

エンタングルメント抑制を用いた $\Omega\Omega$ 散乱

T.-R. Hu, K. Sone, F.-K. Guo, T. Hyodo and I. Low, Phys. Rev. Res. 7, 043306 (2025),

東京都立大学

曾根克佳

Tao-Ran Hu

Feng-Kun Guo

兵藤哲雄

Ian Low

概要

- NN 散乱における spin-flavor $SU(4)$ 対称性

E. Wigner, PR51, 106 (1937), ..., D.B. Kaplan and M.J. Savage, PLB365, 244 (1996), ...

⇒ $J = 0, 1$ チャンネルの散乱長 : $1/|a_{J=0}| \simeq 1/|a_{J=1}|$

- Large- N_c 極限が $SU(2f)$ 対称性を導く ← 説明の1つ

典型的な長さスケールよりも大きい散乱長 $J = 0, 1$ channels : $|a_{J=0}|, |a_{J=1}| \gg 1\text{fm}$

⇒ 浅いbound $J = 1$ と virtual $J = 0$ 状態

ユニタリー極限に近い？

Large- N_c から大きな散乱長は出ない

Overview

S.R. Beane, D.B. Kaplan, N. Klco, and M.J. Savage, PRL122, 102001 (2019)

3

I. Low, T. Mehen, PRD104, 074014 (2021);

NN 散乱における $SU(4)$ 対称性の新たな説明

⇒ **Entanglement suppression (ES)** 量子情報理論 + 散乱理論

ユニタリー極限の**散乱長**の説明

位相差間の関係

$SU(4)$ だけではない、**創発的対称性**の説明

本研究 : NN 散乱と同様に2チャンネルの同種粒子

⇒ $\Omega\Omega$ 散乱

2つのスピンチャンネル $J = 0, 2$

S. Gongyo, *et al.*, (HAL QCD), PRL120, 212001 (2018)

lattice calculation : $a_{J=0} = 4.6 \text{ fm} \gg 1 \text{ fm}$ **ユニタリー極限?**

目次

1. EPの定式化
2. NN 散乱への応用
3. $\Omega\Omega$ 散乱への応用
4. まとめ

目次

1. EPの定式化
2. NN 散乱への応用
3. $\Omega\Omega$ 散乱への応用
4. まとめ

Entanglement entropy (EE)

Entanglement for bipartite system (2粒子系)

散乱するハドロン2つの間の**量子もつれ(エンタングルメント)**を考える

⇒ EEがエンタングルメントの強さを定量的に測る

線形エントロピー ⇒ 状態 $|\psi\rangle$ のエンタングルメントを測る

$$\mathcal{E}(|\psi\rangle) = \text{Tr}_1 \rho_1 - \text{Tr}_1 \rho_1^2 \quad \begin{array}{l} \text{密度行列: } \rho = |\psi\rangle\langle\psi| \\ \text{縮約密度行列: } \rho_1 = \text{Tr}_2 |\psi\rangle\langle\psi| \end{array}$$

性質 エントロピーは正: $\mathcal{E}(|\psi\rangle) \geq 0$

エントロピーの最大値: $\mathcal{E}(|\psi\rangle) \leq 1 - 1/d$ d : 状態の次元

⇒ スピンが大きいほどエントロピーの最大値は大きくなる

Entanglement entropy (EE)

スピン J (次元: $d = 2J + 1$) をもつ2つのハドロン

$$\text{状態: } |\psi\rangle = \sum_{i,j} \alpha_{ij} |i\rangle \otimes |j\rangle \quad |1\rangle = |J, J_3 = J\rangle \cdots |2J + 1\rangle = |J, J_3 = -J\rangle$$

線形エントロピー

$$\mathcal{E}(|\psi\rangle) = 2 \sum_{i < i', j < j'} |\alpha_{ij}\alpha_{i'j'} - \alpha_{i'j}\alpha_{ij}|^2$$

線形エントロピーの中身: $\alpha_{ij}\alpha_{i'j'} - \alpha_{i'j}\alpha_{ij}$

α_{ij} を成分にもつ行列 M からできる、 2×2 の行列式

行列がseparable: $\alpha_{ij} = u_i v_j$

⇒ $\mathcal{E}(|\psi\rangle) = 0$

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1d} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha_{d1} & & & \alpha_{dd} \end{pmatrix}$$

Entanglement entropy (EE)

EX.) two-qubit 系: スピン 1/2 $|\psi\rangle = \alpha_{11}|\uparrow\uparrow\rangle + \alpha_{12}|\uparrow\downarrow\rangle + \alpha_{21}|\downarrow\uparrow\rangle + \alpha_{22}|\downarrow\downarrow\rangle$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(|\psi\rangle) = 2|\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}|^2$$

・最も強くもつれた状態 **Bell state**: $\mathcal{E}(|\psi\rangle) = 1/2$

$$|\phi^\pm\rangle = (|\uparrow\uparrow\rangle \pm |\downarrow\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$$

$$|\psi^\pm\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle \pm |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2} \quad \leftarrow J_3 = 0$$

・もつれのない状態(エンタングルメントなし)

product state: $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = u_1v_1|\uparrow\uparrow\rangle + u_1v_2|\uparrow\downarrow\rangle + u_2v_1|\downarrow\uparrow\rangle + v_1v_2|\downarrow\downarrow\rangle$

$$\alpha_{11}\alpha_{22} = \alpha_{12}\alpha_{21} = u_1u_2v_1v_2 : \text{separable} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}(|\psi\rangle) = 2|\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}|^2 = 0$$

Entanglement power

Entanglement power (EP) : 演算子(S-matrix)のための指標 $\hat{S}|\psi_{\text{in}}\rangle = |\psi_{\text{out}}\rangle$

P. Zanardi, C. Zalka, L. Faoro, PRA62, 030301 (2000)

⇒ \hat{S} が2粒子の間に量子相関を生成する能力を測る

$$|\psi_{\text{in}}\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \quad \mathcal{E}(|\psi_{\text{out}}\rangle) \geq \mathcal{E}(|\psi_{\text{in}}\rangle) = 0$$

$$\text{EPの定義: } E(\hat{S}) = \overline{\mathcal{E}(\hat{S}|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle)} = \int d\omega_1 d\omega_2 \mathcal{E}(\hat{S}|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle)$$

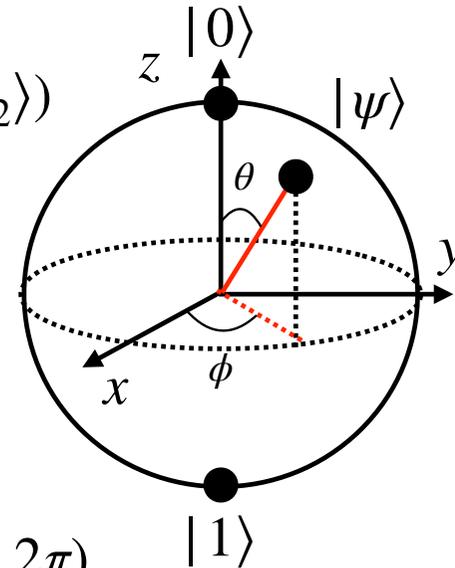
⇒ 全ての始状態(球面上の点)について積分

EX.) スピン 1/2

Bloch 球:

$$|\psi\rangle = (\cos\theta \quad e^{i\phi} \sin\theta)^T$$

$$d\omega = \frac{\sin\theta d\theta d\phi}{4\pi} \quad \theta \in [0, \pi), \quad \phi \in [0, 2\pi)$$



目次

1. EPの定式化
- 2. NN 散乱への応用**
3. $\Omega\Omega$ 散乱への応用
4. まとめ

NN 散乱

低エネルギー NN 散乱(s-wave)

$$\text{核子} : \text{SU}(2)_{\text{spin}} \otimes \text{SU}(2)_{\text{isospin}} \quad \Rightarrow \quad N = \begin{pmatrix} \uparrow \\ \downarrow \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$$

$$\text{既約分解} \quad \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = \underset{\text{A}}{0} \oplus \underset{\text{S}}{1}$$

S-matrix

$$\hat{S} = e^{2i\delta_0} \frac{1 - \sigma_1 \cdot \sigma_2}{4} + e^{2i\delta_1} \frac{3 + \sigma_1 \cdot \sigma_2}{4}$$

σ : スピン空間のパウリ行列
 δ_J : チャンネル J の位相差

スピン空間のみを考慮 \Rightarrow **Fermi-Dirac(FD) 統計**

スピンを決めるとアイソスピンは一意に決まる

NN 散乱への応用

S.R. Beane *et al.*, PRL122, 102001 (2019);

I. Low, T. Mehen, PRD104, 074014 (2021);

$$NN \text{ 散乱のEP : } E(\hat{S}) = \frac{1}{6} \sin^2[2(\delta_0 - \delta_1)] \geq 0$$

$$\text{最小のEP : } E(\hat{S}) = 0$$

$$\Rightarrow |\delta_0 - \delta_1| = 0, \frac{\pi}{2} \quad \text{2つの解のみ}$$

For $|\delta_0 - \delta_1| = 0$

$$\Rightarrow \hat{S} \propto 1 \quad \hat{1} |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \quad \text{Identity}$$

For $|\delta_0 - \delta_1| = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \hat{S} \propto -\frac{1 - \sigma_1 \cdot \sigma_2}{4} + \frac{3 + \sigma_1 \cdot \sigma_2}{4} = \frac{1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2}{2} \quad \text{SWAP}$$

$$\text{SWAP } |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = |\psi_2\rangle \otimes |\psi_1\rangle$$

粒子1と2の交換

NN 散乱における創発的対称性

基礎理論における対称性: $SU(2)_{\text{spin}} \otimes SU(2)_{\text{isospin}}$ $N = \begin{pmatrix} \uparrow \\ \downarrow \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$

The phase shifts δ_0 and δ_1 are independent

創発的な対称性:

For $|\delta_0 - \delta_1| = 0$ \Rightarrow $SU(4)_{\text{spin-isospin}}$

Fundamental representation: $x = (p_{\uparrow} \ p_{\downarrow} \ n_{\uparrow} \ n_{\downarrow})$

For $|\delta_0 - \delta_1| = \frac{\pi}{2}$ \Rightarrow **非相対論的共形対称性:**
ユニタリ一極限 or 相互作用なし

$$|a_0| \rightarrow \infty, a_1 \rightarrow 0$$

T. Mehen *et al.*, PLB474, 145 (2000)

$$\text{or } a_0 \rightarrow 0, |a_1| \rightarrow \infty$$

Entanglement suppression は創発的対称性を導く

目次

1. EPの定式化
2. NV 散乱への応用
- 3. $\Omega\Omega$ 散乱への応用**
4. まとめ

ΩΩ 散乱への応用

Lattice calculation : $a_{J=0} = 4.6 \text{ fm} \gg 1 \text{ fm}$ ユニタリ一極限に近い $\delta_{J=0} \sim \frac{\pi}{2}$

S. Gongyo, *et al.*, (HAL QCD), PRL120, 212001 (2018)

⇒ $J=2$ チャンネルの散乱長について考える

Ω : spin-3/2 baryon

⇒ スピン空間において4成分 : $\Omega = (\uparrow \uparrow \downarrow \downarrow)$ $SU(2)_{\text{spin}} \mathbf{3/2}$

S-matrix $\hat{S} = e^{2i\delta_0} \mathcal{F}_0 + e^{2i\delta_2} \mathcal{F}_2$ \mathcal{F}_i : 射影演算子

スピン対称な状態 $J=1,3$ は **FD 統計** によって禁止される

⇔ ΩΩ : 同種粒子

ΩΩ 散乱への応用

終状態が規格化されていない：

反対称な状態のみに射影される

$$\langle \psi_{\text{out}} | \psi_{\text{out}} \rangle = \langle \psi_{\text{in}} | \hat{S}^\dagger \hat{S} | \psi_{\text{in}} \rangle < 1 \quad J = 1, 3 \text{ がない}$$

$$\Omega\Omega \text{ 散乱のEP : } E(\hat{S}) = \frac{1}{48}(25 - \cos 4(\delta_0 - \delta_2))$$

$$\text{EP の最小値 : } E(\hat{S}) = 1/2 \quad \leftarrow E(\hat{S}) = 0 \text{ は取れない}$$

$$\Rightarrow |\delta_0 - \delta_2| = 0, \frac{\pi}{2}$$

For $|\delta_0 - \delta_2| = 0$, $\hat{S} = \mathcal{I}_0 + \mathcal{I}_2 = \mathcal{A} \quad \Rightarrow \text{SU}(4)_{\text{spin}} \quad (\uparrow \uparrow \downarrow \downarrow) \quad \mathbf{4}$ 基本表現

For $|\delta_0 - \delta_2| = \frac{\pi}{2}$, $\hat{S} = \text{SWAP}_A \quad \Rightarrow$ 非相対論的共形対称性

EEの性質

T. Ichikawa, T. Sasaki and I. Tsutsui, J. Math. Phys. 51, 062202 (2010).

エントロピーが有限になる理由

規格化なし

反対称に射影された状態

$$|\psi^A\rangle = \mathcal{A}|\psi_{in}\rangle = \sum_{i,j} \alpha_{ij}^A |i\rangle |j\rangle$$

$$\alpha_{ij}^A = \frac{u_i v_j - u_j v_i}{2}$$

$i = j$ の状態は消える

行列

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12}^A & \cdots & \alpha_{1d}^A \\ \alpha_{21}^A & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha_{d1}^A & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

線形エントロピー

$$\mathcal{E}(|\psi\rangle) = 2 \sum_{i < i', j < j'} |\alpha_{ij}^A \alpha_{i'j'}^A - \alpha_{i'j}^A \alpha_{ij'}^A|^2$$

必ず、 $|\alpha_{ij}^A \alpha_{ij'}^A|^2$ ($i = j$) の項が残る



線形エントロピー : $\mathcal{E}(\mathcal{A}|\psi_{in}\rangle) = 1/2$

$\Omega\Omega$ 散乱への応用

1 と SWAP 以外の解 : SWAP_A

$$\text{SWAP}_A \propto \mathcal{I}_0 - \mathcal{I}_2$$

以下の状態を定義 :

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |J=2; J_3=0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |J=0; J_3=0\rangle$$

$$|\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |J=2; J_3=0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |J=0; J_3=0\rangle$$

$$\text{SWAP}_A |\alpha\rangle = |\beta\rangle \quad \text{SWAP}_A |\beta\rangle = |\alpha\rangle$$

Lattice QCD との比較 : $a_{J=0} = 4.6 \text{ fm} \gg 1 \text{ fm}$

$\hat{S} \propto \mathcal{A}$ $|a_{J=0}| \sim |a_{J=2}| \gg 1 \text{ fm}$: ユニタリ一極限

$\hat{S} \propto \text{SWAP}_A$ $|a_{J=0}| \gg 1 \text{ fm} \gg |a_{J=2}|$: 相互作用なし

1. EPの定式化
2. NV 散乱への応用
3. $\Omega\Omega$ 散乱への応用
4. まとめ

まとめ

Entanglement suppression の解 $\Rightarrow E(\hat{S}) = 0$

・ NN 散乱

2つの解：

$\hat{S} \propto 1$	\Rightarrow	spin-flavor SU(4) 対称性	$ a_{J=0} \sim a_{J=1} $
$\hat{S} \propto \text{SWAP}$	\Rightarrow	非相対論的共形対称性	$ a_{J=0} \rightarrow \infty, a_{J=1} \rightarrow 0$
			$ a_{J=0} \rightarrow 0, a_{J=1} \rightarrow \infty$

S.R. Beane, D.B. Kaplan, N. Klco, and M.J. Savage, PRL122, 102001 (2019)
I. Low, T. Mehen, PRD104, 074014 (2021)

・ $\Omega\Omega$ 散乱

$$E(\hat{S}) = 1/2$$

$\hat{S} \propto \mathcal{A}$ \Rightarrow スピン SU(4) 対称性 $|a_{J=0}| \sim |a_{J=2}| \gg 1 \text{ fm}$

$\hat{S} \propto \text{SWAP}_A$ \Rightarrow 非相対論的共形対称性 $|a_{J=0}| \gg 1 \text{ fm} \gg |a_{J=2}|$

T.R. Hu, K. Sone, F.K. Guo, T. Hyodo, I. Low, arXiv:2506.08960 [hep-ph] accepted in Phys. Rev. Res.