代数的場の量子論の基礎的な問題

谷本溶

ローマ大学トルヴェルガータ

量子力学 100 周年研究会：量子基礎・量子情報のこれまでとこれから
京都大学基礎物理学研究所
2025 年 9 月 12 日

場の量子論の数学的定式化

- 量子力学: Hilbert 空間, $[Q_j, P_k] = \mathrm{i}\hbar\delta_{j,k}$. $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$.
  Q_j : x_j の掛け算作用素, $P_k = -\mathrm{i}\partial_k$.
  Hamiltonian $H = \frac{1}{2m}\sum_j P_j^2 + \frac{1}{2}\sum_j Q_j^2 (+\frac{1}{4}Q^4)$.
- 場の量子論: $[\phi(x), \Pi(y)] = \mathrm{i}\hbar\delta(x-y)$... $\phi(x)$ はなにか?
- 公理的アプローチ: **Wightman**, Osterwalder-Schrader, 荒木-**Haag-Kastler**. 谷本による集中講義のノート
- 例 : $d = 1+1, 2+1$ では相互作用する例も.
- $d = 3+1$ では厳密に構成された相互作用のあるモデルはまだない (cf. ϕ_4^4 の自明性). $3+1$ 次元 Yang-Mill 理論の構成はミレニアム問題. QED はもっと難しい.
- 研究テーマ : (低次元の) 例の構成, 表現論, 曲がった時空上の場の量子論, エンタングルメント量の計算/評価, 観測過程...

代数的/公理的場の量子論の数学的問題

- 古典**スカラー場** ϕ は Minkowski 空間上の関数. 運動量 Π, と合わせて、モデルの運動方程式を満たす.
- **量子場**は Minkowski 空間上の **作用素値**超関数になり、Hilbert 空間に作用し、"同じ" 運動方程式を満たすべき.
- スカラー場で単純な場合なら、同時間正準交換関係 (CCR) を満たす:

$$[\phi(x), \Pi(y)] = \mathrm{i}\hbar\delta(x-y)$$

  よって、作用素値**超関数**. 試験関数 f に対して, $\phi(f)$ は (非有界) 作用素になる (cf. Wightman 場).
- (自由場の)Hamiltonian $\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2}\Pi(0,x)^2 + \frac{1}{2}\nabla\phi(0,x)^2 + m^2\phi(0,x)^2$
- $\phi(x)^n$ は直接には意味をなさない ($\Longrightarrow$ くりこみが必要)
- 低次元では例が構成されている Summers '12
- $3+1$ 次元素粒子標準理論??

荒木-Haag-Kastler 公理 (代数的場の量子論)

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 環とは、$+, \cdot, *$ で閉じた $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の部分集合 ($*$-環) であって、strong (weak) operator topology で閉であるものである.

荒木-Haag-Kastler ネットとは、von Neumann 環の族 $\{\mathcal{A}(O)\}_{O\subset\mathbb{R}^{(d-1)+1}}$, Poincaré 群のユニタリ表現 U と真空ベクトル $\Omega\in\mathcal{H}$ の組であって、次の条件を満たすものである.

- 単調性: $O_1\subset O_2$, なら、$\mathcal{A}(O_1)\subset\mathcal{A}(O_2)$.
- 局所性: O_1 と O_2 が空間的に離れているなら、$[\mathcal{A}(O_1),\mathcal{A}(O_2)]=\{0\}$.
- 共変性: $U(g)\mathcal{A}(O)U(g)^*=\mathcal{A}(g\cdot O)$.
- エネルギーの正値性: $U|_{\mathbb{R}^d}$ のスペクトルは未来光円錐に含まれる.
- 真空の巡回性: Ω は $U(g)\Omega=\Omega$ を満たすベクトルで (スカラー倍を除いて) 一意で、$\overline{\bigcup_O \mathcal{A}(O)\Omega}=\mathcal{H}$.

量子場 (Wightman 場) との関係

技術的条件 (linear energy bounds) を満たす Wightman 場 $\phi(x)$ と対称性の表現 U があったとする。時空領域 O に対し, 次の定義をする:

$$\mathcal{A}(O) = \{e^{i\phi(f)} : \operatorname{supp} f \subset O\}''$$

($\{e^{i\phi(f)}, \operatorname{supp} f \subset O\}$ を含む最小の von Neumann 環)

ここで、有界作用素の集合 M に対して, M' は M の交換子と呼ばれ, M の元と交換する元をすべて集めた von Neumann 環である. $M'' = (M')'$. このとき、$(\mathcal{A}, U, \Omega)$ は荒木-Haag-Kaster 公理を満たす.

AHK ネットが一旦できたら,

- 状態 (正定値汎関数)
- ネットの表現 (電荷のある状態)
- 冨田竹崎理論 (Lorentz ブーストと modular group の関係), 相対エントロピー

などを考えることができる.

研究テーマ/なぜ公理か

- 散乱理論 (荒木ら)
- $1+1$d CFT の分類 (河東ら)
- split property, DHR 表現論 (cf. 緒方)
- 例の構成 (谷本ら)

- 公理は (完全な) 場の量子論が満たすべき最低限の性質
- 例を作るのは難しい (摂動論は収束しない、有効場の理論ではカットオフがある)
- 一般論はきれいにいくこともある (対称性、エネルギーの正値性、作用素環論の結果 (表現論、冨田竹崎理論など) が使える) 分類問題、不変量 (モデルの特徴づけ) の研究

荒木-Haag-Kastler 公理を満たす例

構成的場の量子論からの例:

- 任意次元 $d+1$ での自由場
- $\mathcal{P}(\phi)_2$ モデル,
  $\mathcal{H} = \frac{1}{2}\Pi(0,x)^2 + \frac{1}{2}\nabla\phi(0,x)^2 + m^2\phi(0,x)^2 + \mathcal{P}(\phi(0,x))$
- ϕ^4_3 モデル
- 湯川モデル $d = 2, 3$

(一部の $d = 1+1$ 可換ゲージ理論は Osterwalder-Schrader 公理の類似物のチェックまで)

代数的な (Hamiltonian に基づかない) 構成

- $1+1$d CFT の一部 (多くの $1+1$d CFT は (Wightman/Osterwalder-Schrader/荒木-Haag-Kaster) 公理を満たす Longo-Rehren, Carpi-Kawahigashi-Longo-Weiner, Gui, Adamo-森脇-T. など). (Virasoro 代数, ループ群の表現)
- $1+1$d 可積分系の一部 Lechner, T. など. (S 行列逆問題)

主な研究テーマ (まとめ)

作用素環/代数的場の量子論をつかってできるようになること

- 散乱行列の定義
- ネットの表現による状態の研究 (DHR, KMS 状態)
- 不変量の構成, 分類
- 新しい例の構成
  - $1+1$d CFT
  - $1+1$d 可積分系

(量子基礎, 量子情報との関係)

- 場の量子論での (相対) エントロピーの定義と計算
- 観測過程の定義と Sorkin の不可能測定

量子場のエントロピー

- 通常 (有限次元系) では、量子系は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, 状態は密度行列 $0 \leq \rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \operatorname{tr}\rho = 1$ で表される.
- 状態 ρ の von Neumann エントロピーは $S(\rho) = -\operatorname{tr}\rho\log\rho$. 2 つの状態 ρ, ψ の相対エントロピーは $S(\rho|\psi) = \operatorname{tr}\rho(\log\rho - \log\psi)$
- 場の量子論 (AHK ネット) では、時空領域 O の von Neumann 環 $\mathcal{A}(O)$ は (有限の値を取る) トレースを持たない (III 型) のが典型的 (CFT では証明できる)
- $S_{\mathcal{A}(O)}(\rho) = \infty$. しかし、$S_{\mathcal{A}(O)}(\rho|\psi)$ は定義できる (荒木).
- 真空ベクトル Ω は $\mathcal{A}(O)$ に対して巡回的かつ分離的である. 状態 ρ, ψ に対して, natural cone と呼ばれる集合からベクトル ξ, η をとり、$\rho(x) = \langle\xi, x\xi\rangle, \psi(x) = \langle\eta, x\eta\rangle$ とできる.
- $S_{\xi,\eta}x\eta := x^*\xi, S_{\xi,\eta} = J_{\xi,\eta}\Delta_{\xi,\eta}^{\frac{1}{2}}$ と定義する.
- 相対エントロピーは $S_{\mathcal{A}(O)}(\rho|\psi) = \langle\xi, \log\Delta_{\xi,\eta}\xi\rangle$ と定義でき, これは有限次元の場合, トレースを使った公式と一致する. 大矢-Petz

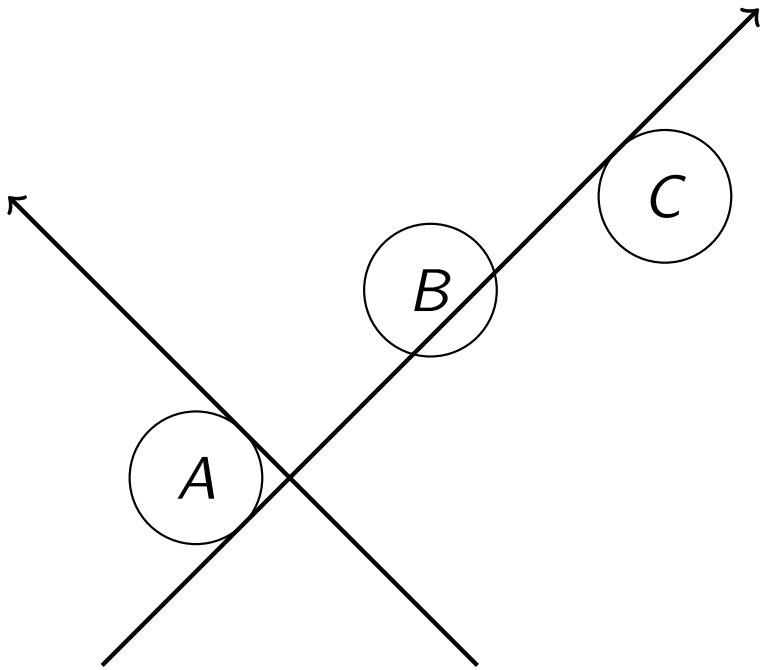
量子場のエントロピー：結果と問題

- 自由場での真空状態 ω と コヒーレント状態 ψ の間の相対エントロピー (多くの結果)
- $1+1$d CFT での真空状態 ω の mutual information $S_{\mathcal{A}(I_1 \cup I_2)}(\omega|\omega \otimes \omega)$ Longo-Xu
- 自由場でのコヒーレント状態についての QNEC の証明 Morinelli-T.-Wegener

- 自由場での一般の状態、相互作用のある場については手つかず
- (相対) エントロピーが計算できると何がうれしい?

量子場の観測過程：Sorkin の不可能測定

- A と C は空間的に離れているとする. A の操作は C の観測に影響を及ぼさないはず.
- A と C の間に B があると, A の操作のあとに B が (選択的でない) 操作をすると, A と B の非可換性のため, C の観測に影響が出る
- AHK ネットの意味で局所的であっても, あらゆる操作が許されるわけではない?



量子場の観測過程：代数的な定式化と問題

- 観測者は観測過程以外では独立 (テンソル積) なプローブ系であると考える (cf. von Neumann) Fewster-Verch
- 対象系 $\mathcal{S}$, プローブ系 $\mathcal{P}$, その合成系 $\mathcal{C}$ も場の量子論なので、AHK 公理を満たす
- $\mathcal{S} \otimes \mathcal{P}$ と $\mathcal{C}$ は、観測時空領域の外では同型とする
- 観測過程を次のように定義する：観測前後の Cauchy 面での同型を $\tau^{\mp} : \mathcal{S} \otimes \mathcal{P} \to \mathcal{C}$ とする. $\Theta := (\tau^{-})^{-1} \circ \tau^{+}$
- 観測前の状態を $\omega \otimes \sigma$ としプローブ物理量 X を測ると, 対象系の物理量 $Y = \mathrm{id} \otimes \sigma \circ \Theta(\mathbb{1} \otimes X)$ が得られる $\omega(Y) = (\omega \otimes \sigma)(\Theta(\mathbb{1} \otimes X))$
- このような過程で測定できる物理量を、A, B (非選択的), C が観測しても, A の観測は C の観測に影響を及ぼさない Bostelman-Fewster-Ruep

- 量子光学で行われているような観測がこのような過程で記述できる?

おまけ：数学の形式化

Lean で書いた No-cloning 定理 (GitHub リンク)

```
theorem NoCloning :
    ¬ (∃ U ∈ unitary (H4 →L[ℂ] H4), ∀ (x : H2),
    ‖x‖ = 1 → U (tensor x e) = (tensor x x)) := by
  by_contra! h
  obtain ⟨U, Uunit, Uclone⟩ := h
  have Uclone_star (x : H2) (hx : ‖x‖ = 1) : tensor x
    calc
      tensor x e = (1 : H4 →L[ℂ] H4) (tensor x e) :=
      _ = (1 : unitary (H4 →L[ℂ] H4)).1 (tensor x e)
      _ = ((star U) * U) (tensor x e) := by
        rw [← unitary.star_mul_self ⟨U, Uunit⟩]; rfl
      _ = (star U) (U (tensor x e)) := rfl
      _ = (star U) (tensor x x) := by congr; exact Uc
  have inner_xeye_eq (x y : H2) (hx : ‖x‖ = 1) (hy :
```

おまけ：数学の形式化

Lean で書いた No-cloning 定理 (GitHub リンク)

```
theorem NoCloning :
  ¬ (∃ U ∈ unitary (H4 →L[ℂ] H4), ∀ (x : H2), ‖x‖ = 1 → U (tensor x e) = (tensor x x)) := by
by_contra! h
obtain (U, Uunit, Uclone) := h
have Uclone_star (x : H2) (hx : ‖x‖ = 1) : tensor x e = star U (tensor x x) := by
  calc
    tensor x e = (1 : H4 →L[ℂ] H4) (tensor x e) := by rfl
    _ = (1 : unitary (H4 →L[ℂ] H4)).1 (tensor x e) := by rfl
    _ = ((star U) * U) (tensor x e) := by
      rw [← unitary.star_mul_self (U, Uunit)]; rfl
    _ = (star U) (U (tensor x e)) := rfl
    _ = (star U) (tensor x x) := by congr; exact Uclone x hx
have inner_xeye_eq (x y : H2) (hx : ‖x‖ = 1) (hy : ‖y‖ = 1) :
    ⟪tensor x e, tensor y e⟫ = ⟪x, y⟫ ^ 2 := by
  rw [Uclone_star x hx, Uclone_star y hy]
  rw [unitary.inner_map_map (star U, unitary.star_mem_iff.mpr Uunit)]
  simp only [inner_H4, Fin.isValue, tensor_apply, RCLike.inner_apply, map_mul, inner_H2]
  ring
have inner_xy_eq_sq (x y : H2) (hx : ‖x‖ = 1) (hy : ‖y‖ = 1) : ⟪x, y⟫ = ⟪x, y⟫ ^ 2 := by
  rw [← inner_xeye_eq x y hx hy]
  simp
have zero_or_one (x y : H2) (hx : ‖x‖ = 1) (hy : ‖y‖ = 1) : ⟪x, y⟫ = 0 ∨ ⟪x, y⟫ = 1 := by
  exact eq_zero_or_one_of_sq_eq_self (inner_xy_eq_sq x y hx hy).symm
let x : H2 := (fun i ↦ 1 / (Real.sqrt 2), Memℓp.all _)
have inner_xe : ⟪x, e⟫ = 1 / (Real.sqrt 2) := by
  simp [x]
have norm_sq_x : ‖x‖ ^ 2 = (1 : ℂ) := by
  rw [norm_H2 x]
  simp [x]
  field_simp
  ring_nf
  rw [sq, ← Complex.ofReal_mul (√2) (√2)]
  simp
have norm_x : ‖x‖ = 1 := by
  rw [← Complex.ofReal_pow, Complex.ofReal_eq_one, sq_eq_one_iff] at norm_sq_x
  apply Or.elim norm_sq_x
  · exact fun h ↦ h
  · by_contra! h
    have : 0 ≤ ‖x‖ := norm_nonneg x
    rw [h.1, Left.nonneg_neg_iff] at this
    linarith
have xe_zero_or_one := zero_or_one x e norm_x norm_e
apply Or.elim xe_zero_or_one
· intro h
  rw [inner_xe] at h
  simp only [one_div, inv_eq_zero, Complex.ofReal_eq_zero, Nat.ofNat_nonneg, Real.sqrt_eq_zero,
    OfNat.ofNat_ne_zero] at h
· intro h
  rw [inner_xe] at h
  simp only [one_div, inv_eq_one, Complex.ofReal_eq_one, Real.sqrt_eq_one,
    OfNat.ofNat_ne_one] at h
```

No goals

▼ Expected type

```
U : ↥H4 →L[ℂ] ↥H4
Uunit : U ∈ unitary (↥H4 →L[ℂ] ↥H4)
Uclone : ∀ (x : ↥H2), ‖x‖ = 1 → U (tensor x e) = tensor x x
Uclone_star : ∀ (x : ↥H2), ‖x‖ = 1 → tensor x e = (star U) (tensor x x)
inner_xeye_eq : ∀ (x y : ↥H2), ‖x‖ = 1 → ‖y‖ = 1 → ⟪tensor x e, tensor y e⟫ = ⟪x, y⟫ ^ 2
inner_xy_eq_sq : ∀ (x y : ↥H2), ‖x‖ = 1 → ‖y‖ = 1 → ⟪x, y⟫ = ⟪x, y⟫ ^ 2
zero_or_one : ∀ (x y : ↥H2), ‖x‖ = 1 → ‖y‖ = 1 → ⟪x, y⟫ = 0 ∨ ⟪x, y⟫ = 1
x : ↥H2 := ⋯
inner_xe : ⟪x, e⟫ = 1 / ↑√2
norm_sq_x : ↑‖x‖ ^ 2 = 1
norm_x : ‖x‖ = 1
xe_zero_or_one : ⟪x, e⟫ = 0 ∨ ⟪x, e⟫ = 1
h : 1 / ↑√2 = 1
⊢ 1 / ↑√2 = 1
```

▼ Messages (1)

▼ NoCloningThoerem.lean:61:0

Goals accomplished!

▶ All Messages (0)

Riesz-Markow-Kakutani 定理