

構成粒子の運動量分布に基づく ポテンシャルサイズの推定

河村英祐, 村上耕太郎, 慈道大介

東京科学大学

February 16, 2026

1. Introduction

2. 構造をポテンシャルで

3. ポテンシャルを運動量で

4. Summary

5. バックアップスライド

6. 運動量を実験的に

1. Introduction

1.1 エキゾチックハドロンとは

1.2 $\bar{K}NNN$ 原子核

1.3 エキゾチック状態の構造を知りたい

1.4 提案と構成

1.5 実験的に運動量分布を測る

通常ハドロン

- ・ クォーク複合状態
- ・ $q\bar{q}$ 状態 → 中間子
- ・ qqq 状態 → バリオン

通常原子核

- ・ 核子 (バリオン) 複合状態
- ・ クォークの自由度は見えない。

エキゾチックハドロン

- ・ $q\bar{q}, qqq$ 状態でないハドロン
- ・ ハドロン複合状態/クォーク複合状態が混ざっている？
- ・ 例:
 - ・ $\Lambda(1405) \cdots \bar{K}N$
 - ・ $\chi_{c1}(3872) \cdots D^0 \bar{D}^{*0}$

あるエキゾチックハドロンにおいて、

ハドロン複合状態/クォーク複合状態のどちらが支配的なのか？

$\bar{K}NNN$ 原子核

\bar{K} が束縛されたエキゾチックな原子核

- $\bar{K}N(\Lambda(1405)), \bar{K}NN$ の束縛状態が実験的に確認
 - $\bar{K}NNN$ 生成実験が予定 (E80)
 - \bar{K} -nucleus 相互作用
 - 強い引力
 - 現象論的にポテンシャルを計算すると、ポテンシャルの深さが $m_{\bar{K}}$ の $\frac{1}{2} \sim \frac{1}{3}$ くらいまで深くなる。[1]
- [1]C.J. Batty, E. Friedman, A. Gal, Physics Reports, Volume 287, Issue 5, 1997,
- コンパクトな構造？
 - 強い引力 → 波動関数が広がらない
 - 構成ハドロン同士が重なる？

「エキゾチック状態」

- ・ エキゾチックハドロン
- ・ “エキゾチック原子核”

問い

一般的に、エキゾチック状態の構造をどの様に調べるのか。

既存のアイデアとして、compositeness (バックアップ 1) がある。

- ・ 実験的に決定する方法が確立していない。

compositeness とは異なる方法で、複合状態の構造を分類する。

- ・ 実験的にも確認できる。
- ・ 状態の詳細に依存しない。

構成粒子の運動量分布から状態の構造を分類できると提案

提案

構成粒子の運動量分布から状態の構造を推定できる。

- ・ 提案 1:
エキゾチック状態の構造 ← ポテンシャルのサイズ
- ・ 提案 2:
ポテンシャルのサイズ ← 構成粒子の運動量分布

本講演は 2 つの提案で構成

先行研究: 実験的に構成粒子の運動量分布を測る方法 (次ページ)

実験的に運動量分布を測る方法

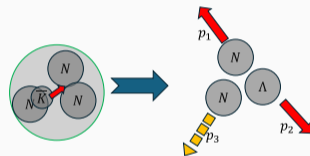
1. Decay process: $\bar{K}NNN \rightarrow \Lambda + N + N$

• $\bar{K}NN \rightarrow \Lambda + N$

• 残った N は spectator として振る舞う。

2. $\bar{K}NNN$ 内部の運動量分布を取り出せる。[2]

[2]: P. Kienle, Y. Akaishi, and T. Yamazaki. Phys. Lett., B632:187-191, 2006



1. Introduction

2. 構造をポテンシャルで

3. ポテンシャルを運動量で

4. Summary

5. バックアップスライド

6. 運動量を実験的に

2. 構造をポテンシャルで

2.1 平均場ポテンシャル

2.2 平均場ポテンシャルをエキゾチック状態に適用

2.3 平均場ポテンシャルサイズによる構造推定

2.4 平均場ポテンシャルサイズ vs 波動関数の広がり

複合粒子系内部では、構成粒子同士が相互作用をしている。

平均場ポテンシャル

束縛状態の複合粒子系内部のある1つの粒子に注目する。

その粒子は、他の粒子となんらかの相互作用をしている。それを、その粒子が、1体のポテンシャルに束縛しているとみなす。

原子核では Woods-Saxon ポテンシャルが用いられる。

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp\left[\frac{r-R}{a}\right]}, \quad R = r_0 A^{\frac{1}{3}} \quad (1)$$

R : ポテンシャル半径, a : diffuseness

原子核分野でよく用いられる独立粒子描像は、平均場ポテンシャルに仮定を足したものの。

- ・ すべての核子は、同じポテンシャルを感じる。

平均場ポテンシャル任意の複合粒子系に適用する。

2つの視点で見た相互作用の距離

- R_{pure} : 構成粒子同士の純粋な (2 体) 相互作用の距離
- R_{mean} : 1 体の平均場ポテンシャルの半径

原子核の場合

$$R_{\text{pure}} = R_{\text{核力}} \sim \frac{1}{m_{\pi}}, \quad R_{\text{mean}} = R_{\text{Woods-Saxon}} = r_0 A^{\frac{1}{3}} \quad (2)$$

平均場ポテンシャルの大きさは、系内部の相互作用の距離の影響を反映する。

- 少数粒子系: $R_{\text{pure}} \sim R_{\text{mean}}$
- 多粒子系: $R_{\text{pure}} \leq R_{\text{mean}}$

複合状態の構造を平均場ポテンシャルサイズで分類する。

複合状態の構造を構成粒子同士の相互作用で分類する。

- ・ クォーク複合状態 → クォーク的な相互作用
- ・ ハドロン複合状態 → ハドロンの相互作用

構成粒子同士の相互作用を平均場ポテンシャルの大きさに判別する。

- ・ クォーク的な相互作用: $R_{\text{mean}} \sim R_{\text{confinement}} < 1\text{fm}$
- ・ ハドロンの相互作用: $R_{\text{mean}} \sim R_{\text{nucleus}} \sim r_0 A^{\frac{1}{3}} > 1\text{fm}$

純粋な相互作用の物理的背景には注目しない。

- ・ 交換する粒子が何かなど

R_{mean} のみで判別できるところでは考える。

測りたいのは波動関数の広がりではない。

束縛エネルギーが小さいと、波動関数はポテンシャルの形状に依存せずに、束縛エネルギーに依存して広がる。

⇒ 束縛エネルギーは相互作用の距離を反映するとは限らない。

例: ハロー中性子原子核

- ・ ポテンシャルサイズ ~ 中心核サイズ
- ・ 波動関数の広がり ~ ハローサイズ

クォーク的な相互作用が主体であっても、波動関数の広がりは大きくなる可能性がある。

ポテンシャルの半径でなら分類できる。

運動量分布によってポテンシャル半径を得られると提案。

1. Introduction

2. 構造をポテンシャルで

3. **ポテンシャルを運動量で**

4. Summary

5. バックアップスライド

6. 運動量を実験的に

3. **ポテンシャルを運動量で**

3.1 方針/モデルの定義

3.2 束縛の深さの定義

3.3 r_p の定義/方針

3.4 解析解

3.5 深い束縛状態

3.6 浅い束縛状態

3.7 なぜ $\sqrt{\langle p^2 \rangle}$ が良いのか

3.8 ポテンシャルの形状依存性

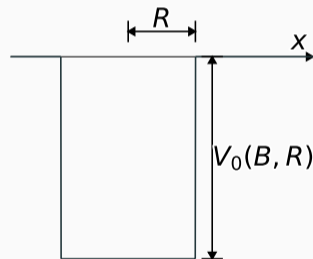
3.9 数値的な具体例

3. ポテンシャルを運動量で - 1. 方針/モデルの定義

- ・ 運動量分布を示す物理量として、 $\sqrt{\langle p^2 \rangle}$ を計算。
- ・ $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ と比較して、 $\sqrt{\langle p^2 \rangle}$ は R を推定するのに優れていることを示す。
- ・ ポテンシャルの形状依存性についても少しだけ議論する。

3次元井戸型ポテンシャル

- ・ 実ポテンシャル
- ・ 0s 軌道
- ・ 解析解
- ・ B, R を動かす。



- ・ ポテンシャルの深さ V_0 は束縛エネルギー B とポテンシャル半径 R によって与えられる。

束縛の深いときと浅いときで、 $\sqrt{\langle p^2 \rangle}$, R の関係を調べる。

束縛の深さを示す無次元パラメータとして ϱR を用いる。

$$\varrho R \stackrel{\text{def}}{:=} \sqrt{\frac{2mB}{\hbar^2}} R, \quad 0 < \varrho R < \infty \quad (3)$$

- $\varrho R \ll 1$: 浅い束縛状態
- $1 \ll \varrho R$: 深い束縛状態
- $\varrho R = 1 \Leftrightarrow (m, B, R) = (1 \text{ GeV}/c^2, 5 \text{ MeV}, 2 \text{ fm})$
- ϱR を用いることで、 $\varrho(B), R$ をフリーパラメータとする。
 - B/V_0 は ϱR と単調増加の関係にある (バックアップ (3))。

r_p の定義

$$r_p := \frac{3}{2} \frac{\hbar}{\sqrt{\langle p^2 \rangle}} \quad (4)$$

運動量を長さに換算 $\rightarrow \sqrt{\langle p^2 \rangle}$ を $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ と長さスケールで比較。

$\frac{3}{2}$ の意味 (バックアップ 2)

$\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ と比較して、 r_p は R を推定するのに優れていることを示す。

- ・ 解析解があれば R を求めることはできる。
- ・ 極限をとったときの近似解を見る。
- ・ r_p の方がより R の情報を反映する。

解析解: すべての物理量を $\varrho(B), R$ の関数で表せる。

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\frac{R^2}{1 + \frac{1}{\varrho R}} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\varrho R} + \frac{1}{\varrho^2 R^2} + \frac{1}{2\varrho^3 R^3} - \frac{1}{2\kappa^2 R^2} - \frac{1}{2\kappa^2 R^2} \frac{1}{\varrho R} \right)} \quad (5a)$$

$$r_p = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\varrho R}}{\kappa^2}}, \quad \sqrt{\langle p^2 \rangle} = \sqrt{\frac{\hbar^2 \kappa^2}{1 + \frac{1}{\varrho R}}} \quad (5b)$$

$$\varrho R \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{2mB}{\hbar^2}} R, \quad 0 < \varrho R < \infty \quad (5c)$$

$$\kappa R \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{2m(-B + V_0(B, R))}{\hbar^2}} R \quad \frac{\pi}{2} < \kappa R < \pi \quad (5d)$$

$$\varrho R = -\kappa R \cot \kappa R \text{(境界条件)} \quad (5e)$$

深い束縛状態の近似解: 解析解を $\frac{1}{\rho R}$ で展開。

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2} R \left(1 + \frac{1}{\rho R} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho^2 R^2}\right) \right)} \quad (6a)$$

$$r_p = \frac{3}{2\pi} R \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1}{\rho R} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho^2 R^2}\right) \right) \quad (6b)$$

$\sqrt{\langle r^2 \rangle}, r_p$ ともに、 R に leading に依存

不確定性積が最小に近づくから

- ・ 波動関数がポテンシャル半径内に収まる。

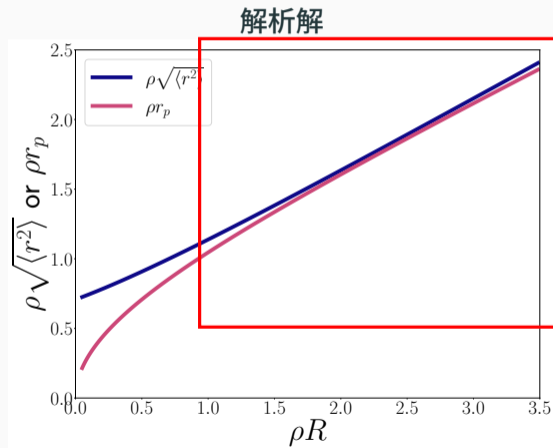
R と $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$, r_p の関係を表した図。

深い束縛状態に注目 (赤枠, $\rho R \gg 1$)

ρR が増加したとき

- $\rho\sqrt{\langle r^2 \rangle}$: ρR に対して線形に変化
- ρr_p : ρR に対して線形に変化
- ρr_p と $\rho\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ の値が近づく

$\rho\sqrt{\langle r^2 \rangle}$, ρr_p が同程度にポテンシャルの情報を反映



浅い束縛状態の近似解: 解析解を ϱR で展開。

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}\varrho} \left[1 + \frac{1}{2}\varrho R + \mathcal{O}(\varrho^2 R^2) \right] \quad (7a)$$

$$r_p = \frac{3}{\pi} \sqrt{\frac{R}{\varrho}} \left(1 - \left(\frac{4}{\pi^2} - \frac{1}{2} \right) \varrho R + \mathcal{O}(\varrho^2 R^2) \right) \quad (7b)$$

$\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ は最低次の項が R に依存しない。

→ ポテンシャル半径に依存せずに波動関数が広がる。

r_p は最低次の項が R に依存する。

→ 束縛が浅くても関係が無くならない。

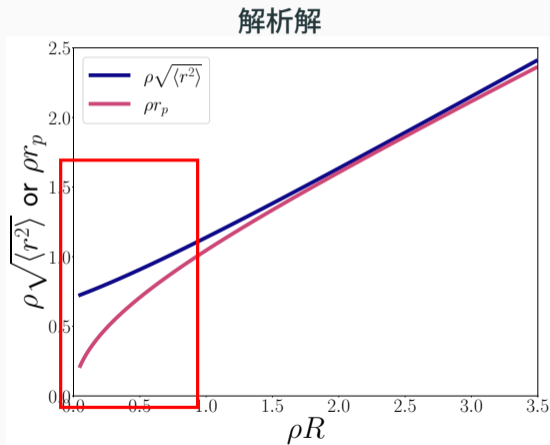
R と $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$, r_p の関係を表した図。

浅い束縛状態に注目 (赤枠, $\rho R \ll 1$)

ρR が減少したとき

- $\rho\sqrt{\langle r^2 \rangle}$: 有限の値に留まる
- ρr_p : 0 まで小さくなる

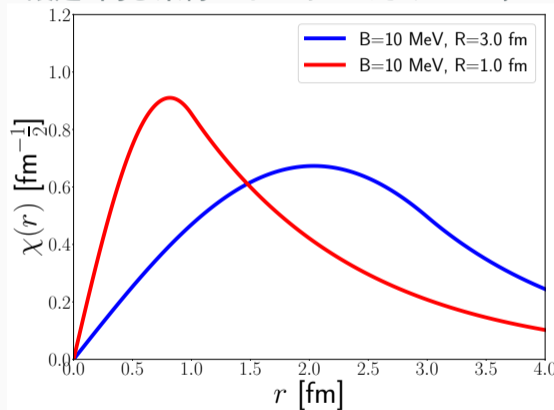
ρr_p がポテンシャルの情報を反映



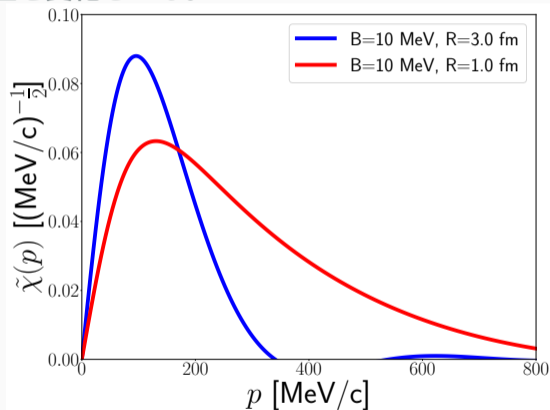
3. ポテンシャルを運動量で - 7. なぜ $\sqrt{\langle p^2 \rangle}$ が良いのか

なぜ $\sqrt{\langle p^2 \rangle}$ が良い指標なのかについて考える。

設定: 同じ束縛エネルギーでポテンシャル半径を変化させる。



R 小 \Rightarrow 実空間のポテンシャルの部分で波動関数が急激に変化する。

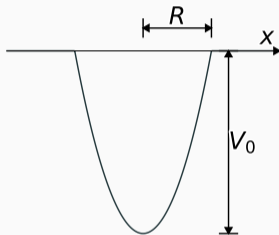


R 小 \Rightarrow 高運動量成分が現れる。
 \Rightarrow $\sqrt{\langle p^2 \rangle}$ が大きくなる。

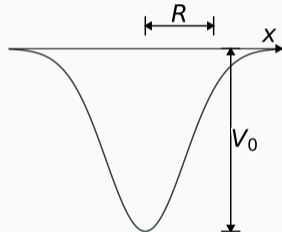
3. ポテンシャルを運動量で - 8. ポテンシャルの形状依存性

ポテンシャルの形状依存性を見るために、別の形状のポテンシャルについても同様に計算する。

Bowl-Shaped Potential



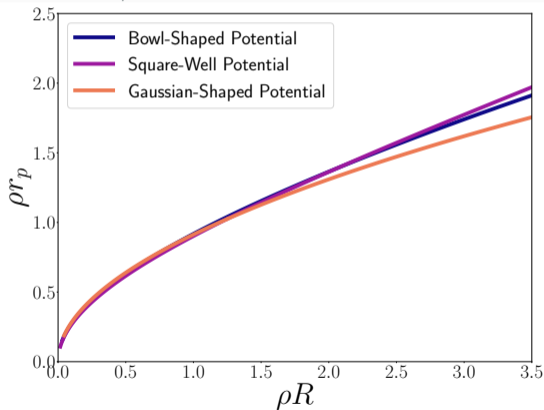
Gaussian-Shaped Potential



それぞれ、調和振動子と関係の強いポテンシャル。 R は別々に定義(バックアップ6)。

ポテンシャルの形状を変更しても、

$\rho R - \rho r_p$ の関係は大きくは変わらない。



ポテンシャルの形状を変更しても、概ね同じ関係を示した。

数値的な 具体例を見る。

- ・ 実験的に得られる物理量から R を推定する。

- ・ $m, B, r_p \rightarrow R$

- ・ 解析解を使って計算

Calculation targets:

- ・ 既存のデータ: 重陽子
- ・ 期待されるデータ: $\bar{K}NNN$ 実験で得られそうな値

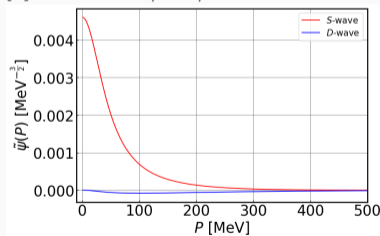
井戸型ポテンシャル (0s のみ) に当てはめる:
(赤三角)

$$\Rightarrow R = 1.44\text{fm} \quad (8)$$

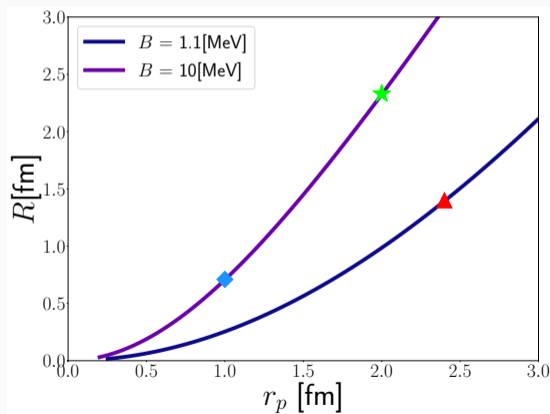
重陽子 (CD-Bonn potential)

- $B = 2.2 \text{ MeV} / 2 \text{ particles}$
- $\sqrt{\langle p^2 \rangle} = 121 \text{ MeV}/c$ [3]
- 2 体系より $R_{\text{mean}} = R_{\text{pure}}$

[3] R. Machleidt, PRC, 2001



\Rightarrow



井戸型ポテンシャル ($0s$ のみ) に当てはめる:
(赤点)

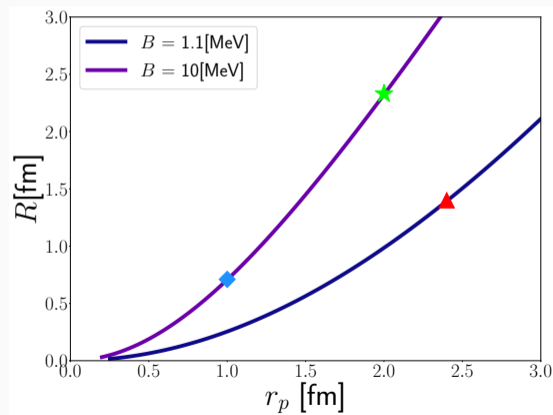
$$\Rightarrow R = 1.44\text{fm} \quad (9)$$

核子同士の相互作用の距離となった。

(cf. $\frac{1}{\mu} \sim 1.45\text{fm}$)

- ・ 重陽子はハドロン複合系
- ・ この結果は以下のような系統誤差を含む。
 - ・ ポテンシャルの形状依存性
 - ・ 独立粒子描像の精度

運動量から相互作用の距離を推定する有効性が示された。



$\bar{K}NNN$ 実験で期待されるデータ

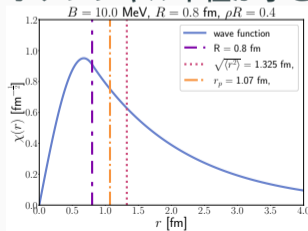
- ・ 共通: $B \sim 10 \text{ MeV}$, $m = 1 \text{ GeV}/c^2$

$$\sqrt{\langle p^2 \rangle} = 300 \text{ MeV}/c$$



$$R \sim 0.8 \text{ fm}$$

→ ポテンシャル半径が小さい

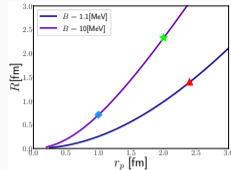
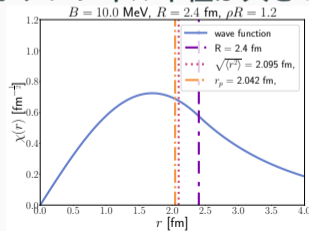


$$\sqrt{\langle p^2 \rangle} = 150 \text{ MeV}/c$$



$$R \sim 2.4 \text{ fm}$$

ポテンシャル半径が大きい



4. Summary

1. Introduction

2. 構造をポテンシャルで

3. ポテンシャルを運動量で

4. Summary

5. バックアップスライド

6. 運動量を実験的に

4. Summary

まとめ

- ・ ポテンシャルのサイズを調べることで、エキゾチック状態の構造が分かる。
- ・ 運動量分布を測ることで、ポテンシャルサイズを調べることができる。
- ・ 構成粒子の運動量分布が実験的に測られることを期待する。

展望

- ・ より多くの情報を運動量分布から得られないか
 - ・ $\sqrt[4]{\langle p^4 \rangle}$
- ・ ポテンシャルの形状依存性を調べる。
 - ・ 斥力, 複素
- ・ 実際の系と比較
 - ・ $\bar{K}NNN$ 原子核, ハロー核 (ベンチマーク)

1. Introduction

2. 構造をポテンシャルで

3. ポテンシャルを運動量で

4. Summary

5. **バックアップスライド**

6. 運動量を実験的に

5. **バックアップスライド**

5.1 compositeness

5.2 不確定性原理との関係

5.3 束縛の深さ

5.4 無限に浅い極限

5.5 解析解と近似解のずれ

5.6 Schrödinger 方程式

既存のアイデアとして、複合性 (compositeness) がある。

ある状態を、2 種類に分けて考える。

- ・ (ハドロン) 複合状態 (composite state): ハドロン同士が束縛 (既知)
- ・ その他の状態 (elementary state): ハドロンではないものによって構成された状態 (クォークでできた状態) を想定

系の状態は、その重ね合わせであると考える。

$$|\text{state}\rangle = \sqrt{X}|\text{composite}\rangle + \sqrt{Z}|\text{elementary}\rangle \quad (10)$$

- ・ 観測量から決定的に compositeness を定める方法が存在しない。

r_p の物理的意味

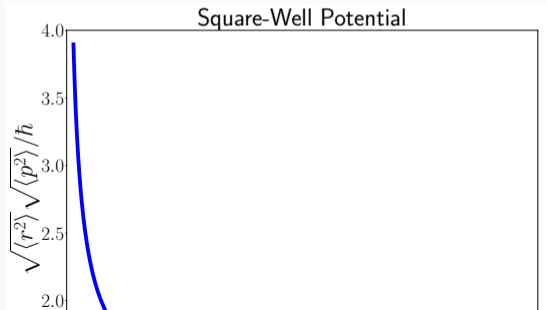
- 3/2 は Heisenberg の不確定性関係から
- 不確定性関係から、常に $\sqrt{\langle r^2 \rangle} \geq r_p$ が成り立つ。
- $\sqrt{\langle r^2 \rangle} \simeq r_p \Rightarrow$ 不確定性積が小さい。

Q. $\sqrt{\langle p^2 \rangle}$ と R の関係を不確定性関係から調べるのか？

A. 関連はあるが、自明ではない。

Heisenberg の不確定性原理

$$\frac{\sqrt{\langle r^2 \rangle} \sqrt{\langle p^2 \rangle}}{\hbar} \geq \frac{3}{2} \text{ (3次元)} \quad (11)$$



束縛の深さを ρR で記述。

$$\rho R = \sqrt{\frac{2mB}{\hbar^2}} R \quad (12)$$

ρR と $\frac{B}{V_0}$ は単調増加の関係。

$$\begin{aligned} \frac{B}{V_0} &= \frac{B}{-B + V_0 + B} = \frac{\rho^2 R^2}{\kappa^2 R^2 + \rho^2 R^2} = \frac{\kappa^2 R^2 \cot^2 \kappa R}{\kappa^2 R^2 + \kappa^2 R^2 \cot^2 \kappa R} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 \kappa R}, \quad \kappa R : -\kappa R \cot \kappa R = \rho R \end{aligned} \quad (13)$$

束縛エネルギーを固定し、ポテンシャル半径を無限に小さくする。

$$\varrho : \text{fix}, R \rightarrow 0 \quad (14)$$

運動量が無限に

$$\sqrt{\langle p^2 \rangle} \propto \sqrt{\frac{\hbar^2 \varrho}{R}} \rightarrow \infty \quad (15)$$

ポテンシャル内部に存在する確率=0

$$\int_0^R \chi^2(r) dr \rightarrow 0 \quad (16)$$

ポテンシャル内部の波動関数が $\sqrt{\langle p^2 \rangle}$ に与える影響=1

$$\frac{\int_0^R \chi \hat{p}^2 \chi dr}{\int_0^\infty \chi \hat{p}^2 \chi dr} \rightarrow 1 \quad (17)$$

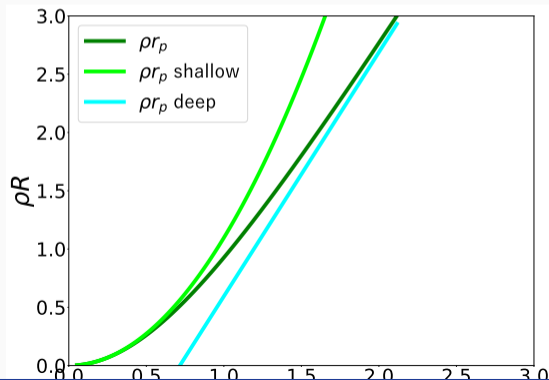
それぞれの近似解

$$R = \frac{\pi^2}{9} \varrho r_p^2 + r_p \mathcal{O}(\varrho^3 r_p^3) \quad (18a)$$

$$R = \frac{2\pi}{3} r_p - \frac{3}{2\varrho} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varrho r_p}\right) \right) \quad (18b)$$

運動量からポテンシャルを測るので、グラフの軸を反転した。

- ・ 縦方向の幅が運動量からポテンシャル半径を測るときのずれ。
- ・ 近似解は上下に押さえられる。
- ・ $\varrho r_p = 1$ 程度で深い/浅いが変わる。



井戸型ポテンシャル

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - V_0 \theta(R-r) \right] \chi(r) = -B\chi(r) \quad (19a)$$

Bowl-Shaped potential

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - V_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \theta(R-r) \right] \chi(r) = -B\chi(r) \quad (19b)$$

Gaussian potential

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - V_0 e^{-\frac{3}{2} \frac{r^2}{R^2}} \right] \chi(r) = -B\chi(r) \quad (19c)$$

6. 運動量を実験的に

1. Introduction

2. 構造をポテンシャルで

3. ポテンシャルを運動量で

4. Summary

5. バックアップスライド

6. 運動量を実験的に

6. 運動量を実験的に

6.1 Kienle model

6.2 Kienle model の一般化

6.3 収率から調べる

1. Decay process: $\bar{K}NNN \rightarrow \Lambda + N + N$

• $\bar{K}NN \rightarrow \Lambda + N$

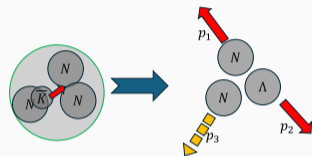
• 残った N は spectator として振る舞う。

2. 仮定: spectator の運動量は、崩壊の前後で変化しない。

3. 仮定: 終状態相互作用を無視

4. $\bar{K}NNN$ 内部の運動量分布を取り出せる。[1]

[1]: P. Kienle, Y. Akaishi, and T. Yamazaki. Phys. Lett., B632:187-191, 2006



2つの要件を満たせば、構成粒子の運動量を推定できる可能性がある。

- ・ 3体崩壊

- 2体崩壊では、エネルギー/運動量保存則から構成粒子の運動量の情報が消える。

- ・ 強い力で崩壊

- 弱い力の崩壊では十分な統計量が得られない。

- ・ 終状態相互作用を無視できる。

始状態の運動量が終状態の運動量にそのまま移行すると近似

- ・ 目的の複合系 ($\bar{K}NNN$) の収率を始状態の運動量ごとに計測
- ・ 終状態相互作用を無視
- ・ 始状態の運動量と終状態の (複合系内部の) 運動量が等しいときに、最も収率が良い？

理論的な調査はまだしていない。