

格子QCDによる 奇パリティ核力のクォーク質量依存性

杉浦拓也 for HAL QCD Collaboration / 立正大学

基研研究会「核力・ハドロン間相互作用と量子多体計算の進展」

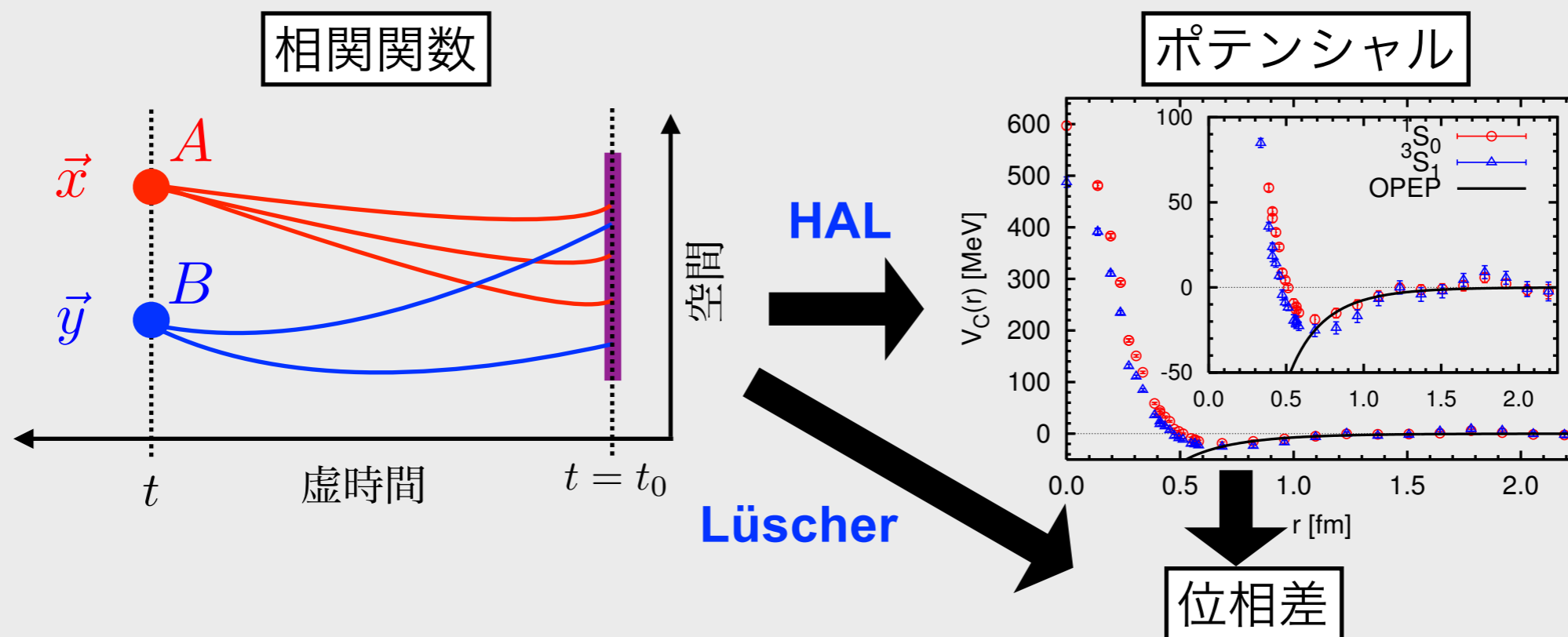
2026/2/16

HAL QCDによるハドロン間力

Ishii, Aoki, Hatsuda, PRL99 (2007) 022001

HAL Col., PLB712 (2012) 437

Review: Aoki, Doi, Front. Phys. 8 (2020) 307



物理的クォーク質量における計算

$m_\pi = 146$ MeV : 京コンピュータ (2011-2019)

$m_\pi = 137$ MeV : 富岳 (2020-) [arXiv:2406.16665 \[hep-lat\]](https://arxiv.org/abs/2406.16665), under review

Introduction

これまでのバリオン間力研究 → 主にS波が対象

- ・ハドロン多体系ではP波相互作用を無視できない
- ・LS力は原子核の魔法数や高密度核物質の物性に深い関わり

現状は片手落ちの状態である！

何が難しいのか？

→ 素朴にやる(all-to-all)と膨大な計算量が必要

→ HAL法でよく用いられるwallソースだと正パリティ状態しか作れない

本研究の目的

- ・ P波状態に強く結合する演算子を用いて**P波相互作用（LS力）**を計算
- ・ フレーバーSU(3)対称な配位を用いた計算により、
クォーク質量依存性を系統的に理解する

$$\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = (\mathbf{27} \oplus \mathbf{8}_s \oplus \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{10}^* \oplus \mathbf{10} \oplus \mathbf{8}_a)$$

↑ 今回はNNだけ

Introduction

核力の一般形：Okubo-Marshak分解

$$V = V_0(r) + (\sigma_1 \cdot \sigma_2)V_\sigma(r) + S_{12}V_T(r) + (L \cdot S)V_{LS}(r) + \mathcal{O}(p^2)$$

LS力は原子核の魔法数や中性子星の物性において重要である

特に中性子星内部の高密度領域において、 3P_2 状態が引力的になり超流動を引き起こすと考えられている

$$\begin{cases} V(r; {}^3P_0) = V_C(r) - 4V_T(r) - 2V_{LS}(r) \\ V(r; {}^3P_1) = V_C(r) + 2V_T(r) - V_{LS}(r) \\ V(r; {}^3P_2) = V_C(r) - 0.4V_T(r) + V_{LS}(r) + ({}^3F_2 \text{ との結合項}) \end{cases}$$

このような機構を第一原理から理解するために、格子QCDによるLS力の導出が重要

Nambu-Bethe-Salpeter (NBS) 波動関数

$$\begin{aligned} & \langle 0 | N(\mathbf{r} + \mathbf{x}, t) N(\mathbf{x}, t) \bar{\mathcal{J}}_{NN}(t_0) | 0 \rangle \\ &= \sum_n \langle n | \bar{\mathcal{J}}_{NN} | 0 \rangle \underbrace{\langle 0 | N(\mathbf{r} + \mathbf{x}) N(\mathbf{x}) | n \rangle}_{\psi_n(\mathbf{r})} e^{-W_n(t-t_0)} \end{aligned}$$

NBS波動関数は遠距離($|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$)で位相差の情報を含む

$$\psi_{l,s}(\mathbf{r}; W) \sim \frac{\sin(kr - l\pi/2 + \delta_{ls}(k))}{kr} e^{i\delta_{ls}(k)}$$

$$W_n = 2\sqrt{k_n^2 + m^2}$$

$\psi_n(\mathbf{r})$ がシュレディンガー方程式の解になるようにポテンシャルを**定義**

$$\frac{1}{m} (k_n^2 + \nabla^2) \psi_n(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi_n(\mathbf{r}')$$

Method: HAL QCD法(2/3)

格子QCDで計算できるのは4点関数

$$C_{NN}(\mathbf{r}, t) = \sum_n A_n \psi_n(\mathbf{r}) e^{-W_n t}$$

各エネルギー固有状態 $\psi_n(\mathbf{r})$ を取り出すためには

- ・ 時間間隔 t を大きく $\rightarrow C_{NN}(t) \sim A_0 \psi_0(\mathbf{r}) e^{-W_0 t}$
- ・ ソース演算子 $\bar{J}(t_0)$ を複数用意 (A_n が変化)して一般化固有値問題を解く
どちらも計算コストが大きく容易ではない

時間依存型HAL QCD法 (通称, 時間依存法) [Ishii et al., PLB712 \(2012\) 437](#)

4点関数に $W_n < W_{th}$ のみが寄与するとき, HAL QCDポテンシャルは
以下を満たす

$$R(\mathbf{r}, t) \equiv C_{NN}(\mathbf{r}, t) \times e^{2m(t-t_0)}$$

$$\left\{ \frac{\nabla^2}{2\mu} - \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{8\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} R(\vec{r}, t) = \int d^3 \vec{r}' U(\vec{r}, \vec{r}') R(\vec{r}', t)$$

Method: HAL QCD法(3/3)

時間依存法ではエネルギー固有状態を分離する必要がない

→ $W_n < W_{th}$ を満たす状態全てをシグナルとして利用できる

・ 基底状態を取り出す場合,

$$t - t_0 \gg (W_1 - W_0)^{-1} \simeq \left((2\pi/L)^2 / m \right)^{-1} \simeq 5 - 10 \text{ fm}$$

・ 弾性散乱状態を取り出す場合,

$$t - t_0 \gg (W_{th} - 2m)^{-1} \simeq \Lambda_{QCD}^{-1} \simeq 1 \text{ fm}$$

→ 現実的コストで計算が可能

Method: fLapH法 (1/4)

これまでのHAL QCDでは, ゼロ運動量射影に相当するウォールソース演算子が主に使われてきた

→ ハドロン中の全てのクォークが静止; 直感的には非物理的だが, なぜか(?)
とても性質の良い結果を与える

しかしLS力を導出するためには 奇パリティ状態=非ゼロ運動量 を持つ
ソース演算子が必要

一般には任意の点 \mathbf{y} から別の任意の点 \mathbf{x} へのプロパゲータ; all-to-all propagator
が必要だが, 素朴にやると計算コストが莫大になり実行不可能

→ 効率よく all-to-all propagator (の近似値)を計算する手法が不可欠

Method: fLapH法 (2/4)

アイデア: all-to-all propagatorのうち, 核子の低エネルギー状態に効く成分だけをうまく取り出す (distillation; 蒸留)

平面波の集合は, 格子上の座標空間の完全基底をなす

$$\delta_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = \sum_{l=1}^{L^3} v_l(\mathbf{x}) v_l^*(\mathbf{y}) \quad v_l(\mathbf{x}) = L^{-3/2} e^{i\mathbf{p}_l \cdot \mathbf{x}}$$

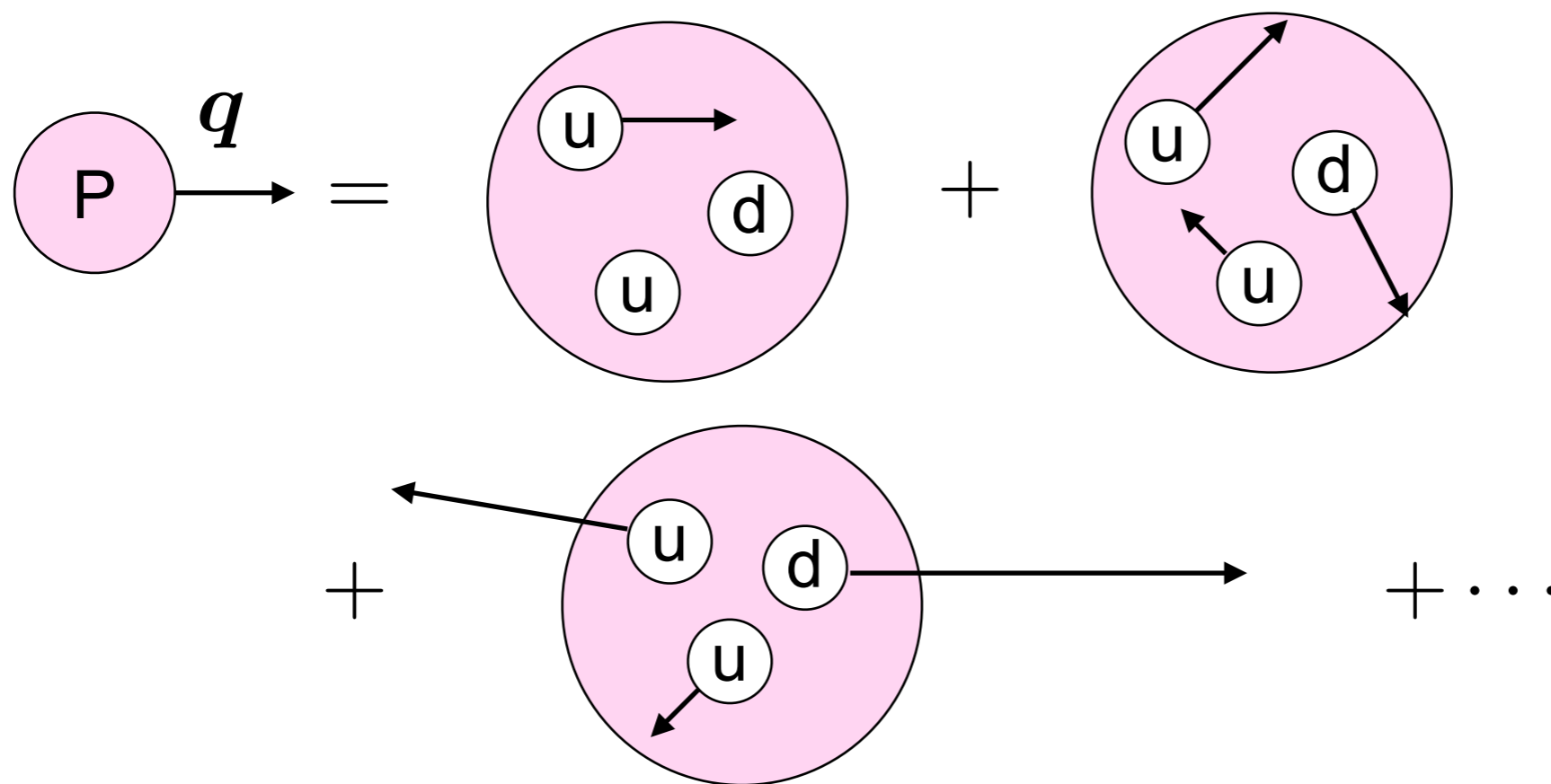
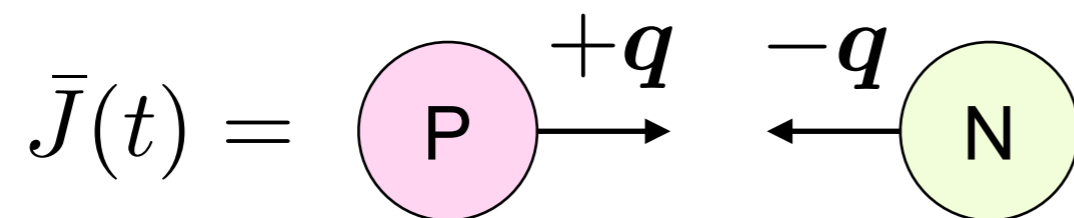
運動量カットオフ \Leftrightarrow レベルの和の打ち切り ... Laplacian Heaviside (LapH)

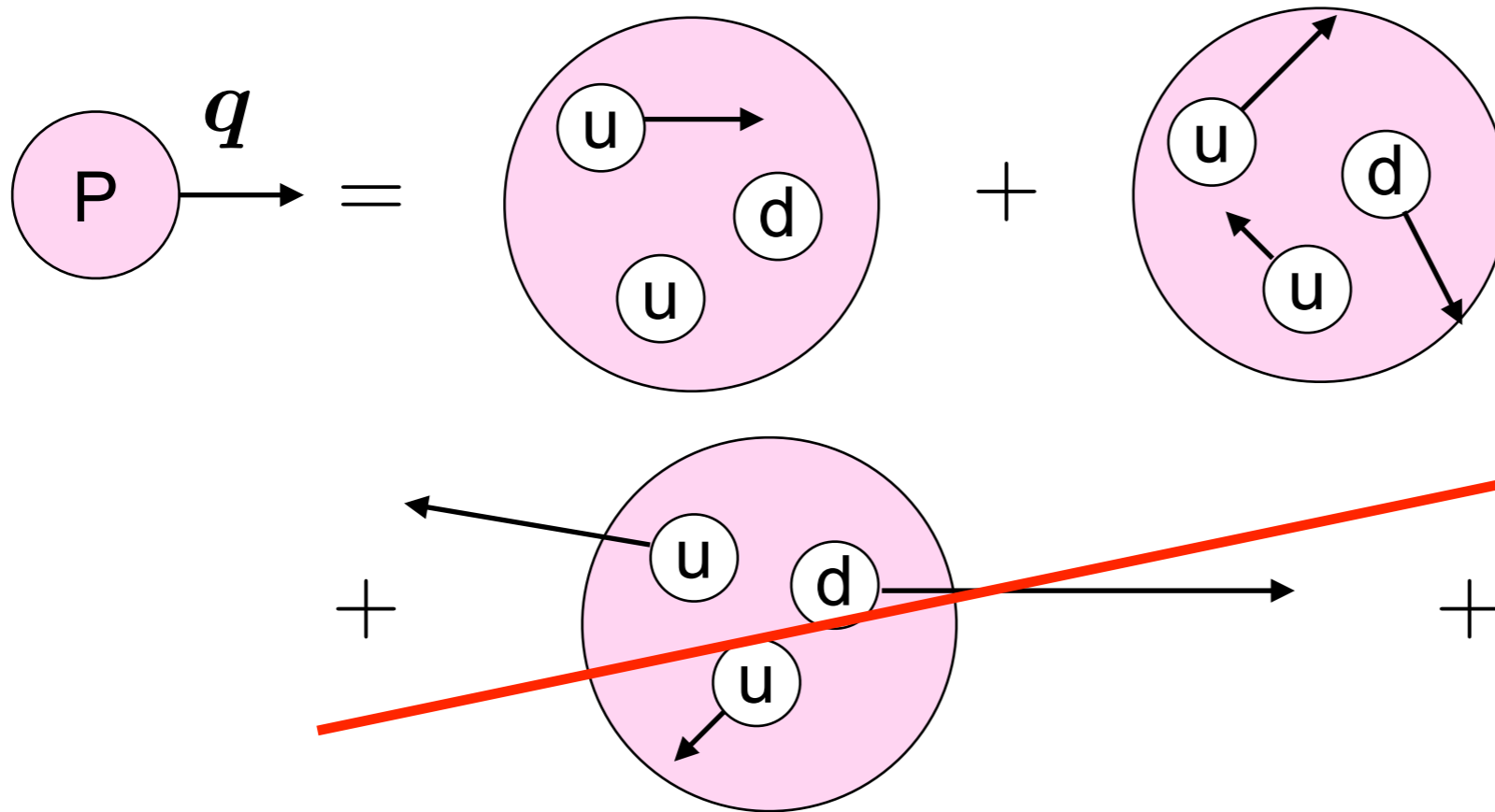
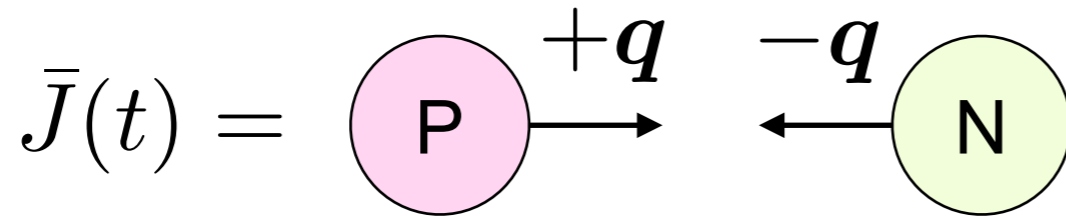
$$\mathcal{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \sum_{l=1}^{N_l} v_l(\mathbf{x}) v_l^*(\mathbf{y}) = \Theta(\sigma_s^2 + \Delta_{\mathbf{x}, \mathbf{y}})$$

fLapH法による場の演算子

$$\bar{q}^{(\text{flapH})}(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_{\mathbf{y}} \mathcal{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \bar{q}(\mathbf{y}, t) = \sum_{l=1}^{N_l} v_l(\mathbf{x}) \tilde{q}_l(t)$$

$$\bar{N}(\mathbf{p}) = \sum_{l_1, l_2, l_3} \delta^3(\mathbf{p}_{l_1} + \mathbf{p}_{l_2} + \mathbf{p}_{l_3} - \mathbf{p}) \times \epsilon_{abc} \bar{u}_{l_1}^a (\bar{u}_{l_2}^b C \gamma_5 \bar{d}_{l_3}^c)$$





高運動量モードをカット

$q = (0,0,0), \rightarrow N_l = 1 \quad (|q|^2 = 0) \dots \text{wall source}$

$(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (-1,0,0), (0,-1,0), (0,0,-1), \rightarrow N_l = 7 \quad (|q|^2 \leq 1)$

$(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,-1,0), (0,1,-1), (-1,0,1), (-1,1,0), (0,-1,1), (1,0,-1),$

$(-1,-1,0), (0,-1,-1), (-1,0,-1),$

$\rightarrow N_l = 19 \quad (|q|^2 \leq 2)$

Method: fLapH法 (4/4)

低エネルギー散乱には低運動量モードが主に効くはず

→ all-to-all propagatorの精度良い近似を与える

HAL QCD法ではソース演算子はなんでも良い

→ ゲージ共変性を破るスメアリングでも, ゲージ固定すればOK

→ 運動量保存則を厳密に適用できるので, 計算量が削減できる

gauge-covariant LapH (cLapH)

[Peardon et al., PRD80 \(2009\) 054506](#)

ゲージ共変なラプラシアン固有状態を使う

$$\tilde{\Delta}_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}^{ab}(t) = \sum_{i=1}^3 \left[\tilde{U}_i^{ab}(\mathbf{x}, t) \delta_{\mathbf{x}+\hat{i}, \mathbf{y}} + \tilde{U}_i^{ab\dagger}(\mathbf{x}, t) \delta_{\mathbf{x}-\hat{i}, \mathbf{y}} - 2\delta^{ab} \delta_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \right]$$

物理的モチベーションはfLapHと同等だが, 運動量保存則は統計的にしか成り

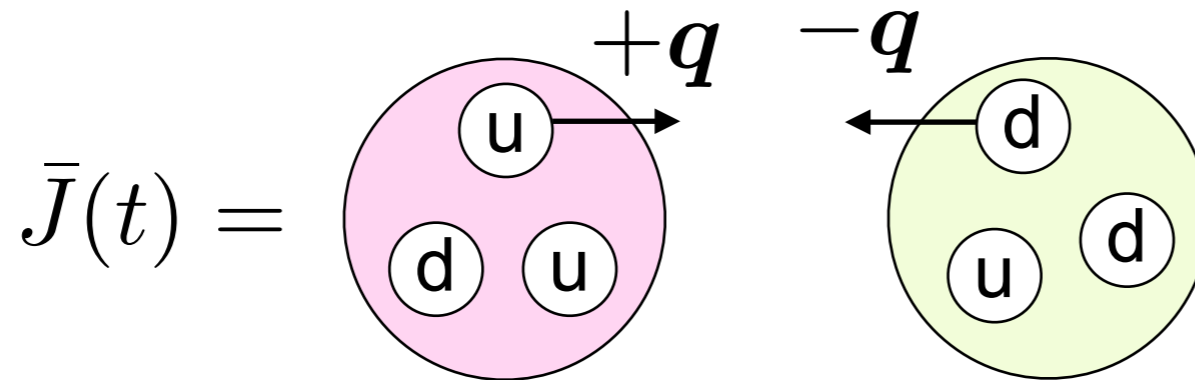
立たない → 計算コストは $\mathcal{O}(N_l^4)$

fLapHは $\mathcal{O}(N_l^3)$ で実行可能で, 我々のセットアップでは100倍超の効率改善

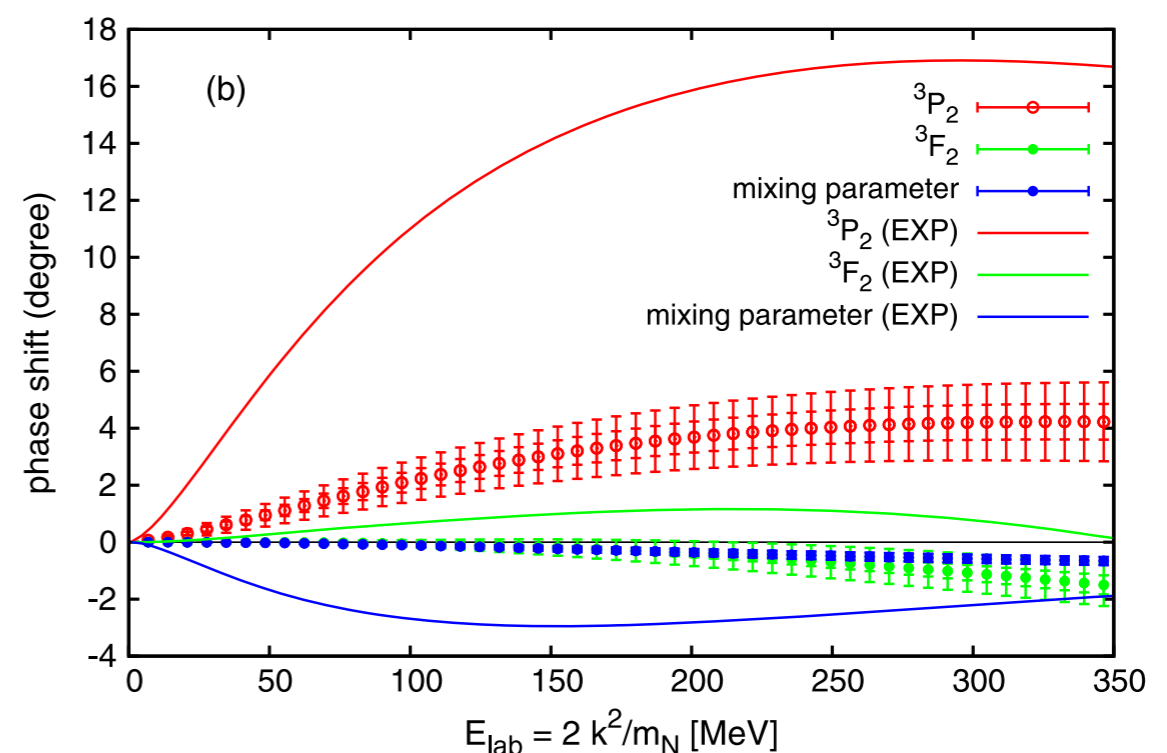
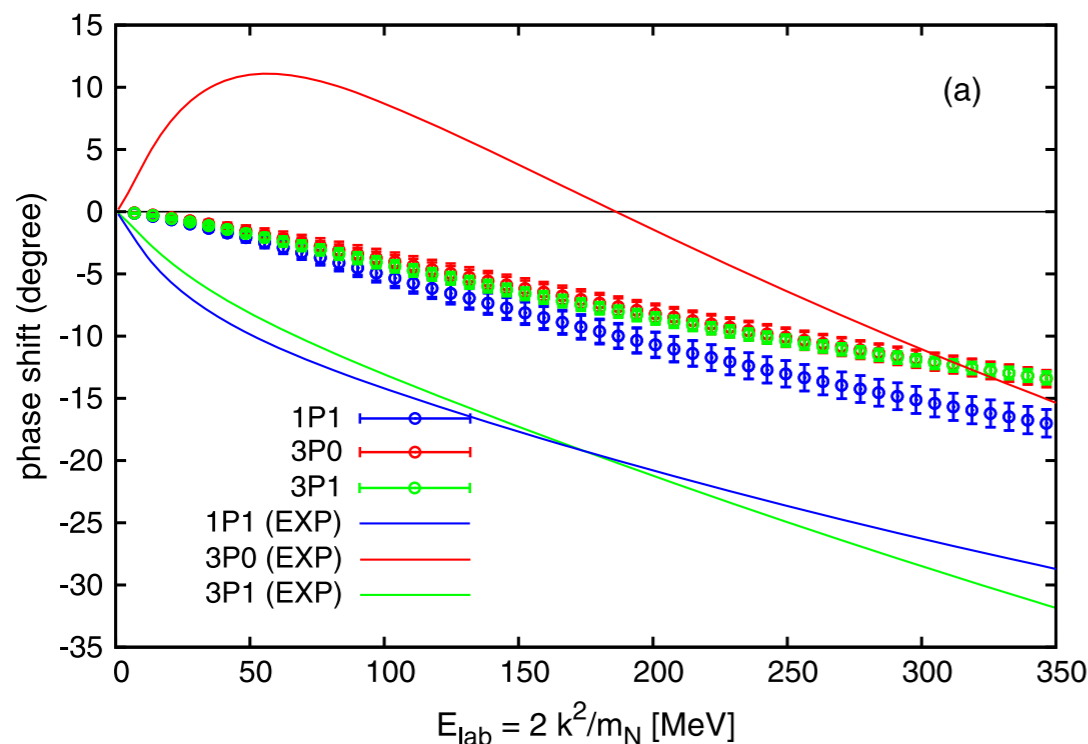
"Spin-orbit force from lattice QCD"

Murano, Ishii et al., PLB 735 (2014) 19-24

- CP-PACS配位 @ $16^3 \times 32$ lattice ($a = 0.1555$ fm), $m_\pi = 1133$ MeV
- momentum wallソース演算子



: 物理的状态との
オーバーラップが小さい?



T.Inoue *et al.*, PRL**106** (2011) 162002.

- 格子体積 : $L^3T = 32^4$
- フレーバーSU(3)対称なゲージ配位
- 3種類のクォーク質量
 - (1) $m_\pi = 470 \text{ MeV}$, $m_N = 1165 \text{ MeV}$
 - (2) $m_\pi = 670 \text{ MeV}$, $m_N = 1480 \text{ MeV}$
 - (3) $m_\pi = 840 \text{ MeV}$, $m_N = 1740 \text{ MeV}$
- 統計数 : (480, 360, 756) confs \times 4 rotations \times 16 tsrc \times 2 fwd/bwd
- Nlevel=19

格子上的の回転対称性を利用して, ${}^3P_0, {}^3P_1, {}^3P_2 + {}^3F_2$ 状態成分を取り出す

$$\begin{aligned} & V_c(r)R^{\mathcal{J}}(\mathbf{r}, t) + V_T(r)S_{12}R^{\mathcal{J}}(\mathbf{r}, t) + V_{LS}(r)(\mathbf{L} \cdot \mathbf{S})R^{\mathcal{J}}(\mathbf{r}, t) \\ &= \left(\frac{\nabla^2}{2m} - \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{4m} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) R^{\mathcal{J}}(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

$V_c(r), V_T(r), V_{LS}(r)$ が $r = |\mathbf{r}|$ のみの関数であることを要請:

以下の"内積"により動径成分を取り出す

$$\langle A(\mathbf{r}), B(\mathbf{r}) \rangle \equiv \sum_{g \in \mathcal{O}} A_{\beta\alpha}^*(g\mathbf{r}) B_{\alpha\beta}(g\mathbf{r})$$

解くべき方程式は

$$V_c(r)F_c^{\mathcal{J}}(r, t) + V_T(r)F_T^{\mathcal{J}}(r, t) + V_{LS}(r)F_{LS}^{\mathcal{J}}(r, t) = K^{\mathcal{J}}(r, t)$$

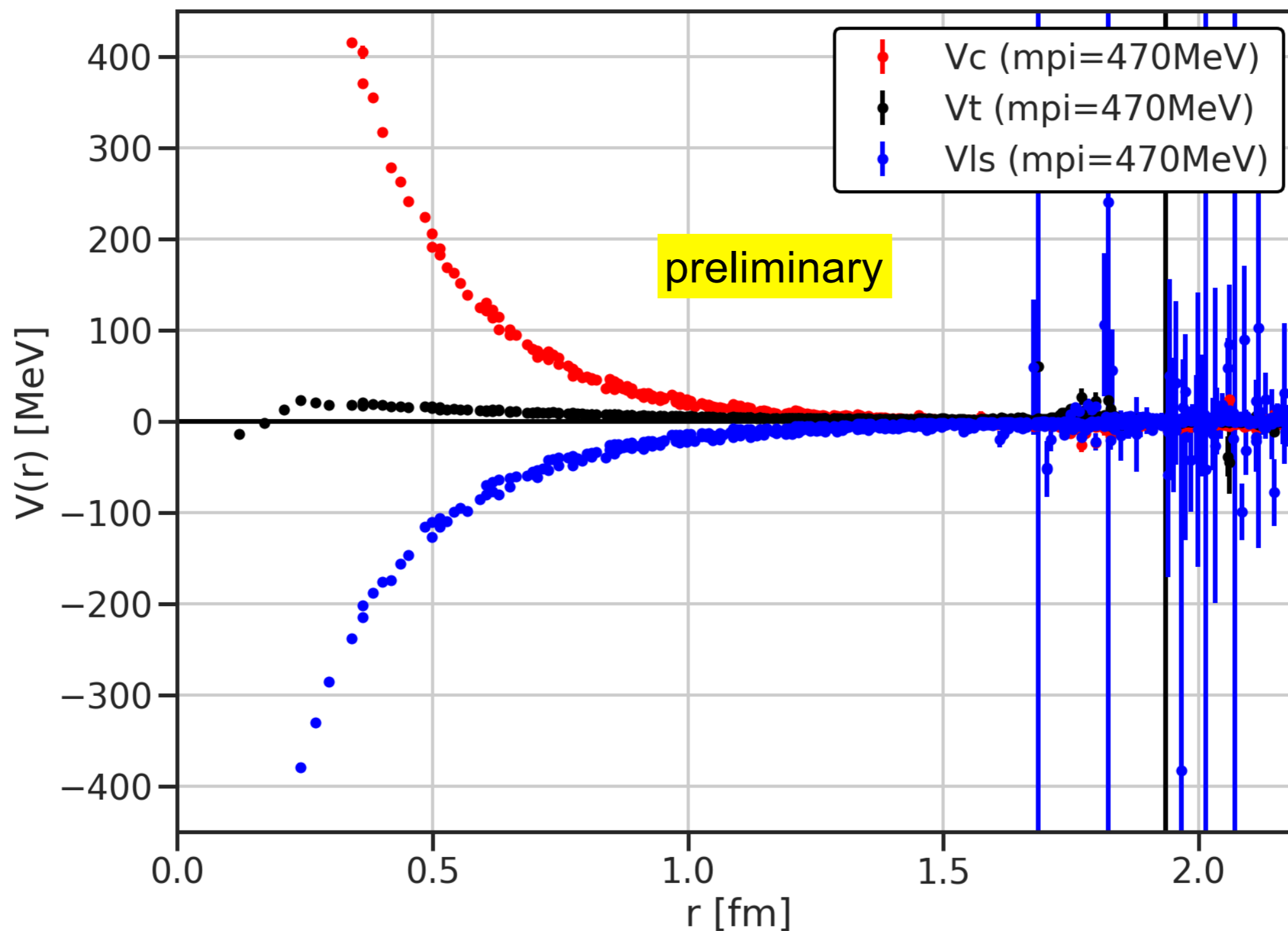
$$F_c^{\mathcal{J}}(r, t) = \langle R^{\mathcal{J}}(\mathbf{r}, t), R^{\mathcal{J}}(\mathbf{r}, t) \rangle \quad F_T^{\mathcal{J}}(r, t) = \langle R^{\mathcal{J}}(\mathbf{r}, t), S_{12}R^{\mathcal{J}}(\mathbf{r}, t) \rangle$$

$$F_{LS}^{\mathcal{J}}(r, t) = \langle R^{\mathcal{J}}(\mathbf{r}, t), (\mathbf{L} \cdot \mathbf{S})R^{\mathcal{J}}(\mathbf{r}, t) \rangle$$

$$K^{\mathcal{J}}(r, t) = \left\langle R^{\mathcal{J}}(\mathbf{r}, t), \left(\frac{\nabla^2}{2m} - \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{4m} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) R^{\mathcal{J}}(\mathbf{r}, t) \right\rangle$$

$S=I=1$ (P波)のポテンシャル ($m_\pi=470\text{MeV}$)

赤：中心力 黒：テンソル力 青：LS力

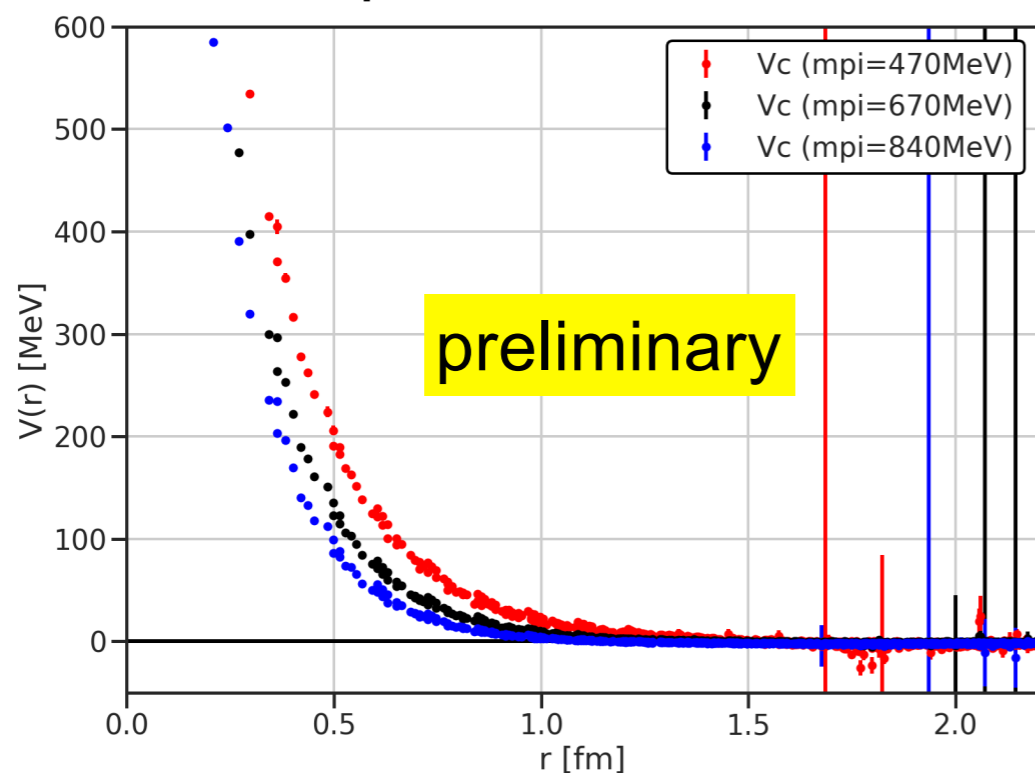


3P_0 , 3P_1 , 3P_2 チャンネル ($m_\pi=470\text{MeV}$)

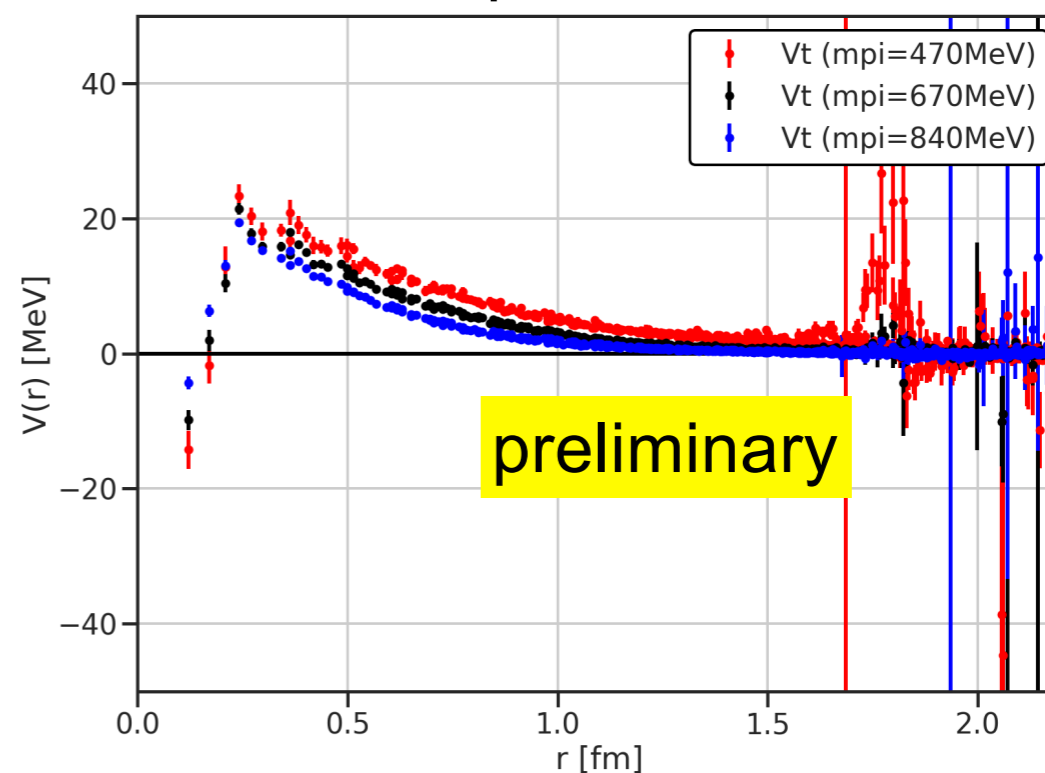
青 : 3P_0 緑 : 3P_1 赤 : 3P_2 (3F_2 との結合項は無視)



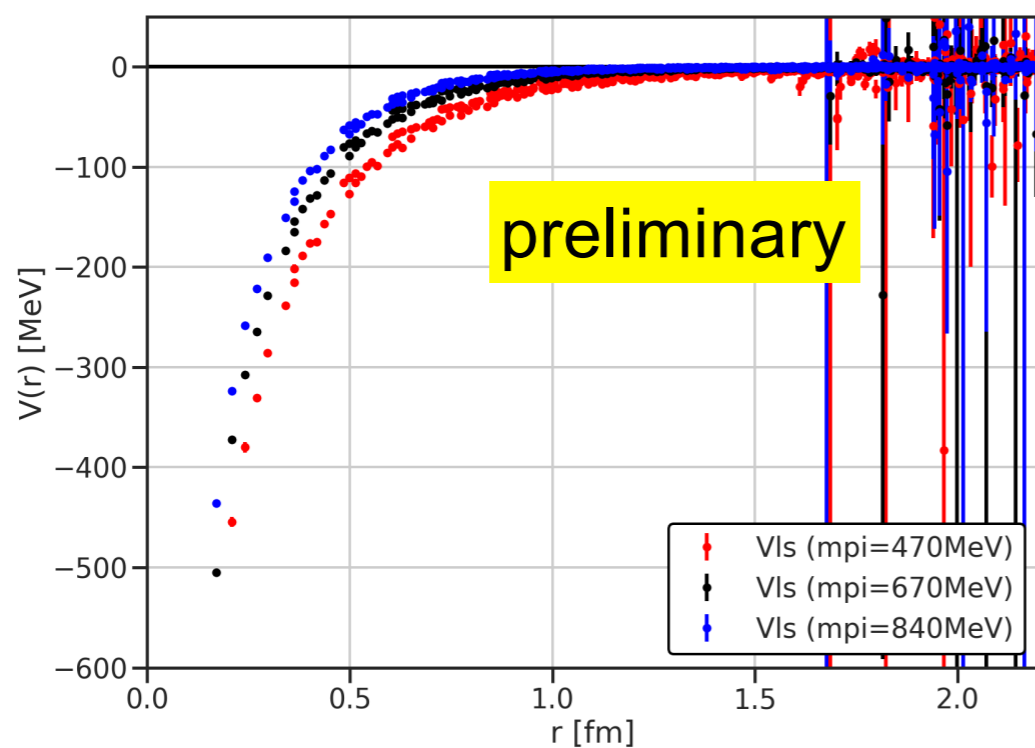
中心力 (mpi=470,670,840 MeV)



テンソル力 (mpi=470,670,840 MeV)

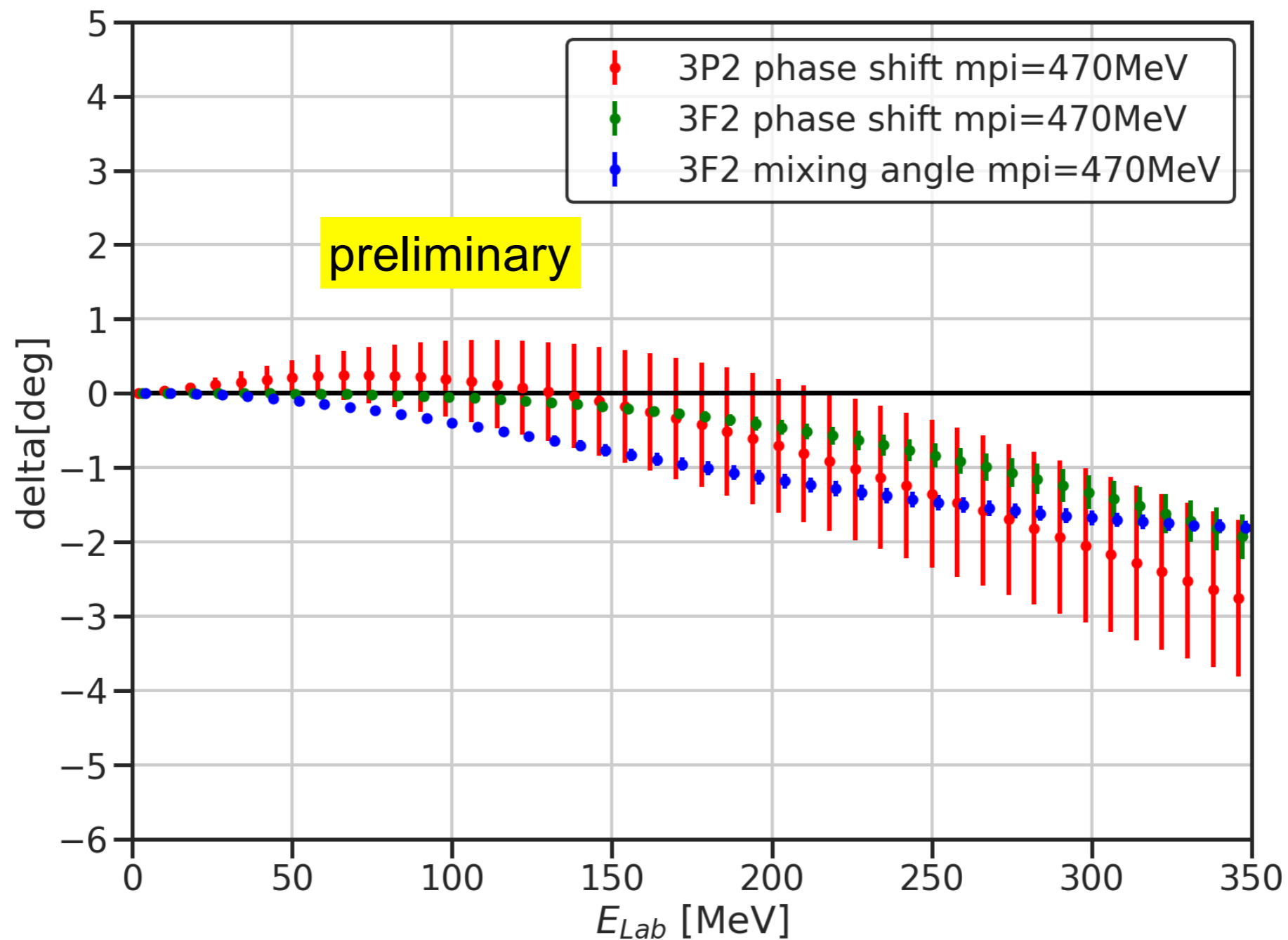


LS力 (mpi=470,670,840 MeV)

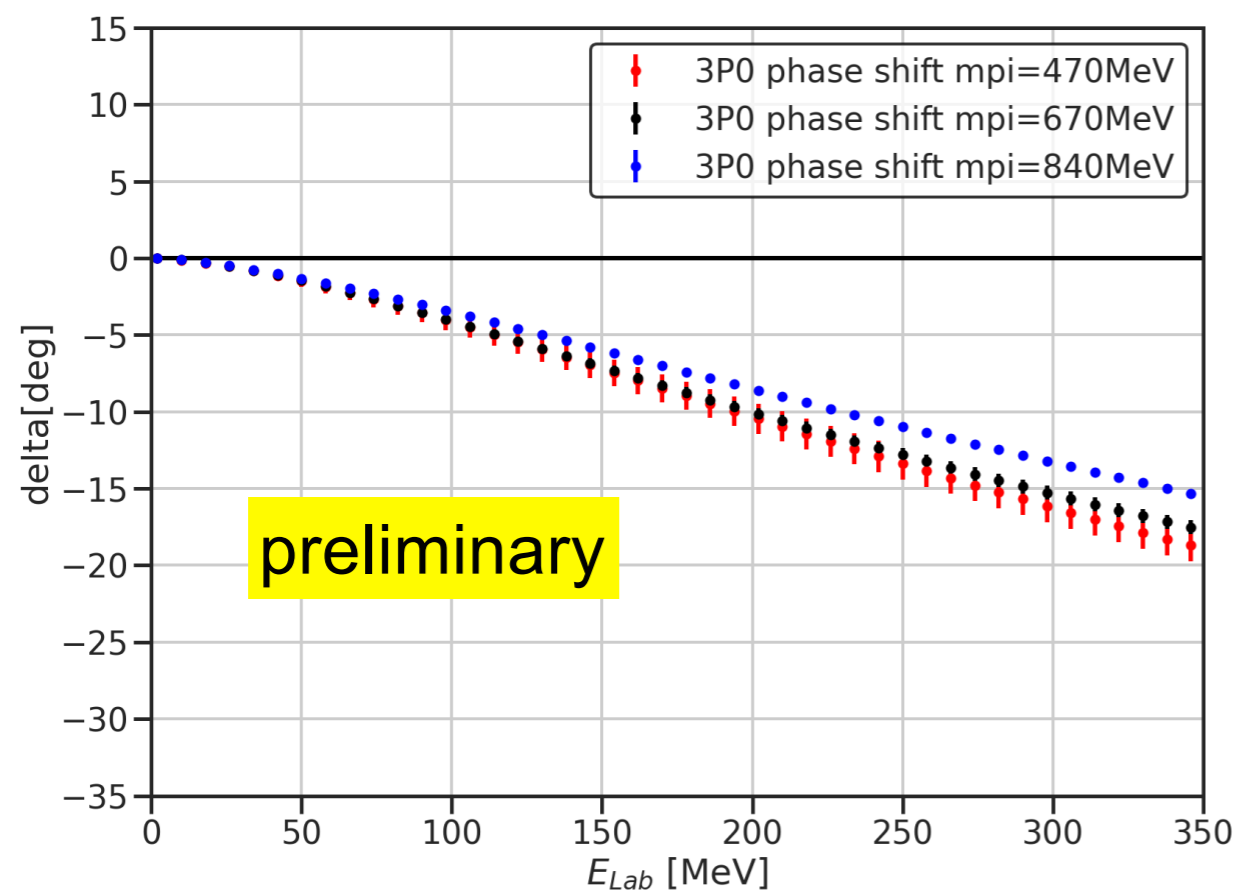


3P2+3F2 物理量 (チャンネル結合込み, $m_\pi=470\text{MeV}$)

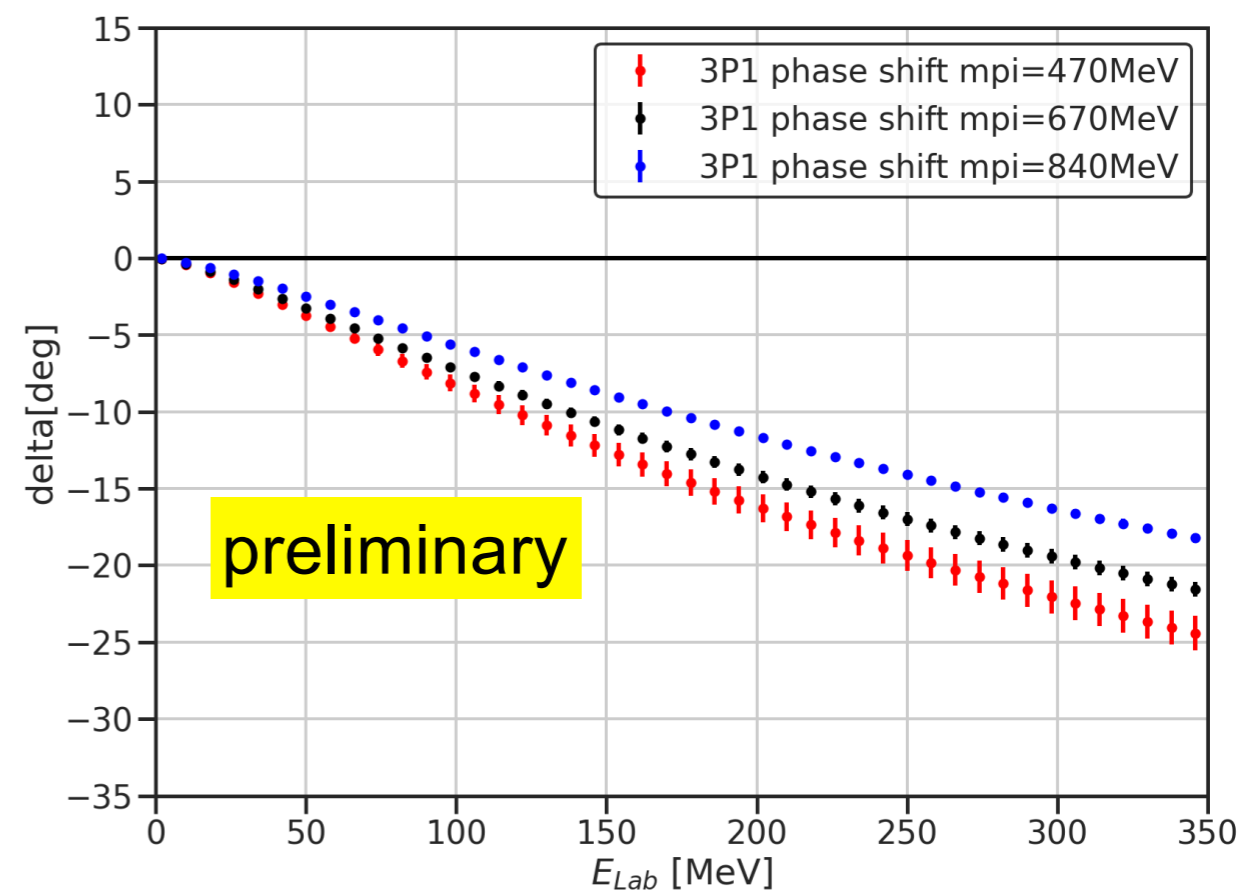
赤 : 3P_2 位相差 緑 : 3F_2 位相差 青 : mixing angle



3P0

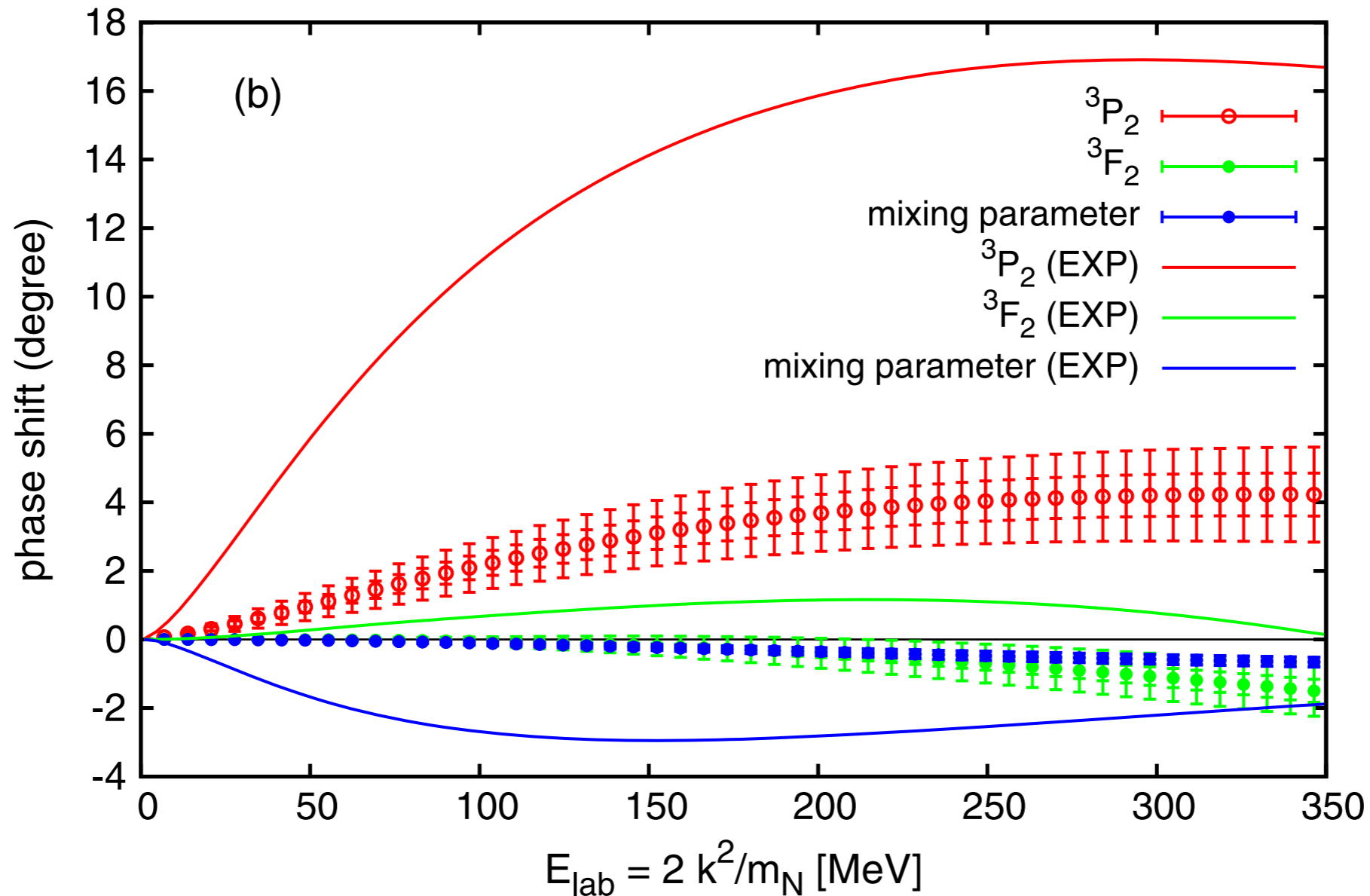


3P1



Murano-Ishii *et al.*(2014)

- ・ (実験値よりは弱い) 3P_2 チャンネルが引力的：本研究では斥力
- ・ 体積 $16^3 \times 32$, $m_\pi=1133$ MeV：格子が小さくてクォークは重い
- ・ 「運動量0の2q+運動量 $\neq 0$ の1q」の核子演算子：非物理的(?)



- ・ HAL QCD法とfLapH法を組み合わせることでNN P波ポテンシャルを計算した
- ・ 我々の結果は、村野-石井(2014)の結果と訂正的に一致
しかしLS力はやや弱くなり、実験値から遠ざかる方向に動いている？