量子力学 100 周年研究会：量子基礎・量子情報のこれまでとこれから
京都大学基礎物理学研究所，2025 年 9 月 8 日–12 日

量子測定理論の発展：普遍的不確定性原理から量子間主観性定理へ[1]

小澤 正直

名古屋大学・理化学研究所

[1] 2025 年 9 月 10 日発表

Heisenberg の不確定性原理とは何か?

- 定義：２つの物理量 Q, P は，次の関係を満たすとき正準共役であるという.

$$QP - PQ = i\hbar.$$

- Heisenberg の不確定性原理 (Heisenberg 1927)：正準共役な物理量は，Heisenberg の不等式によって表される特徴的な不正確さのもとでしか同時測定ができない.

- Heisenberg の不等式 (Heisenberg 1927, Kennard 1927)：正準共役な物理量 Q, P の同時測定におけるそれぞれの平均誤差 $\varepsilon(Q), \varepsilon(P)$ に対して，次式が成り立つ.

$$\varepsilon(Q)\varepsilon(P) \geq \frac{\hbar}{2}.$$

- Heisenberg の不等式の右辺は，Kennard (1927) によって与えられた．詳しくは後述.

Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik.

Von **W. Heisenberg** in Kopenhagen.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 23. März 1927.)

In der vorliegenden Arbeit werden zunächst exakte Definitionen der Worte: Ort, Geschwindigkeit, Energie usw. (z. B. des Elektrons) aufgestellt, die auch in der Quantenmechanik Gültigkeit behalten, und es wird gezeigt, daß kanonisch konjugierte Größen simultan nur mit einer charakteristischen Ungenauigkeit bestimmt werden können (§ 1). Diese Ungenauigkeit ist der eigentliche Grund für das Auftreten statistischer Zusammenhänge in der Quantenmechanik. Ihre mathematische Formulierung gelingt mittels der Dirac-Jordanschen Theorie (§ 2). Von den so gewonnenen Grundsätzen ausgehend wird gezeigt, wie die makroskopischen Vorgänge aus der Quantenmechanik heraus verstanden werden können (§ 3). Zur Erläuterung der Theorie werden einige besondere Gedankenexperimente diskutiert (§ 4).

Zeitschrift für Physik, *43*, 172–98 (1927)

「正準共役な物理量はある特徴的な不正確さのもとでしか同時に決定することができない。」

I.3 THE PHYSICAL CONTENT OF QUANTUM KINEMATICS AND MECHANICS

WERNER HEISENBERG

translation into English by

John Archibald Wheeler and Wojciech Hubert Zurek

First we define the terms *velocity*, *energy*, etc. (for example, for an electron) which remain valid in quantum mechanics. It is shown that canonically conjugate quantities can be determined simultaneously only with a characteristic indeterminacy (§1). This indeterminacy is the real basis for the occurrence of statistical relations in quantum mechanics. Its mathematical formulation is given by the Dirac-Jordan theory (§2). Starting from the basic principles thus obtained, we show how microscopic processes can be understood by way of quantum mechanics (§3). To illustrate the theory, a few special *gedankenexperiments* are discussed (§4).

Inaccuracyの誤訳

「正準共役な物理量はある特徴的な不確定さのもとでしか同時に決定することができない。」

量子力学の公理 (von Neumann 1932)

- 公理 Q1 (状態と観測可能量). 任意の量子系 S には Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ が対応し， S の（混合）状態 には，$\mathcal{H}$ 上の密度作用素が対応し，（純粋）状態には $\mathcal{H}$ の単位ベクトルが対応し，S の観測可能量には，$\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素が対応する.

- 定義． 部分空間 $\{\psi \in \mathcal{H} \mid X\psi = x\psi\}$ への射影作用素 $P^X(x)$ を実数 x に対する観測可能量 X のスペクトル射影という.

- 公理 Q2 (Born の統計公式). 観測可能量 X を状態 ψ で測定すると，測定値 x の確率分布は次式で与えられる.

$$\Pr\{X = x \| \psi\} \quad = \quad \|P^X(x)\psi\|^2 \quad (x \in \mathrm{R}).$$

- 公理 Q3 (時間発展). Hamiltonian H をもつ孤立系 S が，時刻 t で状態 $\psi(t)$ にあるならば，時刻 $t + \tau$ における状態 $\psi(t + \tau)$ は次式で与えられる.

$$\psi(t + \tau) = e^{-i\tau H/\hbar}\psi(t).$$

- 公理 Q4 (合成系). $\mathcal{H}$ を状態空間とする系 S_1 と $\mathcal{K}$ を状態空間とする系 S_2 の合成系 $\mathrm{S} = \mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2$ の状態空間はテンソル積 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ で与えられ，S_1 の観測可能量 X は S_1 の観測可能量 $X \otimes I$ と同一視され，S_2 の観測可能量 Y は S の観測可能量 $I \otimes Y$ と同一視される.

反復可能性仮説

- 公理 R (反復可能性仮説). 系 S における同一の観測可能量を２回続けて測定すると，２回とも同一の測定値を得る (von Neumann 1932: 邦訳 335 頁).

- 公理 C (崩壊仮説). 系 S の観測可能量 X を測定して，測定値 x を得たならば，測定後の系 S の状態は，固有値 x に対する観測可能量 X の固有状態である (Dirac 1958: p. 36).

- 定理. 公理 R と公理 C は同等である (von Neumann 1932: 邦訳 172–176 頁).

近似的反復可能性仮説

- 公理 AR (近似的反復可能性仮説). 系 S の観測可能量 X を誤差 ε で測定して，測定値 x を得たならば，測定後の系 S の状態は，測定値 x に対する観測可能量 X の ε-近似的固有状態である．すなわち，$\|X\psi - x\psi\| \le \varepsilon$ が成り立つ (Ozawa 2015).

- 公理 AR は，von Neumann (1932) および Heisenberg (1927) で，陰伏的に仮定されている．例えば，

「示さなければならないのは，Q, P が 2 つの正準共役な量であり，Q の値が ε の精度でもって与えられるような（すなわち，誤差の限界 ε の Q 測定後の）状態に系があるとき，P を $\eta = \frac{h}{4\pi\varepsilon}$ よりも高い精度で知ることはできない，あるいは；精度 ε の Q の測定は，P の値に $\eta = \frac{h}{4\pi\varepsilon}$ の不確定さをもちこむはずである，ということである (von Neumann 1932: 邦訳 192 頁).」

「誤差の限界 ε の Q 測定後の状態」と「Q の値が ε の精度でもって与えられるような状態」が同義とされているが，これは，誤差 ε の Q 測定によって Q の標準偏差が ε に変化すると読まれるので，近似的反復可能性仮説を仮定していると考えられる．

不確定性原理：Heisenbergのオリジナルな定式化

- **定理 (Kennard の不等式 (Kennard 1927)).**
  (公理 Q1–Q2 の下で) 正準共役な観測可能量 Q, P の標準偏差 $\sigma(Q), \sigma(P)$ は次式を満たす.

$$\sigma(Q)\sigma(P) \geq \frac{\hbar}{2}.$$

- **定理 (Heisenberg の不確定性原理 (Heisenberg 1927)).**
  (公理 Q1–Q2 および公理 AR の下で) 正準共役な観測可能量 Q, P は，それぞれの誤差 $\varepsilon(Q), \varepsilon(P)$ が次の関係を満たす限りにおいてのみ同時測定が可能である.

$$\varepsilon(Q)\varepsilon(P) \geq \frac{\hbar}{2}.$$

不確定性原理：Heisenbergの証明

- 証明．Q と P を誤差 $\varepsilon(Q), \varepsilon(P)$ で同時測定し，測定値 q, p を得た直後の状態を ψ とする．公理 AR と標準偏差の性質から，次の関係を得る．

$$\varepsilon(Q) \geq \|Q\psi - q\psi\| \geq \|Q\psi - \langle Q\rangle\psi\| = \sigma(Q),$$
$$\varepsilon(P) \geq \|P\psi - p\psi\| \geq \|P\psi - \langle P\rangle\psi\| = \sigma(P).$$

これらを合わせると，Kennard の不等式から次の関係が導かれる．

$$\varepsilon(Q)\varepsilon(P) \geq \sigma(Q)\sigma(P) \geq \frac{\hbar}{2}.$$

(Heisenberg 1927, Ozawa 2015)

測定-擾乱関係式

- 測定誤差-擾乱同等性原理：状態 ρ で物理量 A を誤差 $\varepsilon(A)$ で測定し，その測定で物理量 B に擾乱 $\eta(B)$ を与え，その直後に，物理量 B を正確に（誤差 0 で）測定すると，状態 ρ で物理量 A と物理量 B をそれぞれ誤差 $\varepsilon(A)$ 及び $\eta(B)$ で同時測定したことになる.

- この原理によって，同時測定の誤差に関する Heisenberg の不等式から，次の測定と擾乱に関する Heisenberg の不等式が得られるとされた.

$$\varepsilon(Q)\eta(P) \geq \frac{\hbar}{2}$$

- ただし，この議論によって，測定と擾乱に関する Heisenberg の不等式が成立するためには，物理量 A と物理量 B の同時測定が近似的反復可能性仮説を満たす必要があるが，そのためには，物理量 A の測定が近似的反復可能性仮説を満たすという仮定だけでは十分でない.

３種の不確定性関係

1. ゆらぎの不確定性関係（JDR）：（σ=標準偏差）

$$\sigma(Q)\sigma(P) \geq \frac{h}{4\pi}$$

2. 同時測定の不確定性関係（JMR）：(ε=平均誤差）

$$\varepsilon(Q)\varepsilon(P) \geq \frac{h}{4\pi}$$

3. 測定と擾乱の不確定性関係（MDR）：（η=平均擾乱）

$$\varepsilon(Q)\eta(P) \geq \frac{h}{4\pi}$$

- 測定に関する仮説: (Heisenberg 1927, von Neumann 1932, Schrödinger 1935, Dirac 1958)
  - 反復可能性仮説（RH）：同一の物理量を２回続けて測定すると同一の測定値が得られる.
  - 波束の収縮仮説（CH）：測定直後の被測定系の状態は被測定物理量の測定値に属する固有状態
  - RH$\Leftrightarrow$ CH
  - 近似測定版（ACH）：平均誤差 $\varepsilon(A)$ の測定直後の状態は測定値に属する $\varepsilon(A)$ 近似的固有状態
  - ACH$\Rightarrow$ 平均誤差 $\varepsilon(A)$ の測定直後の状態で $\sigma(A) \le \varepsilon(A)$.
- Heisenberg (1927) による JDR の発見：最小不確定状態について

$$\sigma(Q)\sigma(P) = \frac{\hbar}{2}$$

を証明．一般の場合の証明は，Kennard (1927) による.

- **Heisenberg (1927) の不確定性原理=JMR**
  - ハイゼンベルクの証明：JDR+ACH$\Rightarrow$ JMR
  - ガンマ線顕微鏡の説明：JMR$\Leftrightarrow$MDR（実際は，JMR$\Rightarrow$MDR）
- ハイゼンベルクの不確定関係 JMR/MDR が物理学の問題に使われることは 1970 年代後半までなかった.

  理由：それほど精度の高い測定を実験で実現する技術がなかった.
- **Braginsky et al. (1980), Caves et al. (1980) : MDR$\Rightarrow$SQL**
  - SQL（標準量子限界）: 自由質点型（干渉計型）重力波検出装置の感度の限界

    $$\mathrm{SQL} = \sqrt{\frac{\hbar\tau}{m}}$$
  - 当時，重力波検出には，干渉計型と共振器型（調和振動子型）の２つの方式が提案されていたが，不確定性原理に由来する感度限界のない共振器型が優位と見られた.

二つの重力波検出プロジェクト

- 1980, Braginsky, Vorontsov, Thorne, Caves, Drever:干渉計方式には不確定性原理から導かれる標準量子限界(SQL)が存在すると主張, そのような限界を回避できる共振器方式を推進

共振器方式

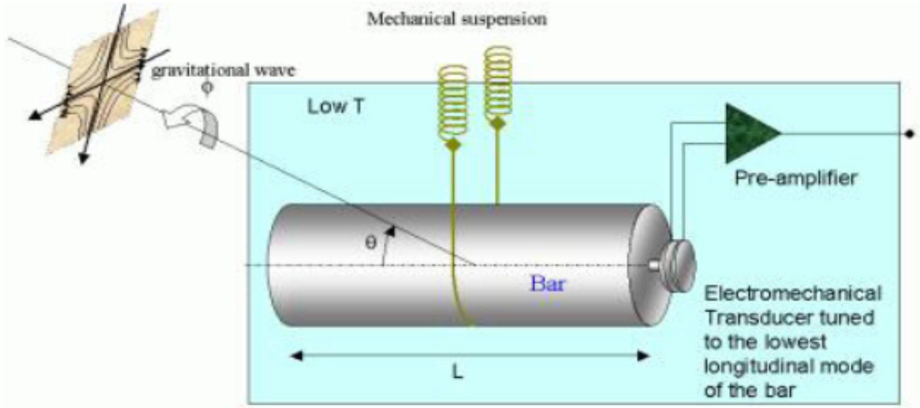
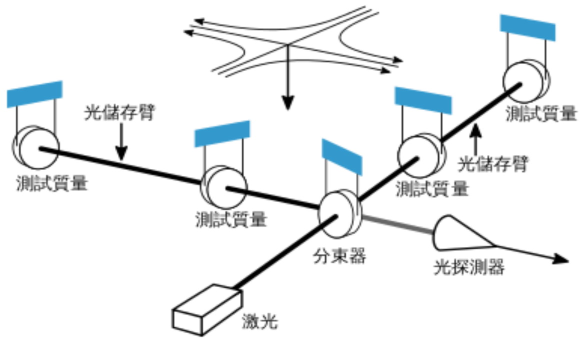


Schéma válcového detektoru gravitačních vln AURIGA.

VS 干渉計方式



- **Yuen (1983): SQL** の正当性を疑問視.
- **Caves (1985): SQL** を改良して正当性を主張．以下多くの論文が出て，論争状態に.
- **Ozawa (1988): SQL** の反例（**SQL** を満たさない自由質点型検出装置のモデル）の発見で論争は解決.
- **SQL** 論争解決の背景.
  - **Davies and Lewis (1970): RH** の不合理性（量子力学と矛盾すること）を主張し，**RH** を放棄した新しい測定理論である「インストルメント理論」を提唱.
  - **Ozawa (1984):** インストルメント理論に基づいて物理的実現可能量子測定の数学的特徴付けを証明.

    定理：「物理的に実現可能な量子測定」=「間接測定モデルを持つ測定」
    ＝「完全正値インストルメント」
  - この定理から，**RH, CH, ACH** の不合理性が明らかになった.

誤差の定義 (Ozawa 2003, 2019)

- 間接測定モデル $(\mathcal{K}, \xi, U, M)$ と被測定観測可能量 $A(0) = A \otimes I$ に対して，測定値は $M(\Delta t) = U^{\dagger}(I \otimes M)U$ で表される.
- 状態 ψ において観測可能量 $M(\Delta t)$ によって観測可能量 $A(0)$ を測定する場合の二乗平均平方根誤差は，次式で与えられる.

$$\varepsilon(A) = \varepsilon(A, \psi) := \|[M(\Delta t) - A(0)]\psi \otimes \xi\|.$$

- $M(\Delta t)$ と $A(0)$ が交換可能な場合は，$M(\Delta t)$ と $A(0)$ の結合確率分布 μ が存在し，上の定義は，古典的な二乗平均平方根誤差の定義に従う．この場合，$\varepsilon(A) = 0$ と測定が正しいこと，つまり，$\mu(A(0) = M(\Delta t)) = 1$，が同等になる.
- 一般の場合は，局所一様二乗平均平方根誤差を

$$\overline{\varepsilon}(A) = \sup_{t \in \mathbf{R}} \varepsilon(A, e^{-itA}\psi)$$

と定義すると，$\varepsilon(A) \leq \overline{\varepsilon}(A)$．ただし，$A(0)$ と $M(\Delta t)$ が可換ならば等号成立．さらに，$\overline{\varepsilon}(A) = 0$ と測定が正しいこと，つまり，$M(\Delta t)$ と $A(0)$ の結合確率分布 μ が存在して $\mu(A(0) = M(\Delta t)) = 1$ が成り立つことが同等になる.

擾乱の定義 (Ozawa 2003, 2019)

- 間接測定モデル $(\mathcal{K}, \xi, U, M)$ と被測定系 S の観測可能量 $B(0) = B \otimes I$ 及び $B(\Delta t) = U^\dagger (B \otimes I) U$ に対して，入力状態 ψ における二乗平均平方根擾乱は，次式で与えられる．

$$\eta(B) = \eta(B, \psi) := \|[B(\Delta t) - B(0)]\psi \otimes \xi\|.$$

- これは，間接測定モデル $(\mathcal{K}, \xi, U, M)$ で観測可能量 A を状態 ψ で 測定した直後に，観測可能量 B を誤差のない測定装置で測定した場合の，初期状態 ψ における測定誤差を表す．

- 局所一様二乗平均平方根擾乱を

$$\overline{\eta}(B) = \sup_{t \in \mathrm{R}} \varepsilon(B, e^{-itB}\psi)$$

と定義すると，$\eta(B) \le \overline{\eta}(B)$．ただし，$B(0)$ と $B(\Delta t)$ が可換ならば等号成立．さらに，$\overline{\varepsilon}(B) = 0$ と B が測定過程の保存量であること，つまり，$B(\Delta t)$ と $B(0)$ の結合確率分布 μ が存在して $\mu(B(0) = B(\Delta t)) = 1$ が成り立つことが同等になる．

位置測定のモデル (von Neumann 1932, Ozawa 1988, 2002)

- 1988 年までに知られてきた唯一の位置測定のモデル (von Neumann 1932):

$$U = \exp(-i\hbar H_{\mathrm{Neuman}}), \quad H_{\mathrm{Neuman}} = \hat{x}\hat{p}_y.$$

- Heisenberg の誤差・擾乱不確定性関係が成立 (Ozawa 2002):

$$\varepsilon(\hat{x})\eta(\hat{p}_x) \geq \frac{\hbar}{2}.$$

- 1988 年に，第 2 の位置測定モデルである誤差のない収縮状態測定モデルが発見された (Ozawa 1988):

$$U = \exp(-i\hbar H), \quad H = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\{2(\hat{x}\hat{p}_y - \hat{p}_x\hat{y}) + (\hat{x}\hat{p}_x - \hat{y}\hat{p}_y)\}.$$

- Heisenberg の誤差・擾乱不確定性関係は不成立 (Ozawa 2002)：

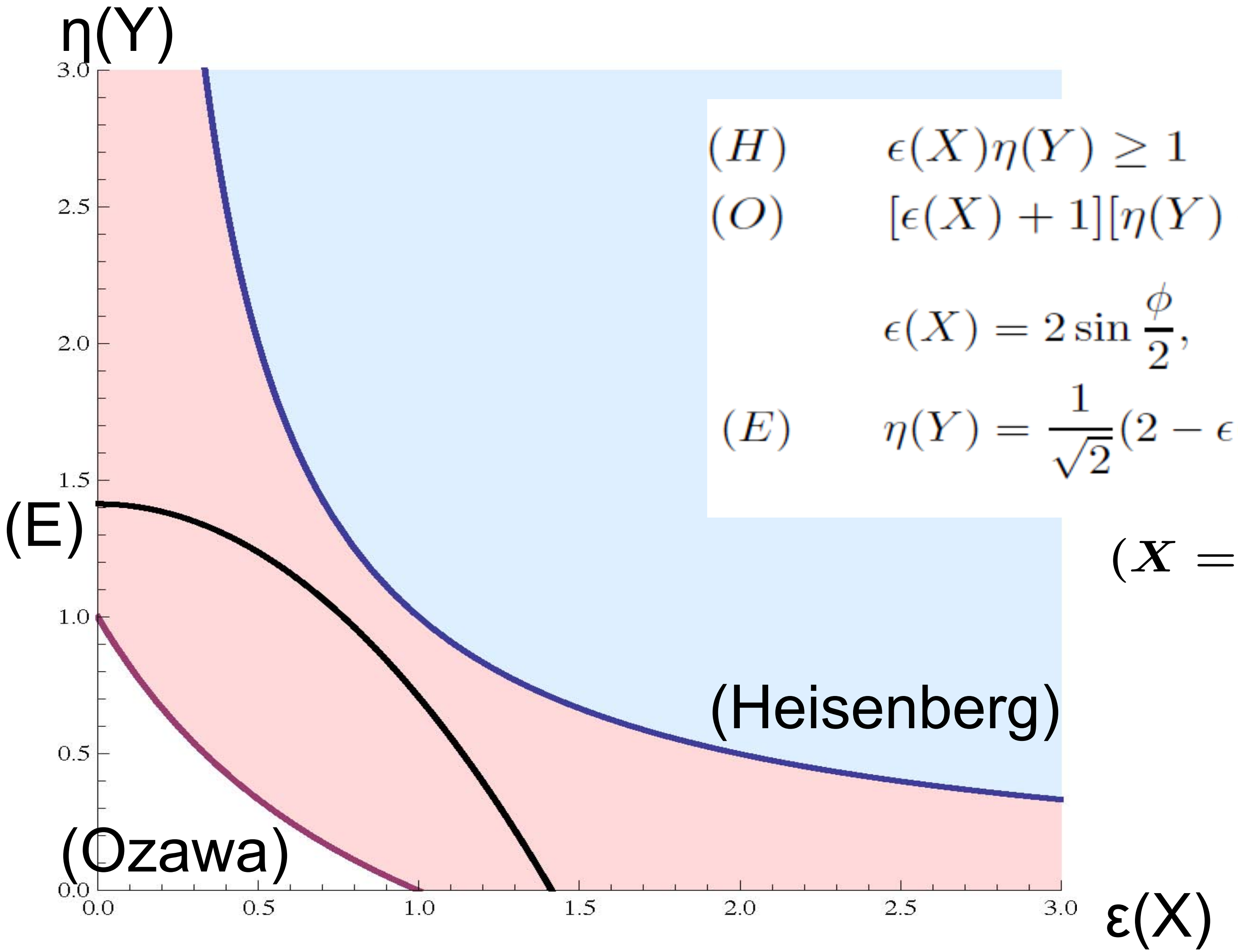
$$\varepsilon(\hat{x})\eta(\hat{p}_x) = 0.$$

- **SQL 論争解決の帰結：**
  - **重力波検出方式は，干渉計型に一本化され，1992 年から LIGO 計画が本格化し，2016 年に LIGO による重力波の直接検出成功を発表．**
  - **Ozawa (2003): ハイゼンベルクの JMR/MDR が量子力学と矛盾することが明らかになり，量子力学と矛盾しない 普遍的不確定性原理が発見された．**

$$\varepsilon(Q)\varepsilon(P) + \varepsilon(Q)\sigma(P) + \sigma(Q)\varepsilon(P) \geq \frac{h}{4\pi}.$$

  - **Erhart et al. (2012): ウィーン工科大長谷川グループの実験で，スピン測定に対する Heisenberg MDR の不成立と新しい Ozawa MDR の成立が観測された．**

スピンの測定における
小澤の不等式とハイゼンベルクの不等式の比較



$(H) \qquad \epsilon(X)\eta(Y) \geq 1$

$(O) \qquad [\epsilon(X)+1][\eta(Y)+1] \geq 2$

$$\epsilon(X) = 2\sin\frac{\phi}{2}, \qquad \eta(Y) = \sqrt{2}\cos\phi$$

$(E) \qquad \eta(Y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2-\epsilon(X)^2)$

$(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\sigma_x}, \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\sigma_y})$

新しい事実： 2 人の観測者 (Ozawa 2025)

- 量子力学で答えられる問題でありながら、これまで考えられなかった問題がある。空間的に離れた 2 人の観測者が同じ物理量を同時に測定する場合を考える。
- このとき、2 人の持つ測定装置のメータ物理量は互いに交換可能であり、それぞれの局所的測定の測定値の結合確率分布が量子力学で定義される。2 人が常に同じ結果を得るのか、それとも同じ確率分布を得るだけで、2 つの結果に相関がないのかを問うことができる。
- 量子ベイズ主義は、明らかに相関がないことを前提にしているようである。
- しかし、測定過程に関する量子力学の通常の計算から、2 人の観測者は常に同じ測定値を得ることが導かれる (Ozawa 2025)。

量子「間主観性」定理

- S : 測定対象となるシステム。ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ で記述される。

  A: 測定対象となる S 内の観測量。

  E: 環境。ヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ で記述される。

  観測者 I と II のメーター物理量を含む。

- 仮定 1: システム S は、時刻 0 まで環境 E から分離されている。

  $|\psi\rangle$: 時刻 0 における S の状態

  $|\xi\rangle$: 時刻 0 における E の状態

  M_1: E における観測者 I のメーター

  M_2: E における観測者 II のメーター

- 仮定 2: 観測者 I と II は、それぞれ時刻 t_1 と t_2 において、局所的にメーター M_1 と M_2 を測定する。そして、それらの局所的な測定値は空間的に分離しており、

$$\Pr\{M_1(t_1) = x, M_2(t_2) = y\} = \langle\psi| \langle\xi|P^{M_1}(x)P^{M_2}(y)|\xi\rangle |\psi\rangle$$

- 仮定 3: 観測者 I と II のメーター測定値は、任意の状態 $|\psi\rangle$ における観測量 $A(0)$ のボルン確率分布を再現する。すなわち、

$$\begin{aligned}\langle\psi| \langle\xi|P^{A(0)}(x)|\xi\rangle |\psi\rangle &= \langle\psi| \langle\xi|P^{M_1(t_1)}(x)|\xi\rangle |\psi\rangle \\ &= \langle\psi| \langle\xi|P^{M_2(t_2)}(x)|\xi\rangle |\psi\rangle\end{aligned}$$

または同等に

$$P^A(x) = \langle\xi|P^{M_1(t_1)}(x)|\xi\rangle = \langle\xi|P^{M_2(t_2)}(x)|\xi\rangle.$$

- 定理：仮定 1–3 の下で、以下の関係が成り立つ (Ozawa 2025)。

$$\langle\psi|\langle\xi| P^{M_1(t_1)}(x) P^{M_2(t_2)}(y) |\xi\rangle |\psi\rangle = 0 \quad (x \neq y)$$

  または、

$$\sum_x \langle\psi|\langle\xi| P^{M_1(t_1)}(x) P^{M_2(t_2)}(x) |\xi\rangle |\psi\rangle = 1$$

- 注：この定理は、観測者が 2 人以上の場合にも簡単に拡張できる.
- 結論: ある時点で同じ観測量 A を測定するすべての観測者は、互いに通信することなく同じ結果を共有することができる.

参考文献

V. B. Braginsky, Yu. I. Vorontsov, and K. S. Thorne. Quantum nondemolition measurements. Science, 209:547–557, 1980.

C. M. Caves. Defense of the standard quantum limit for free-mass position. Phys. Rev. Lett., 54:2465–2468, 1985.

C. M. Caves, K. S. Thorne, R. W. P. Drever, V. D. Sandberg, and M. Zimmermann. On the measurement of a weak classical force coupled to a quantum mechanical oscillator, I, Issues of principle. Rev. Mod. Phys., 52:341–392, 1980.

E. B. Davies and J. T. Lewis. An operational approach to quantum probability. Commun. Math. Phys., 17:239–260, 1970.

P. A. M. Dirac. The Principles of Quantum Mechanics. Oxford UP, Oxford, 4th edition, 1958. doi: 10.1063/1.3062610.

J. Erhart, S. Sponar, G. Sulyok, G. Badurek, M. Ozawa, and Y. Hasegawa. Experimental demonstration of a universally valid error-disturbance uncertainty relation in spin measurements. Nat. Phys., 8:185–189, 2012.

W. Heisenberg. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. Z. Phys., 43:172–198, 1927.

E. H. Kennard. Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen. Z. Phys., 44:326–352, 1927.

M. Ozawa. Quantum measuring processes of continuous observables. J. Math. Phys., 25: 79–87, 1984. doi: 10.1063/1.526000.

M. Ozawa. Measurement breaking the standard quantum limit for free-mass position. Phys. Rev. Lett., 60:385–388, 1988. doi: 10.1103/PhysRevLett.60.385.

M. Ozawa. Position measuring interactions and the Heisenberg uncertainty principle. Phys. Lett. A, 299:1–7, 2002. doi: 10.1016/S0375-9601(02)00659-X.

M. Ozawa. Universally valid reformulation of the Heisenberg uncertainty principle on noise and disturbance in measurement. Phys. Rev. A, 67:042105, 2003. doi: 10.1103/PhysRevA.67.042105.

M. Ozawa. Heisenberg's original derivation of the uncertainty principle and its universally valid reformulations. Curr. Sci., 109:2006–2016, 2015. arXiv:1507.02010 [quant-ph].

M. Ozawa. Soundness and completeness of quantum root-mean-square errors. npj Quantum Inf., 5:1, 2019. doi: 10.1038/s41534-018-0113-z.

M. Ozawa. Intersubjectivity and value reproducibility of outcomes of quantum measurements. Sci. Rep., 2025. URL https://arxiv.org/abs/1911.10893.

E. Schrödinger. Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik. Naturwissenshaften, 23:807–812, 823–828, 844–849, 1935. doi: 10.1007/BF01491891,10.1007/BF01491914, 10.1007/BF01491987. [English translation by J. D. Trimmer, Proc. Am. Philos. Soc. 124, 323–338 (1980)].

J. von Neumann. Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Springer, Berlin, 1932. [J. フォン・ノイマン (著), 井上 健, 広重 徹, 恒藤 敏彦 (共訳)『量子力学の数学的基礎』(みすず書房, 1957)].

H. P. Yuen. Contractive states and the standard quantum limit for monitoring free-mass positions. Phys. Rev. Lett., 51:719–722, 1983.