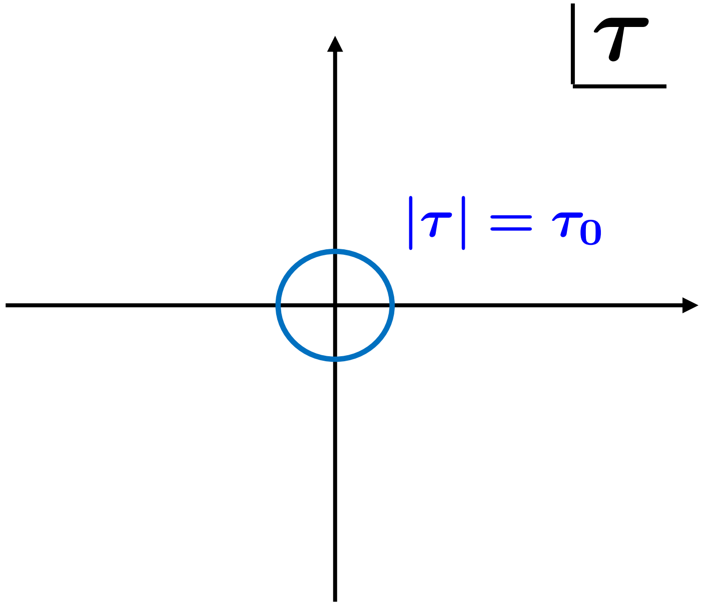
Key idea

HT 2404.05589

$$\tilde{D}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \left(\frac{\tau}{\Lambda_{\rm QCD}^2} \right)^n$$

Cauchyの留数定理

$$c_n = \frac{n!\Lambda_{\rm QCD}^{2n}}{2\pi i} \oint_{\tau=\tau_0 e^{i\theta}} \frac{d\tau}{\tau^{n+1}} \tilde{D}(\tau)$$



τ平面に特異点はないので、半径は任意に取れる

Key idea

HT 2404.05589

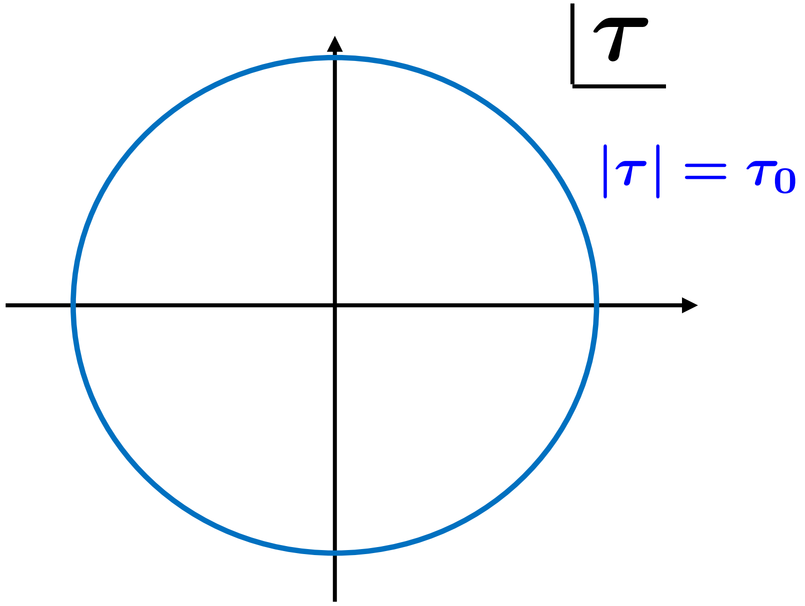
$$\tilde{D}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \left(\frac{\tau}{\Lambda_{\rm QCD}^2} \right)^n$$

Cauchyの留数定理

$$c_n = \frac{n!\Lambda_{\rm QCD}^{2n}}{2\pi i} \oint_{\tau=\tau_0 e^{i\theta}} \frac{d\tau}{\tau^{n+1}} \tilde{D}(\tau)$$

$\tau_0 \gg \Lambda_{\rm QCD}^2$と取れば

$$c_n \overset{??}{=} \frac{n!\Lambda_{\rm QCD}^{2n}}{2\pi i} \oint_{\tau=\tau_0 e^{i\theta}} \frac{d\tau}{\tau^{n+1}} \tilde{D}_{\rm OPE}(\tau)$$



高エネルギー展開から低エネルギー展開の係数が計算可能(??)

This work

逆ラプラス変換を用いれば、低エネルギー展開(極限)を
高エネルギー展開から計算できるか？

弱結合のために系統的に計算可能な高エネルギー展開から、
強結合となる低エネルギーの挙動を引き出す

このアイデアを可解模型である2次元O(N) nonlinear sigma modelで検証する

Contents

Model

2次元O(N) nonlinear sigma model　　1976 Bardeen, Lee, Shrock

$$S=\frac{1}{2g_0}\int d^2x\,\{\partial_\mu\sigma^a(x)\partial_\mu\sigma^a(x)+\alpha(x)(\sigma^a(x)\sigma^a(x)-N)\}$$

$\sigma^a(x)$：スカラー場 $(a=1,...,N)$

$\alpha(x)$ ：ラグランジュ未定乗数（$\sigma^a(x)\sigma^a(x)=N$ を与える）

g_0： 結合定数

1/N展開により、非摂動的に理論予言が得られる

理論の性質

1/N展開により、以下のことが知られている

・漸近自由性

・ダイナミカルスケール　$\boldsymbol{m^2 (\leftrightarrow \Lambda^2_{\mathrm{QCD}})}$

・質量ギャップ　（場αがVEVを持つ：$\langle \boldsymbol{\alpha} \rangle = \boldsymbol{m^2}$ ）

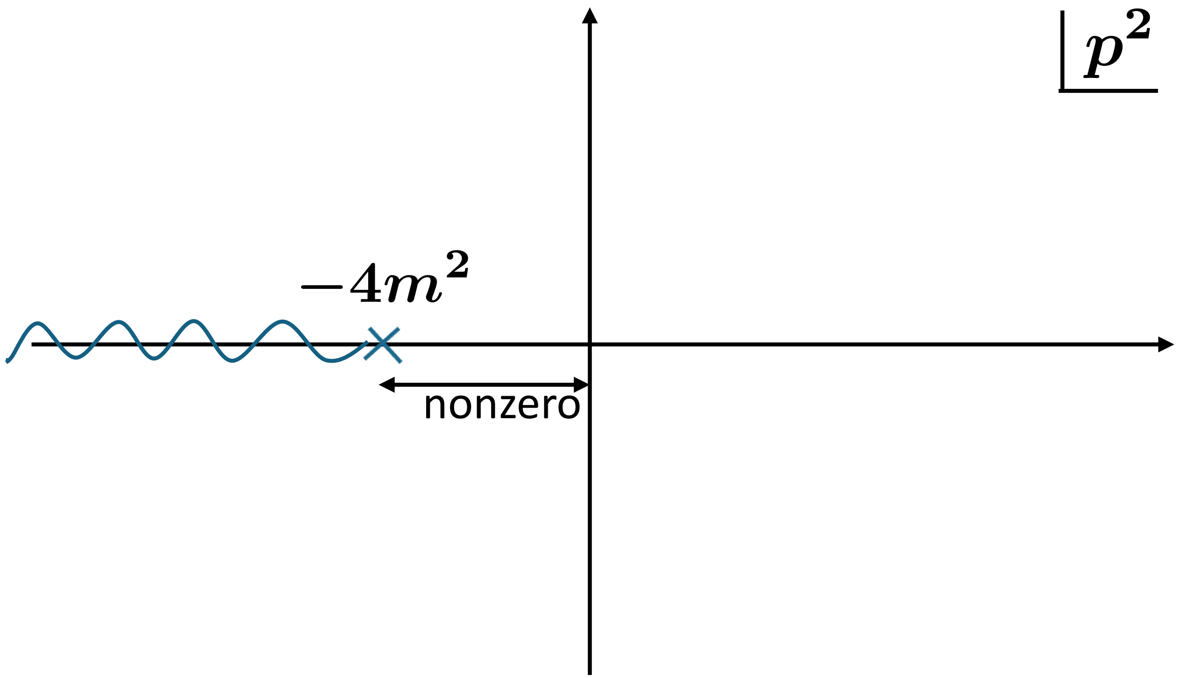
QCDと同様の性質

First example

$\delta\alpha = \alpha - \langle\alpha\rangle$ の2点関数

1/N展開の初項: $D_\alpha(p^2) \equiv N\int d^2x e^{-ip\cdot(x-y)}\langle\delta\alpha(x)\delta\alpha(y)\rangle = \dfrac{4\pi\sqrt{p^2(p^2+4m^2)}}{\log\left[\frac{\sqrt{p^2+4m^2}+\sqrt{p^2}}{\sqrt{p^2+4m^2}-\sqrt{p^2}}\right]}.$

非摂動的な正確な答え



高エネルギー展開

先の答えを高エネルギー展開すると$(p^2 \gg m^2)$

$$D_{\alpha,\mathrm{OPE}}(p^2) = p^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n(p^2) \frac{\langle \alpha^n \rangle}{p^{2n}} \qquad \text{where} \qquad \langle \alpha^n \rangle = m^{2n}$$

とOPEの形の答えを得る。Wilson係数は

$$C_0(p^2) = 4\pi \hat{g}(p^2)$$

$$C_1(p^2) = 4\pi(2\hat{g}(p^2) - 2\hat{g}^2(p^2))$$

$$C_2(p^2) = 4\pi(-2\hat{g}(p^2) - \hat{g}^2(p^2) + 4\hat{g}^3(p^2))$$

$$\vdots$$

$\left(\hat{g} = \frac{g}{4\pi}\right)$

有限次の摂動級数

QCDでも系統的に計算可能な部分（高エネルギー展開）に対応

低エネルギー展開

先の答えを低エネルギー展開すると

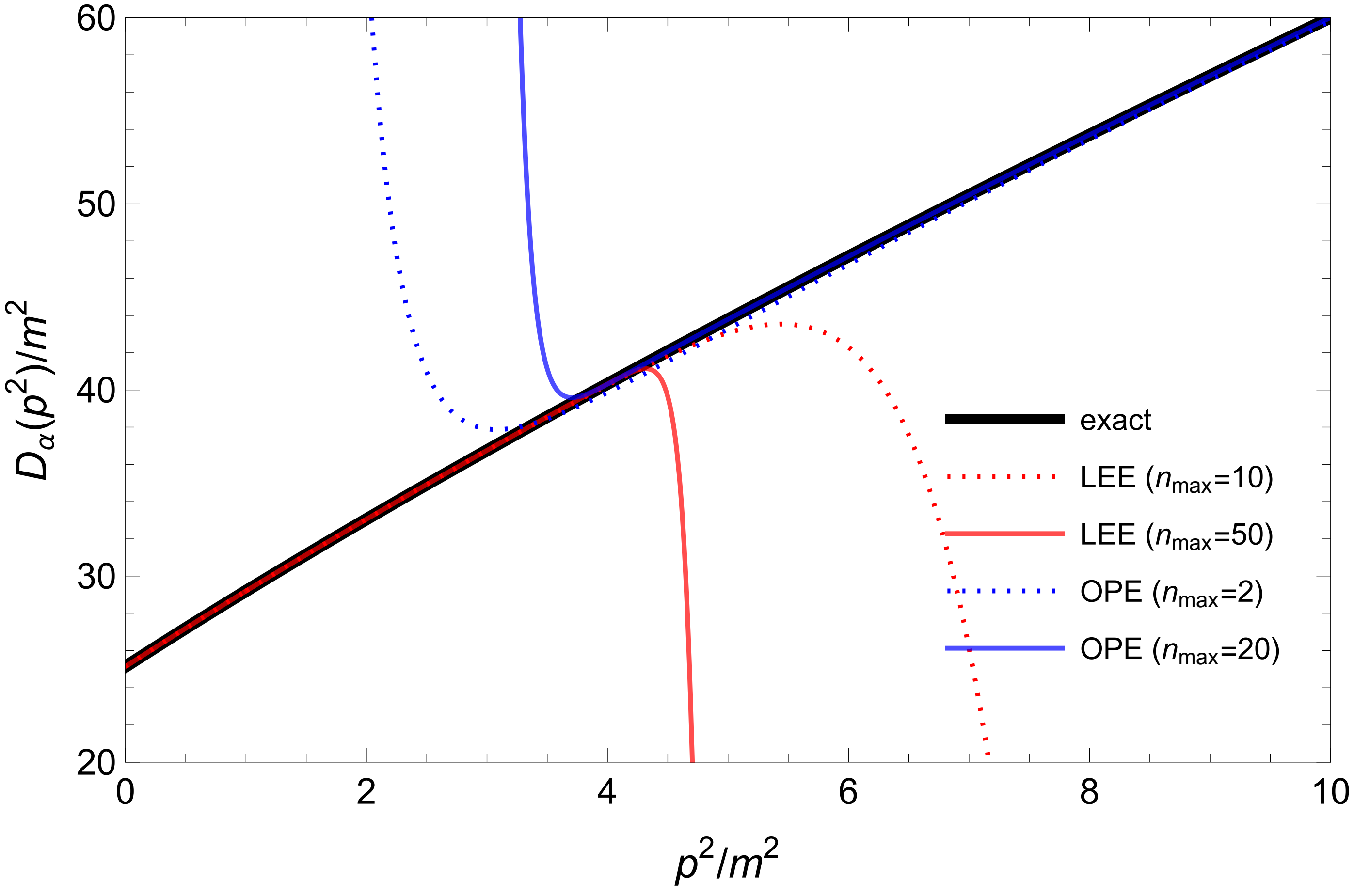
$$D_{\alpha,\mathrm{low}}(p^2) = m^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{p^2}{m^2}\right)^n \qquad (p^2 \ll m^2)$$

ここに

$$c_0 = 8\pi$$
$$c_1 = 4\pi/3$$
$$c_2 = -2\pi/45$$
$$\vdots$$

QCDでは計算困難な低エネルギー極限 (c_0) を
先の高エネルギー展開だけから引き出せるか？

OPE vs. Low energy expansion



LEE: Low energy expansion

通常の状況：低エネルギー展開とOPEの一致領域なし

逆ラプラス変換

$$\tilde{D}_\alpha(\tau) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dr}{r}\, D_\alpha(1/r) e^{\tau r}$$

この高エネルギー展開は、元の量の高エネルギー展開 $(D_{\alpha,\mathrm{OPE}}(p^2))$ から計算できる：

$$\tilde{D}_{\alpha,\mathrm{OPE}}(\tau) = \tau \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n(\tau) \left(\frac{m^2}{\tau}\right)^n \qquad (\tau \gg m^2)$$

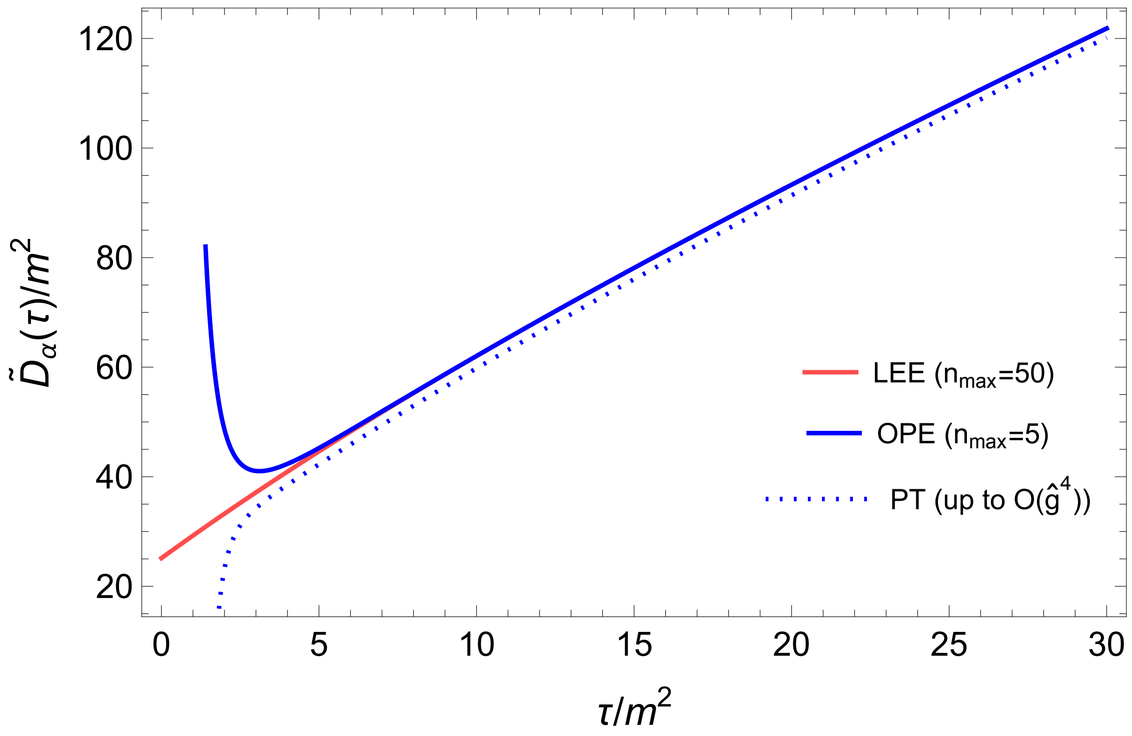
ここに

$$\tilde{C}_0(\tau) = 4\pi\hat{g}(\tau) - 4\pi(\gamma_E - 1)\hat{g}^2(\tau) + \cdots$$

$$\tilde{C}_1(\tau) = 8\pi\hat{g}(\tau) - 8\pi(\gamma_E + 1)\hat{g}^2(\tau) + \cdots$$

$$\vdots$$

OPE vs. Low energy expansion *after* inverse Laplace transform



逆ラプラス変換後：$\tau \gg m^2$ の領域で、低エネルギー展開とOPEが一致！

Duality violations

$\tilde{D}_\alpha(\tau) \approx \tilde{D}_{\alpha,\mathrm{OPE}}(\tau)$ for $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{\tau} \gg \boldsymbol{m^2}$ を確認済み

$\tilde{D}_\alpha(\tau) \approx \tilde{D}_{\alpha,\mathrm{OPE}}(\tau)$ for $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{C},\ |\boldsymbol{\tau}| \gg \boldsymbol{m^2}$ も成り立つ？

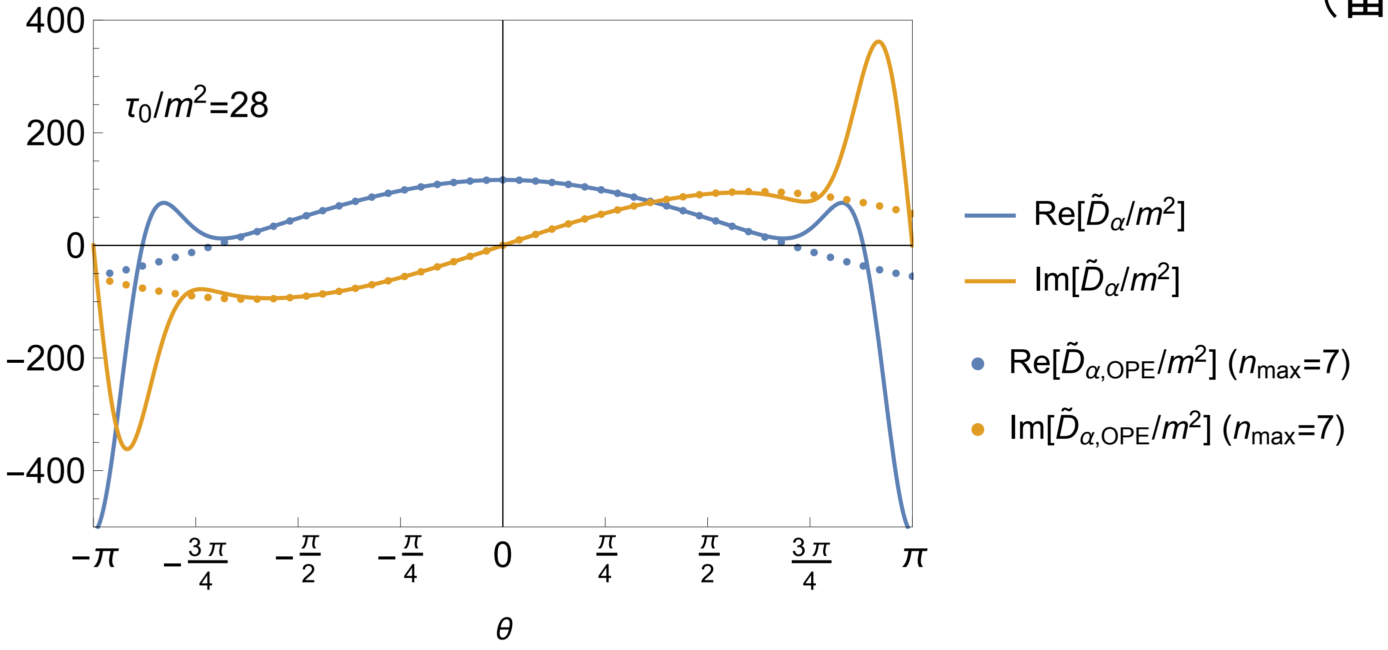
（留数定理が使えるために必要）

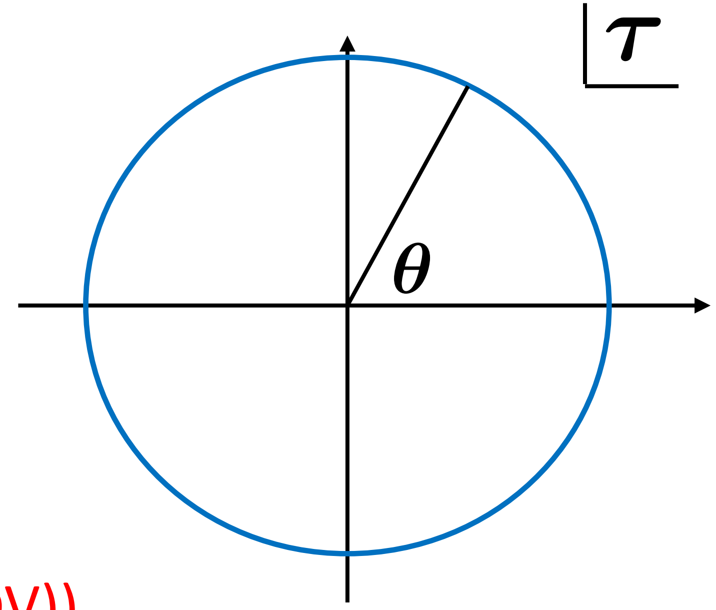
Duality violations

$$\tilde{D}_\alpha(\tau) \approx \tilde{D}_{\alpha,\mathrm{OPE}}(\tau) \ \text{ for } \tau \in \mathbb{R},\ \tau \gg m^2$$ を確認済み

$$\tilde{D}_\alpha(\tau) \approx \tilde{D}_{\alpha,\mathrm{OPE}}(\tau) \ \text{ for } \tau \in \mathbb{C},\ |\tau| \gg m^2$$ も成り立つ？

（留数定理が使えるために必要）



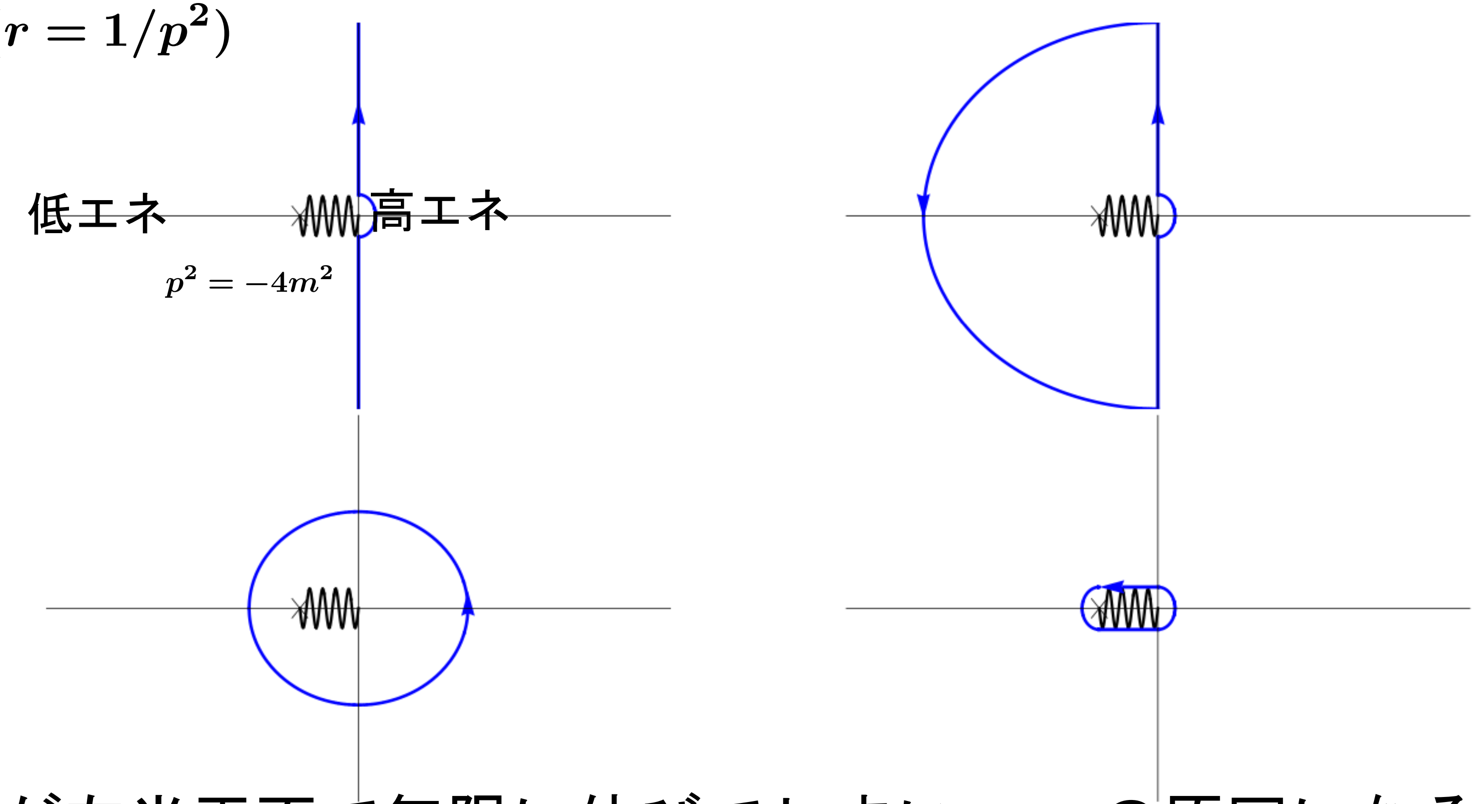


左半平面で近似が成り立たない(Duality violations(DV))

Duality violations

$$\tilde{D}_\alpha(\tau) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{dr}{r}D_\alpha(1/r)e^{\tau r}$$

r平面の積分路 $(r = 1/p^2)$



OPEではcutが左半平面で無限に伸びてしまい、DVの原因になる

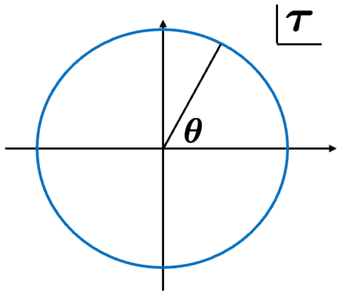
DVの関数形

$$\tilde{D}_{\alpha}(\tau) = \tilde{D}_{\alpha,\mathrm{OPE}}(\tau) + \underbrace{\tilde{D}_{\alpha,\mathrm{DV}}(\tau)}_{\text{OPEの破れ}}$$

DVの関数形は

$$\tilde{D}_{\alpha,\mathrm{DV}}(\tau) \approx K \frac{e^{-\tau/m_{\mathrm{gap}}^2}}{\tau} \left[1 + k_1 \left(\frac{m_{\mathrm{gap}}^2}{\tau} \right) + k_2 \left(\frac{m_{\mathrm{gap}}^2}{\tau} \right)^2 + \cdots \right]$$

DVを抑制する留数定理



$$c_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\tau=\tau_0 e^{i\theta}} \frac{d\tau}{\tau}\tilde{D}_\alpha(\tau)/m^2$$ の代わりに

$$c_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\tau=\tau_0 e^{i\theta}} \frac{d\tau}{\tau}\left(\frac{\tau}{\tau_0}+1\right)^k \tilde{D}_\alpha(\tau)/m^2$$ （k:正の整数）

において、$\tilde{D}_{\alpha,\mathrm{OPE}}(\tau)$ を用いる（左半平面 $\tau \approx -\tau_0$ の寄与が抑制される）

先の関数形のDVを抑制するには

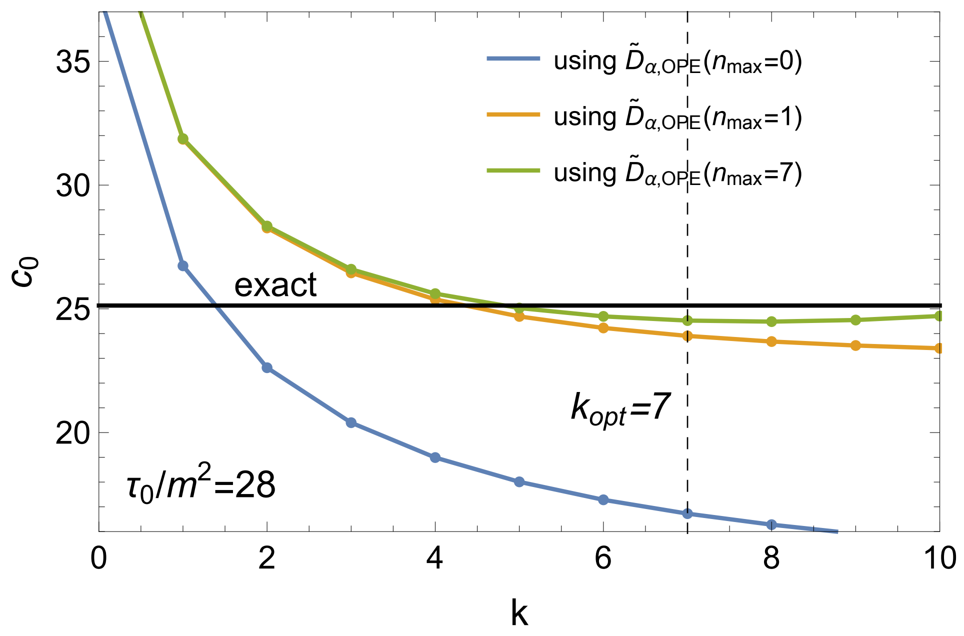
$$k = \tau_0/m_{\mathrm{gap}}^2$$

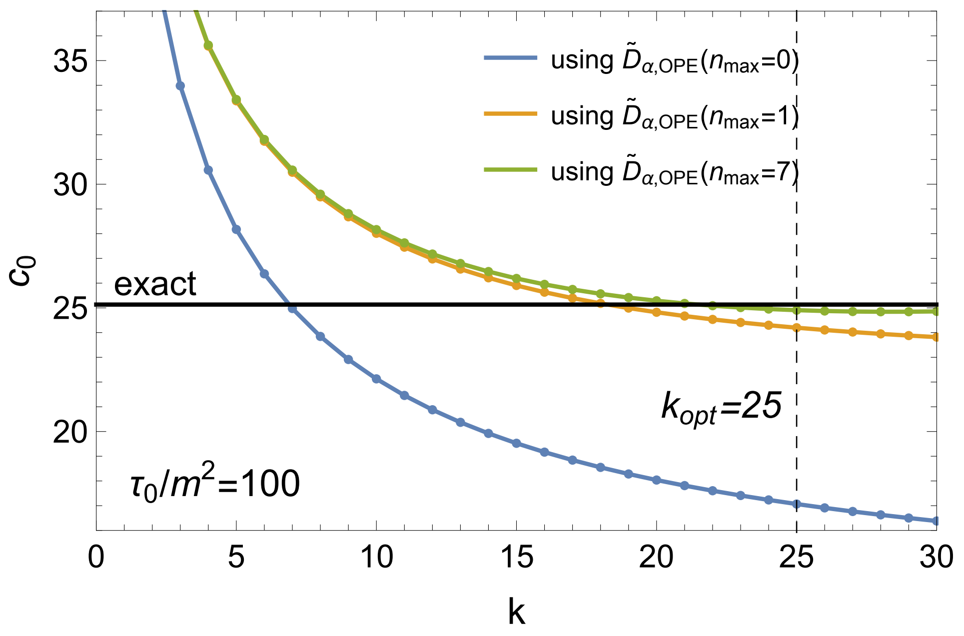
と取れば良い

m_{gap}^2 が分かれば、DVの影響はコントロールできる

低エネルギー極限

$$c_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\tau=\tau_0 e^{i\theta}} \frac{d\tau}{\tau}\left(\frac{\tau}{\tau_0}+1\right)^k \tilde{D}_{\alpha,\mathrm{OPE}}(\tau)/m^2 \quad \text{w/} \quad \tilde{D}_{\alpha,\mathrm{OPE}}(\tau) \simeq \tau \sum_{n=0}^{n_{\max}} \tilde{C}_n(\tau)\left(\frac{m^2}{\tau}\right)^n$$



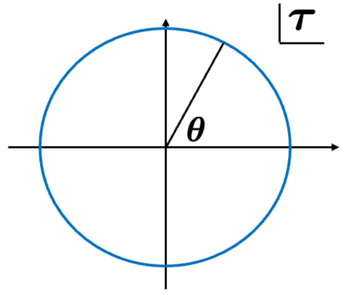


ここまでのまとめ

- ターゲットは低エネルギー極限 $\lim_{p^2 \to 0} D_\alpha(p^2)/m^2 = c_0$
- 元の量の高エネルギー展開 $D_{\alpha,\mathrm{OPE}}(p^2)$ から、逆ラプラス変換された量の高エネルギー展開 $\tilde{D}_{\alpha,\mathrm{OPE}}(\tau)$ が計算できる
- $\tilde{D}_\alpha(\tau) \approx \tilde{D}_{\alpha,\mathrm{OPE}}(\tau)$ for $|\tau| \gg m^2$ の近似は、τ平面右側では成り立つが、左側では破れる(Duality violations)
- 左半平面を抑制するような留数定理を用いることで、

$\lim_{p^2 \to 0} D_\alpha(p^2)/m^2 = c_0$ が近似的に引き出せる！

$$c_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tau = \tau_0 e^{i\theta}} \frac{d\tau}{\tau} \left(\frac{\tau}{\tau_0} + 1 \right)^k \tilde{D}_{\alpha,\mathrm{OPE}}(\tau)/m^2 \quad \text{w/} \quad k = \tau_0 / m_{\mathrm{gap}}^2$$



Contents

Second example

σ-プロパゲータへの自己エネルギー補正　1998 Beneke, Braun, Kivel

$$\rho(q^2) = q^2 \frac{d^2}{d(q^2)^2} \Pi_\sigma(q^2)$$

ここに

$$\frac{1}{N}\Pi_\sigma(q^2) = \frac{1}{N}\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q+k)^2+m^2} D_\alpha(k^2)$$

高エネルギー展開

$$\rho_{\mathrm{OPE}}(q^2) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\underline{C_n^1(q^2)}\frac{\langle\alpha\rangle^n}{q^{2n}} + \sum_j \underline{C_{n,j}^2(q^2)}\frac{\langle \mathcal{O}_{n,j}^{\delta\alpha}\rangle}{q^{2n}}\right]$$

Calculable

低エネルギー展開

$$\rho(q^2)_{\mathrm{low}}(q^2) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{q^2}{m^2}\right)^n$$

一例目との違い

$$\rho_{\mathrm{OPE}}(q^2) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[C_n^1(q^2)\frac{\langle\alpha\rangle^n}{q^{2n}} + \sum_j C_{n,j}^2(q^2)\frac{\langle\mathcal{O}_{n,j}^{\delta\alpha}\rangle}{q^{2n}}\right]$$

$C_n^1(q^2)$：リノーマロンを持った無限次摂動級数

1998 Beneke, Braun, Kivel

$\langle\mathcal{O}_{n,j}^{\delta\alpha}\rangle$：不定性を持った非摂動行列要素

逆ラプラス変換

$$\rho_{\rm OPE}(q^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[C_n^1(q^2) \frac{\langle \alpha \rangle^n}{q^{2n}} + \sum_j C_{n,j}^2(q^2) \frac{\langle \mathcal{O}_{n,j}^{\delta\alpha} \rangle}{q^{2n}} \right]$$

$C_n^1(q^2)$: リノーマロンを持った無限次摂動級数

1998 Beneke, Braun, Kivel

$\langle \mathcal{O}_{n,j}^{\delta\alpha} \rangle$:不定性を持った非摂動行列要素

逆ラプラス変換 $$\tilde{\rho}(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dr}{r} \rho(1/r) e^{\tau r} \qquad (r = 1/q^2)$$

$$\tilde{\rho}_{\rm OPE}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n(\tau) \left(\frac{m^2}{\tau} \right)^n$$

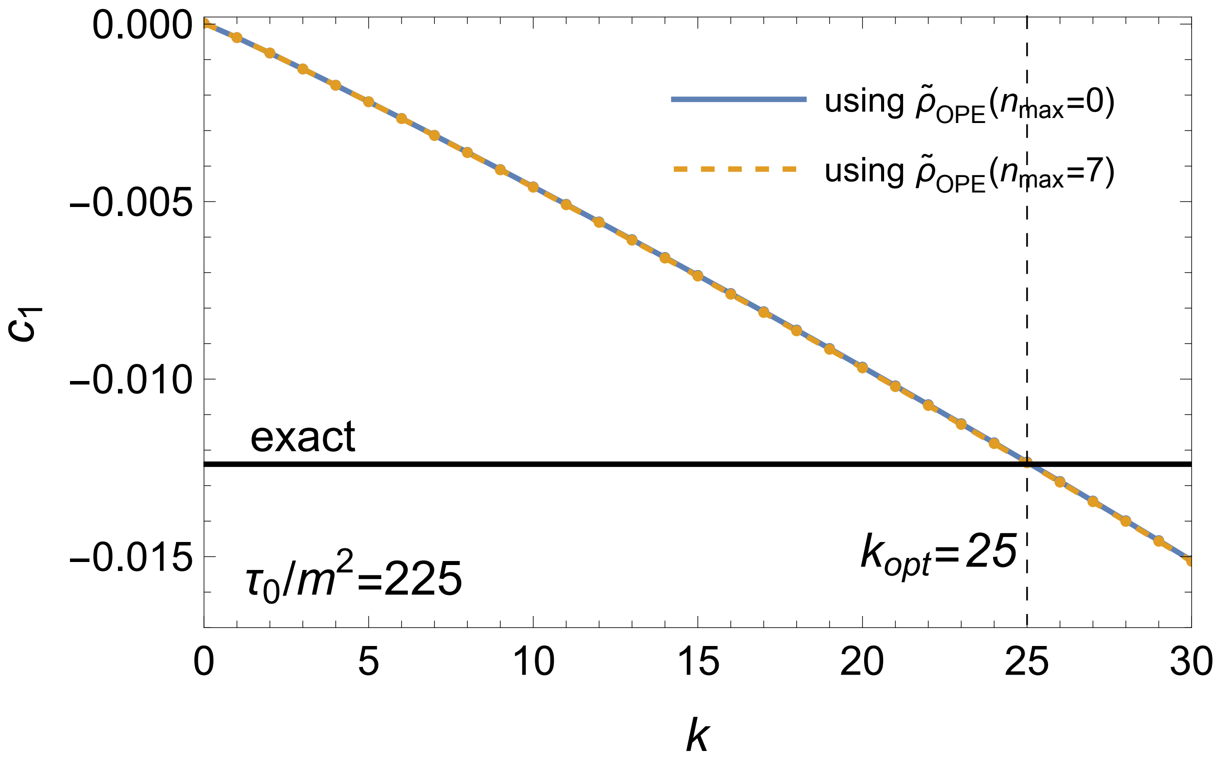
$\tilde{C}_n(\tau)$: リノーマロン消失！

2023 Hayashi, Mishima, Sumino, HT

$\langle \mathcal{O}_{n,j}^{\delta\alpha} \rangle$ も現れない！

結果

$$c_1 \simeq \frac{m^2}{2\pi i}\oint_{\tau=\tau_0 e^{i\theta}} \frac{d\tau}{\tau^2}\left(\frac{\tau}{\tau_0}+1\right)^k \tilde{\rho}_{\mathrm{OPE}}(\tau) \qquad \text{w/} \quad \tilde{\rho}_{\mathrm{OPE}}(\tau) = \sum_{n=0}^{n_{\max}} \tilde{C}_n(\tau)\left(\frac{m^2}{\tau}\right)^n$$



まとめ

・解析困難なQCDの低エネルギー極限に
体系的な高エネルギー展開から迫る新しい手法

・逆ラプラス変換を用いるとτ平面で解析的

⟷ 低エネルギー展開と高エネルギー展開が繋がる(up to Duality Violations)

・DVを抑制する留数定理を用いることで、
高エネルギー展開から低エネルギー極限が引き出せる！

追加の利点：リノーマロンと不定な行列要素の消失

展望

・QCDと今回のモデルの主な違い

今回のモデル：粒子生成由来の特異点が一点だけ

QCD：粒子生成由来の特異点が無限個

・QCDの相転移?