

量子力学100周年研究会

2025年9月10日

量子論の図式表現と その応用

中平健治

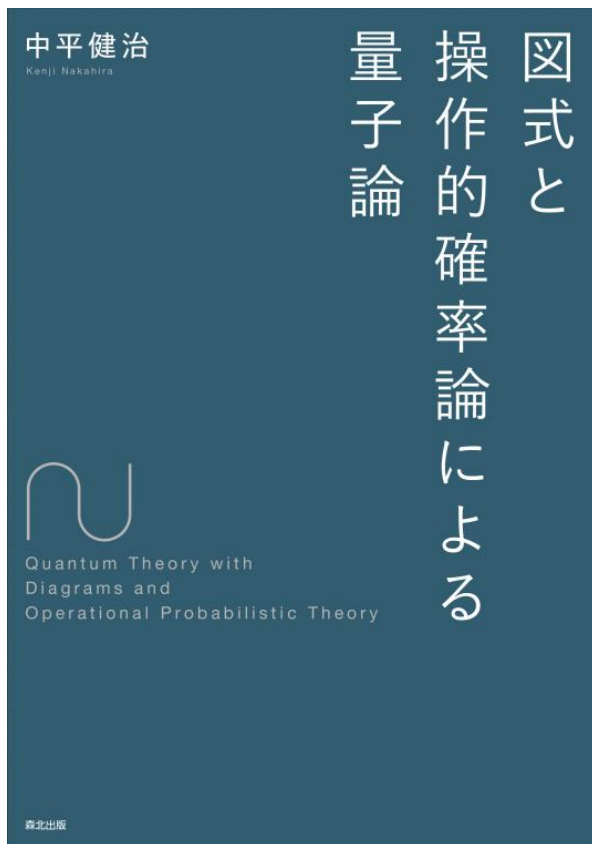
玉川大学 量子情報科学研究所

自己紹介

専門：

- 量子状態や量子チャネルの識別
- 量子論の数学的構造の再構築

書籍：



量子論の図式を紹介



量子論の図式の知見を
圏論に活用

目次

前半：チュートリアル

1. 関式とは
2. 量子論の関式の基礎

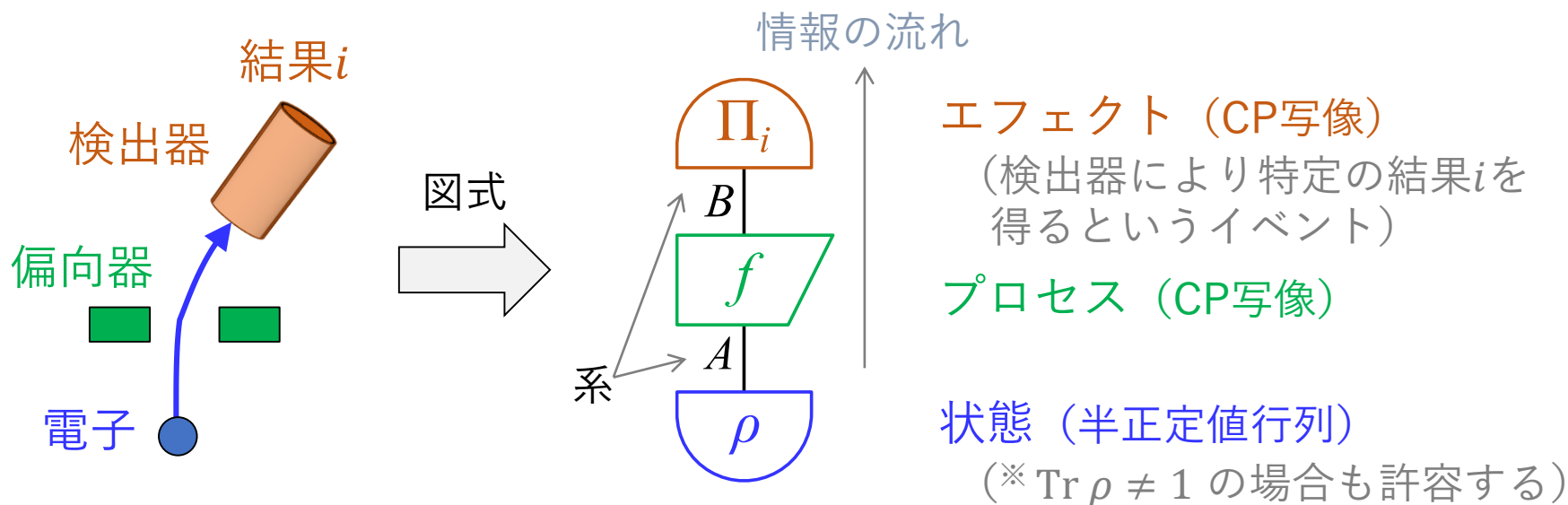
後半：応用例（研究紹介）

- 例 1：量子チャネル識別
- 例 2：識別能力

関式の威力とおもしろさが伝われば幸いです

量子論の図式とは

量子プロセスをブロックで表して、量子系を線で表した式
(CP写像 (完全正值写像))



図式を用いると、数式と同等の厳密性を保ちながら
視覚的に理解しやすい形で記述・計算できる

量子情報の多くの場面で役立つツールとして注目されつつある

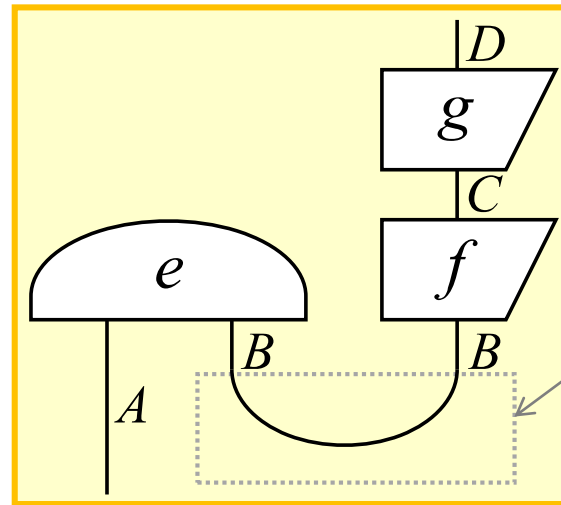
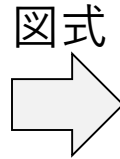
[B. Coecke., arXiv:0402014 (2004)]

図式の主な特徴

1. 合成（直列接続）とテンソル積（並列接続）を
2次元的に素直に表せる

$$g(e \otimes f)(\text{id}_A \otimes \Psi)$$

(Ψ は非正規ベル状態)



3. 特別な
プロセスを
特別視できる

2. プロセスの入出力系や接続の様子が
ひと目でわかる
(例： e の入力系は合成系 $A \otimes B$)

複雑なプロセスを表す式では、しばしば数式よりも便利

備考：量子論の性質を一般確率論の性質とそれ以外の性質に分けやすくなる

目次

前半：チュートリアル

1. 図式とは

2. 量子論の図式の基礎

後半：応用例（研究紹介）

例 1：量子チャネル識別

例 2：識別能力

線形代数の図式

一般確率論の図式

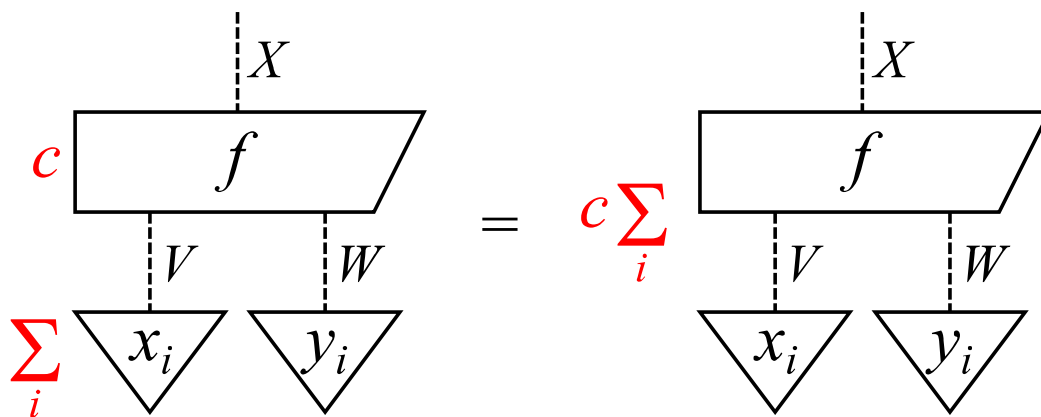
量子論の図式



線形代数の図式：基本的な性質

線形写像をブロックで表し，ベクトル空間を破線で表す
(直列接続は合成で，並列接続はテンソル積)

性質 1 「スカラー倍」と「和」は原則どこに描いてもよい



$$(cf)(\sum_i |x_i\rangle \otimes |y_i\rangle) = c \sum_i f(|x_i\rangle \otimes |y_i\rangle)$$

ベクトルは線形写像の特別な場合とみなせるため，
ブロックで表せる

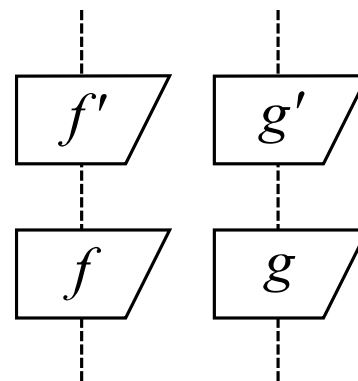
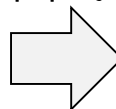
線形代数の図式：基本的な性質（続き）

性質 2 合成とテンソル積が混在した式を素直に表せる

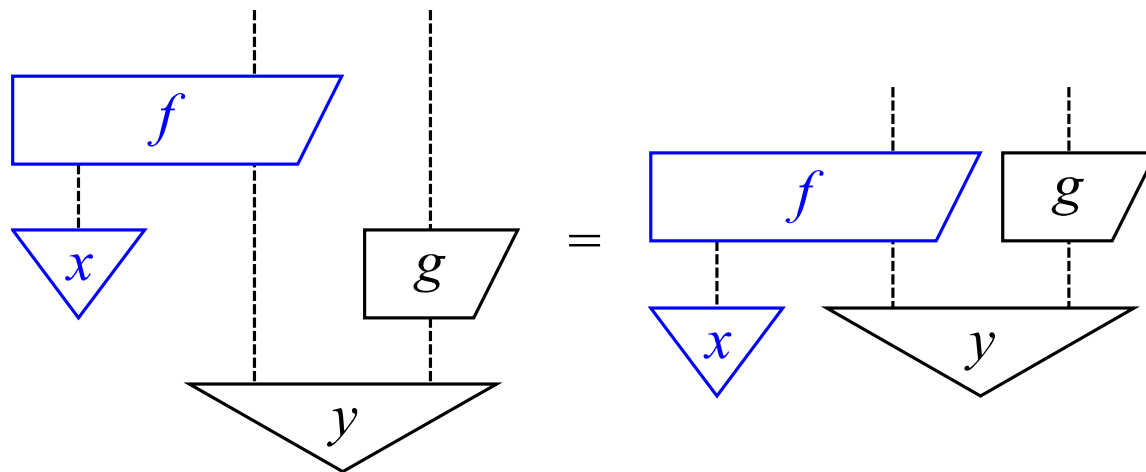
$$(f' \otimes g')(f \otimes g) = f'f \otimes g'g$$

数式では一見異なる式で表される...

図式



性質 3 ブロックを線に沿って自由に動かせる



$$(f \otimes \text{id})(|x\rangle \otimes \text{id} \otimes g)|y\rangle = (f \otimes g)(|x\rangle \otimes |y\rangle)$$

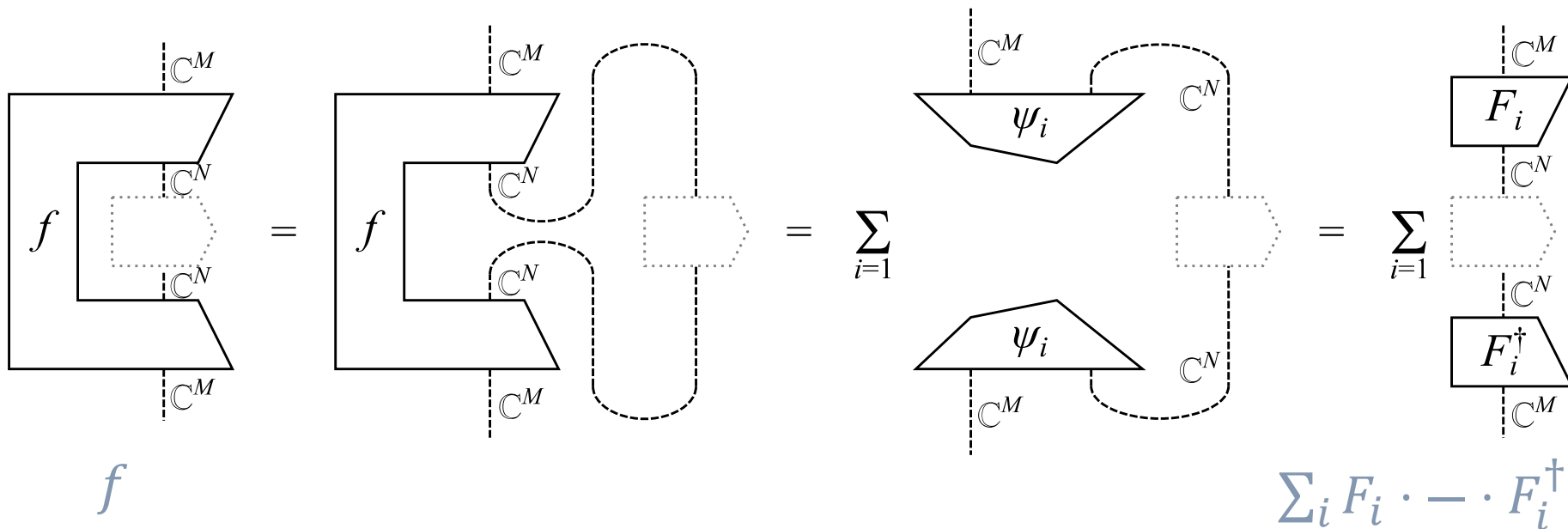
数式より図式のほうが視覚的

[ジグザグ等式の応用] CP写像のクラウド表現

命題 任意のCP写像 f は, 適切な行列の組 $\{F_i\}_i$ を用いて $f(X) = \sum_i F_i X F_i^\dagger$ の形で表せる

†: 共役転置

証明



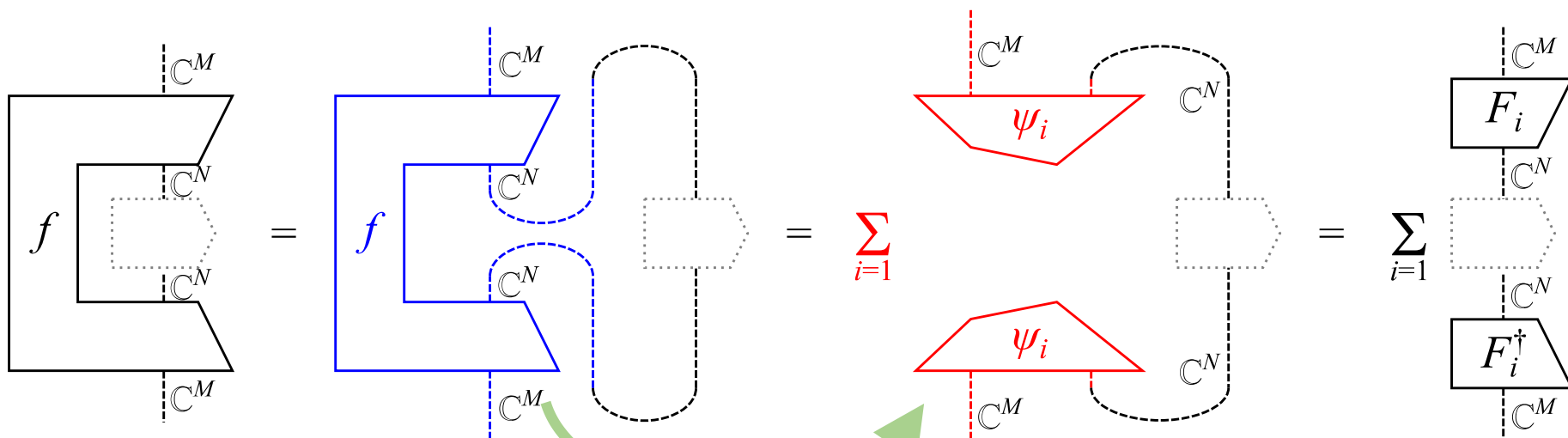
□

[ジグザグ等式の応用] CP写像のクラウス表現

命題 任意のCP写像 f は、適切な行列の組 $\{F_i\}_i$ を用いて $f(X) = \sum_i F_i X F_i^\dagger$ の形で表せる

†: 共役転置

証明



f

$(f \otimes \text{id}_V)(|u\rangle\langle n|)$ は半正定値行列なので $\sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ の形で表せる

$\sum_i F_i \cdot \dots \cdot F_i^\dagger$

□

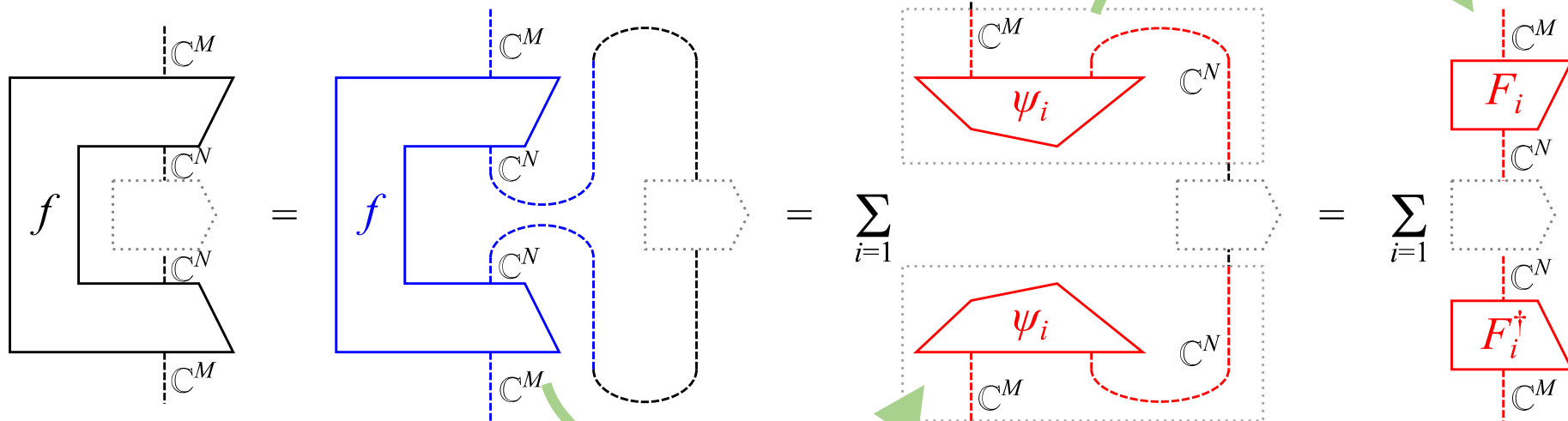
[ジグザグ等式の応用] CP写像のクラウス表現

命題 任意のCP写像 f は, 適切な行列の組 $\{F_i\}_i$ を用いて $f(X) = \sum_i F_i X F_i^\dagger$ の形で表せる

†: 共役転置

証明

この行列を F_i とおく



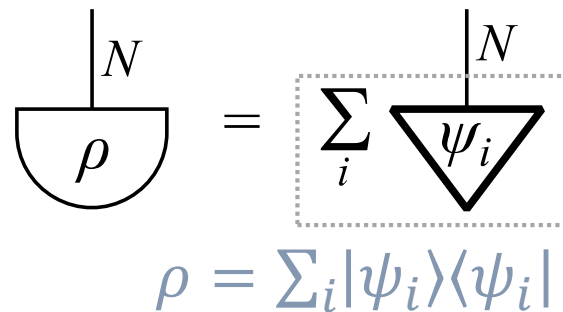
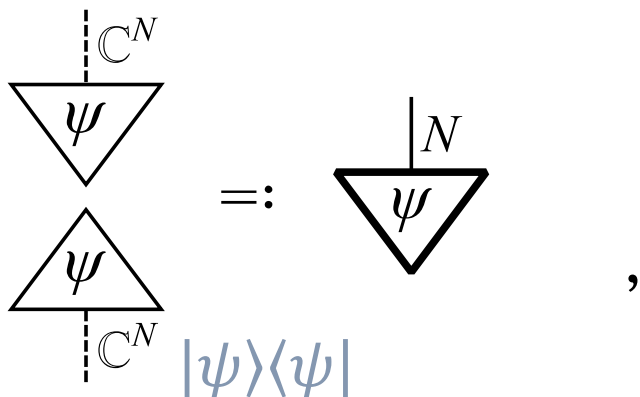
$(f \otimes \text{id}_V)(|u\rangle\langle n|)$ は半正定値行列なので $\sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ の形で表せる

$\sum_i F_i \cdot \dots \cdot F_i^\dagger$

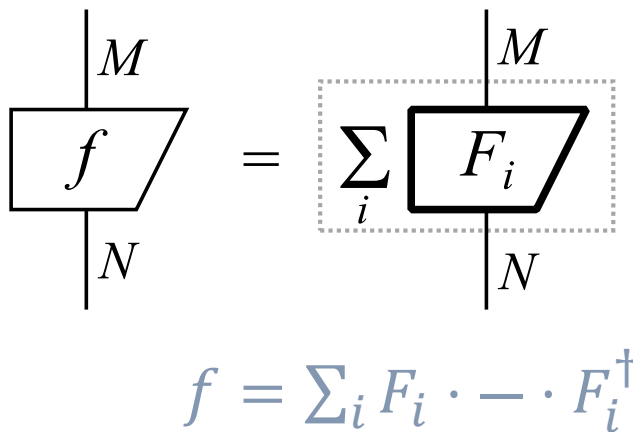
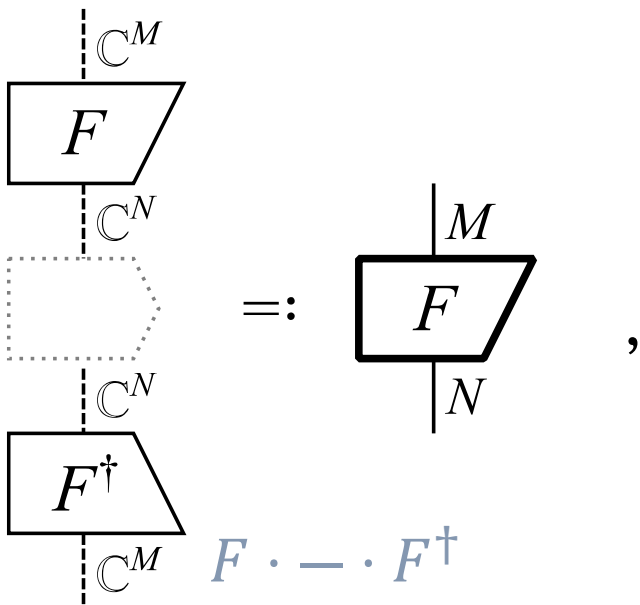
□

量子論の図式

■ 量子状態 (半正定値行列)



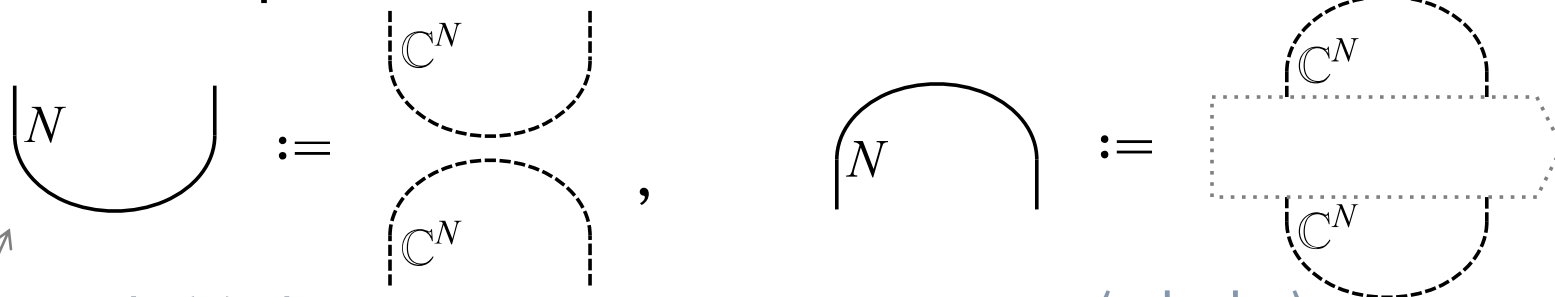
■ 量子プロセス (CP写像)



状態やプロセスを1個のブロックとして素直に表せる

量子論のジグザグ等式

cup状態とcapエフェクトを次式で定義する



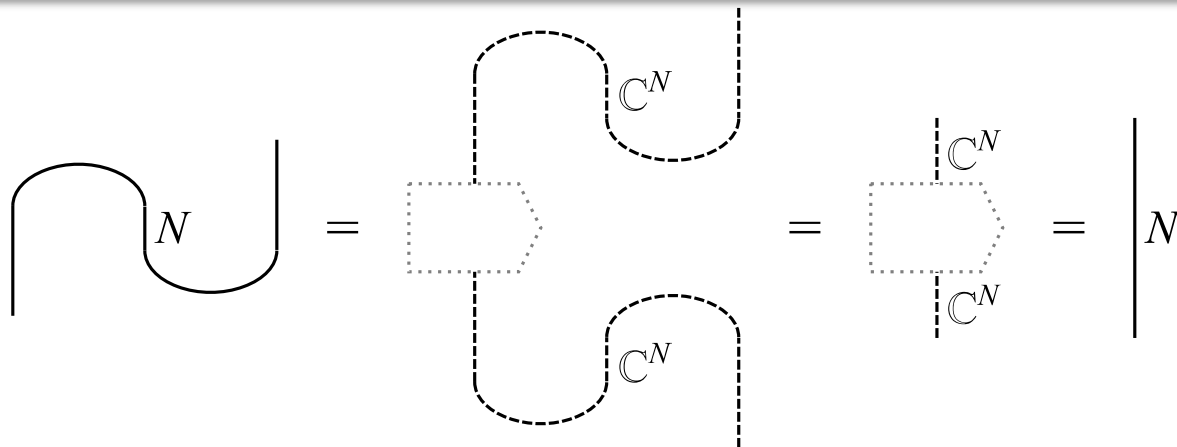
$$u := |u\rangle\langle n| \quad (|u\rangle := \sum_{n=1}^N |n\rangle \otimes |n\rangle) \quad n := \langle n| - |u\rangle$$

最大もつれ状態 (の N 倍)

ジグザグ等式

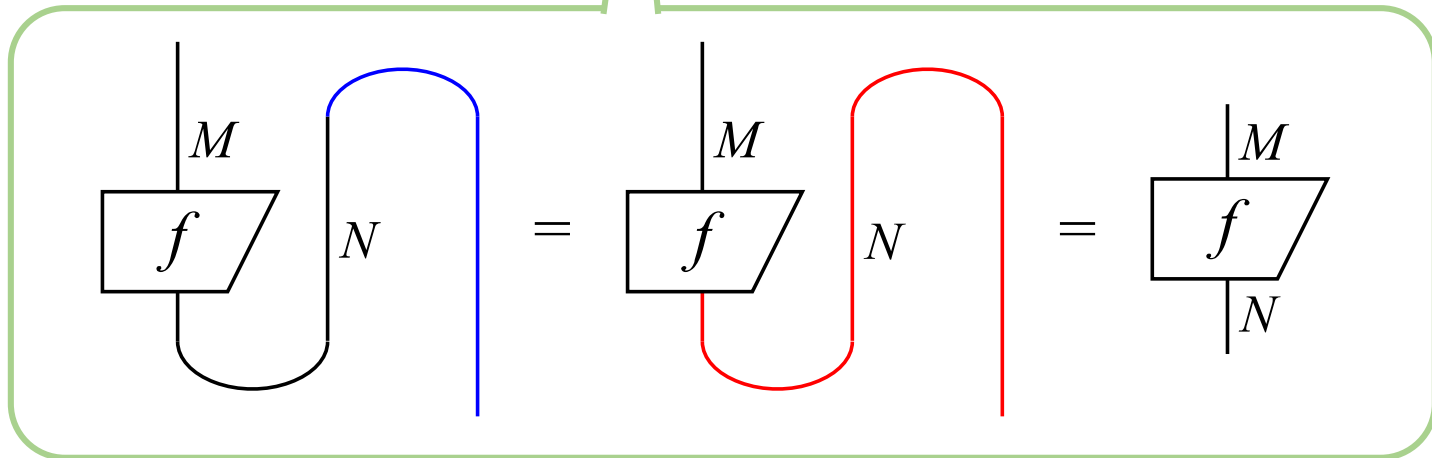
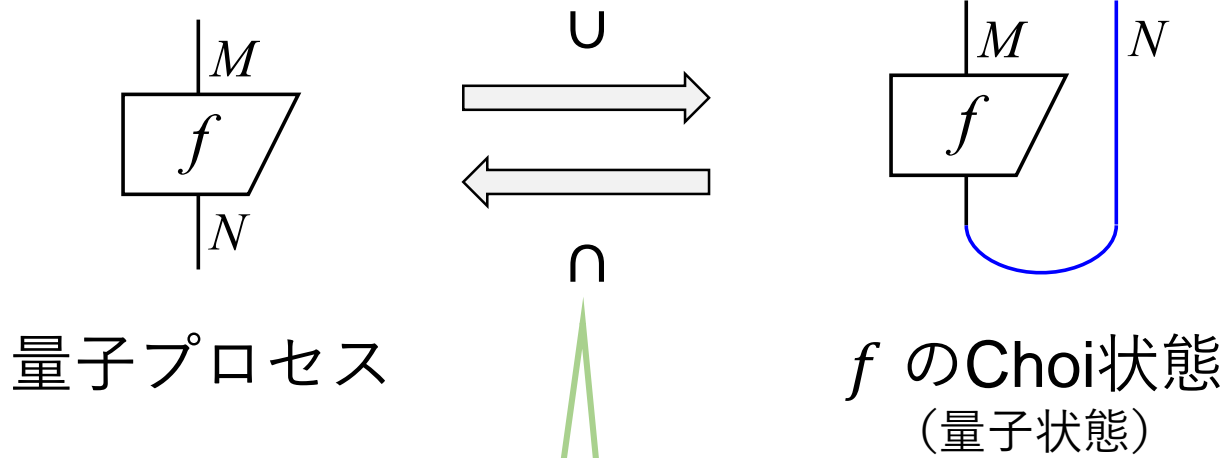
$$(n \otimes \text{id}) \circ (\text{id} \otimes u) = \text{id}$$

証明

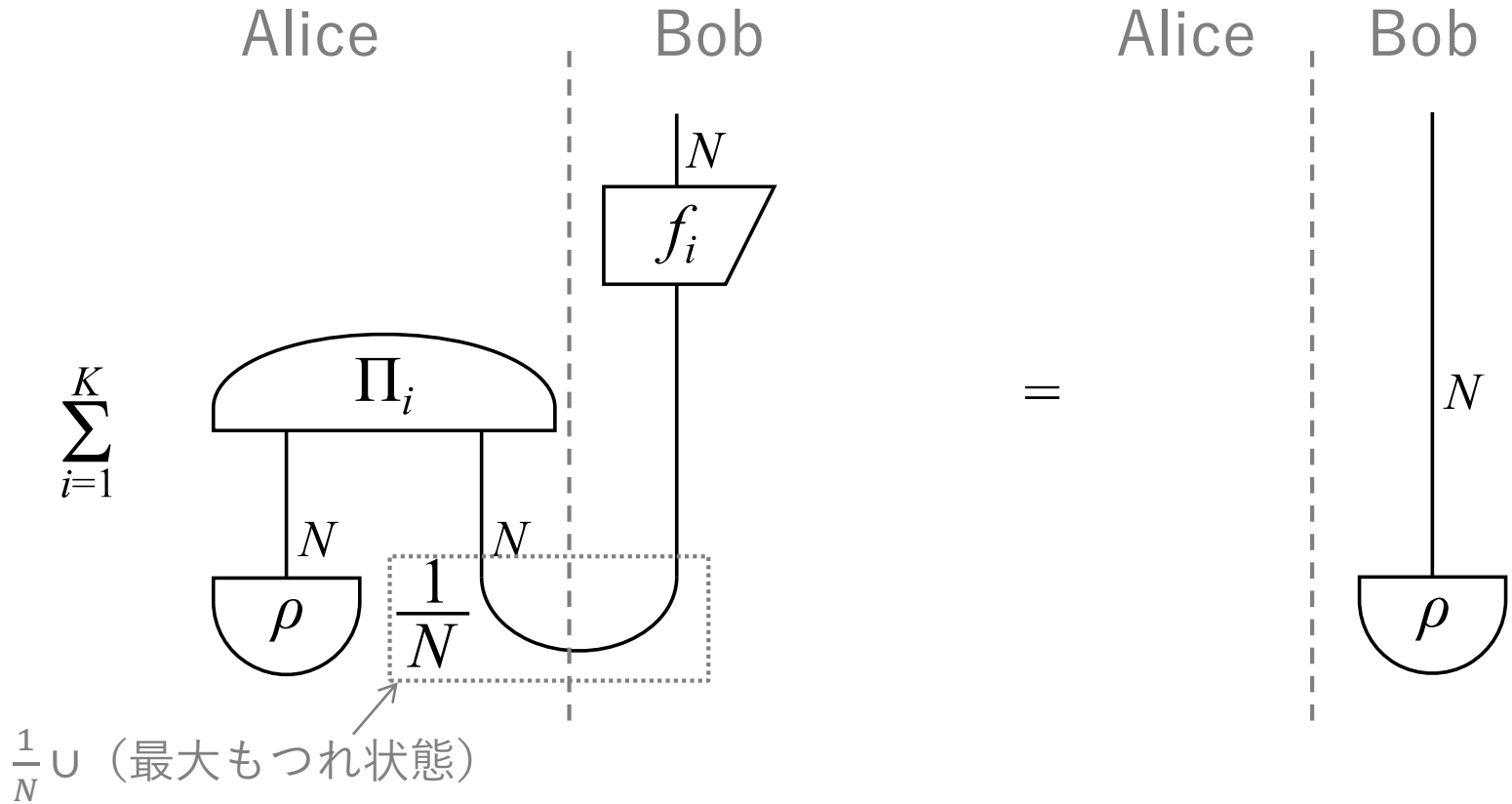


□

[ジグザグ等式の応用1] Choi状態

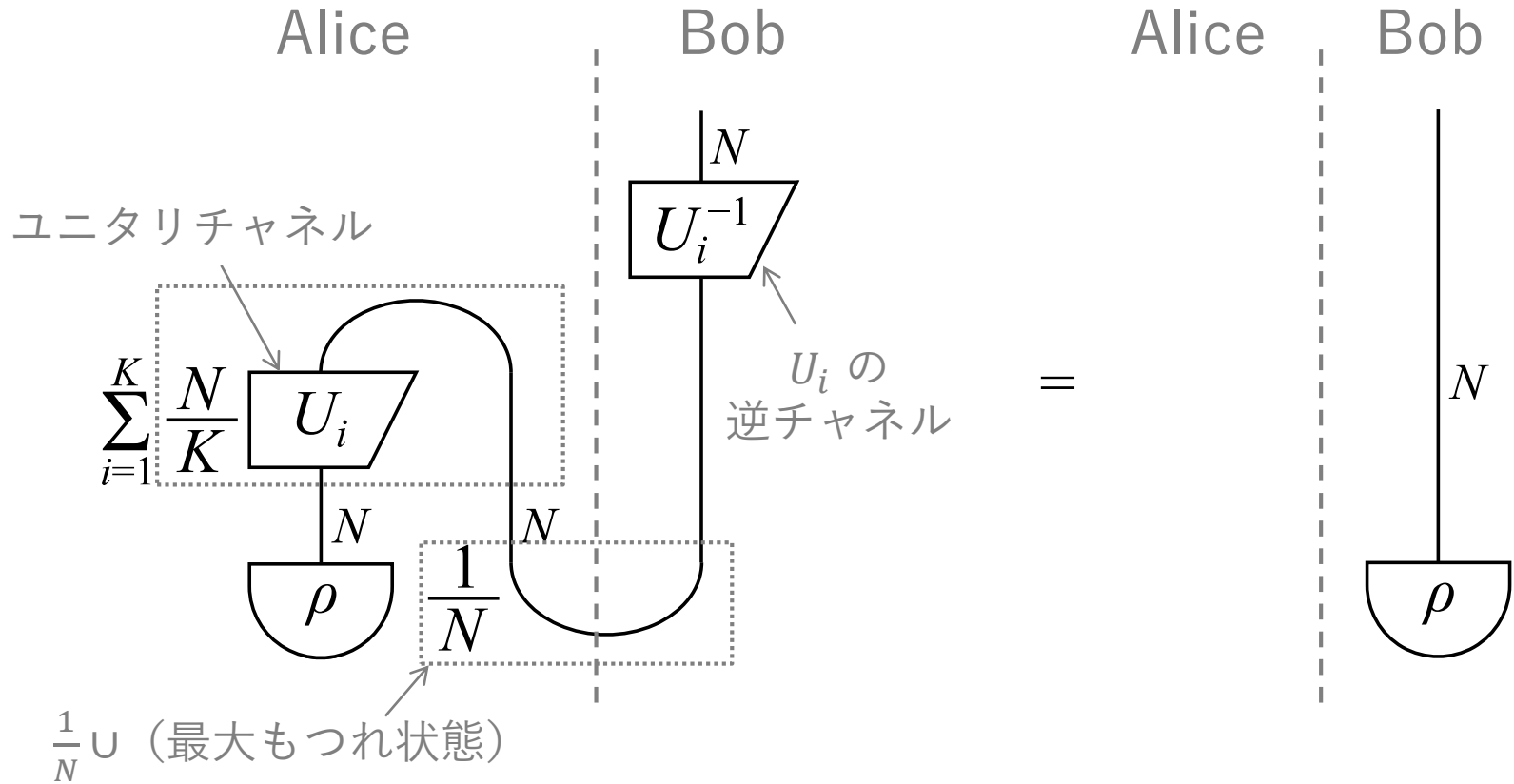


[ジグザグ等式の応用2] 量子テレポーテーション



ただし $\{U_i\}_{i=1}^K$ は $\frac{N}{K} \sum_{i=1}^K \begin{array}{c} |N\rangle \\ \diagdown \\ U_i \\ \diagup \\ |N\rangle \end{array} = \frac{\begin{array}{c} |N\rangle \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \diagup \\ |N\rangle \end{array}}{\text{Tr}} \text{を満たす}$

[ジグザグ等式の応用2] 量子テレポーテーション



ただし $\{U_i\}_{i=1}^K$ は $\frac{N}{K} \sum_{i=1}^K U_i = \frac{I_N}{N}$ を満たす

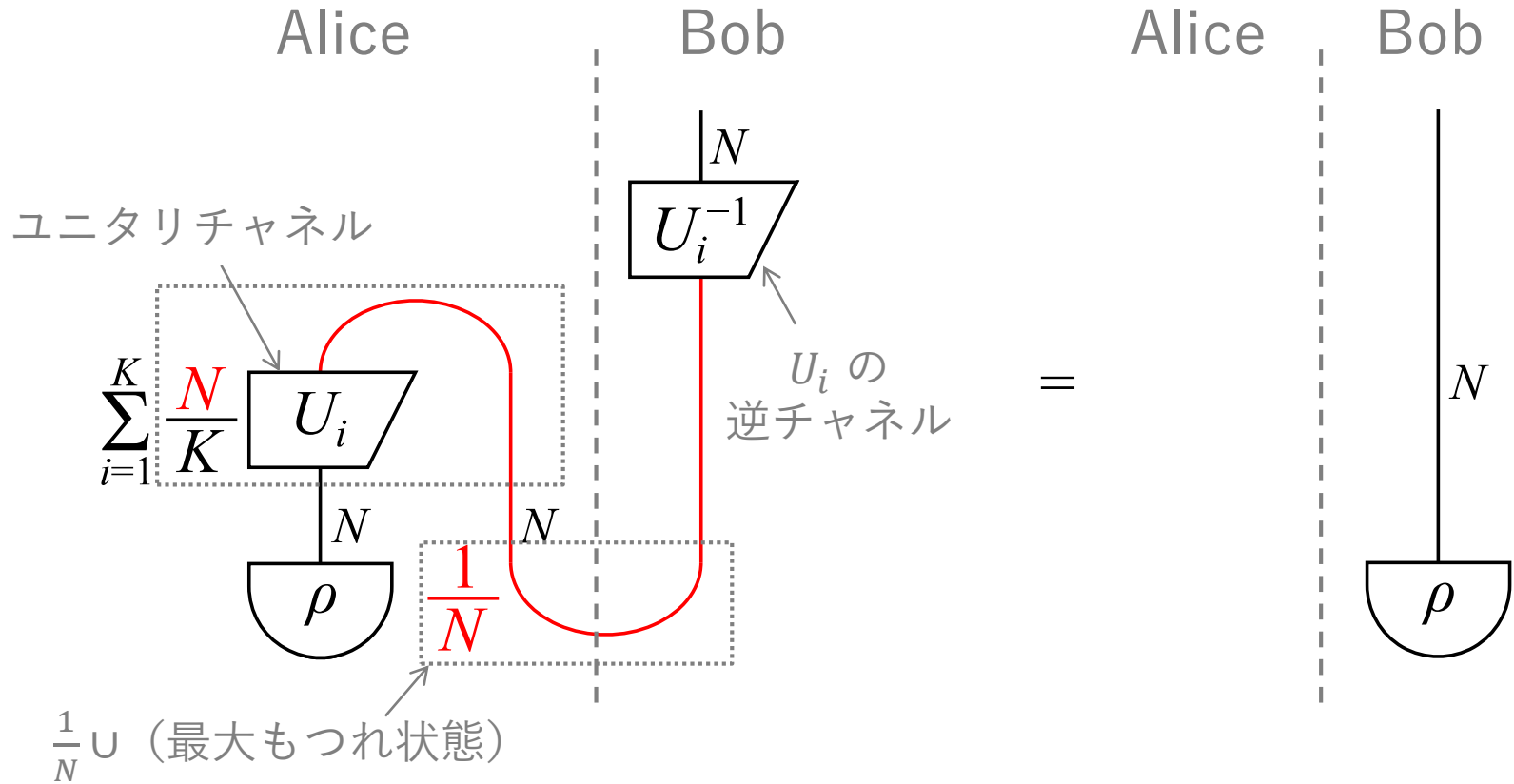
I_N

$|N$

$|N$

Tr

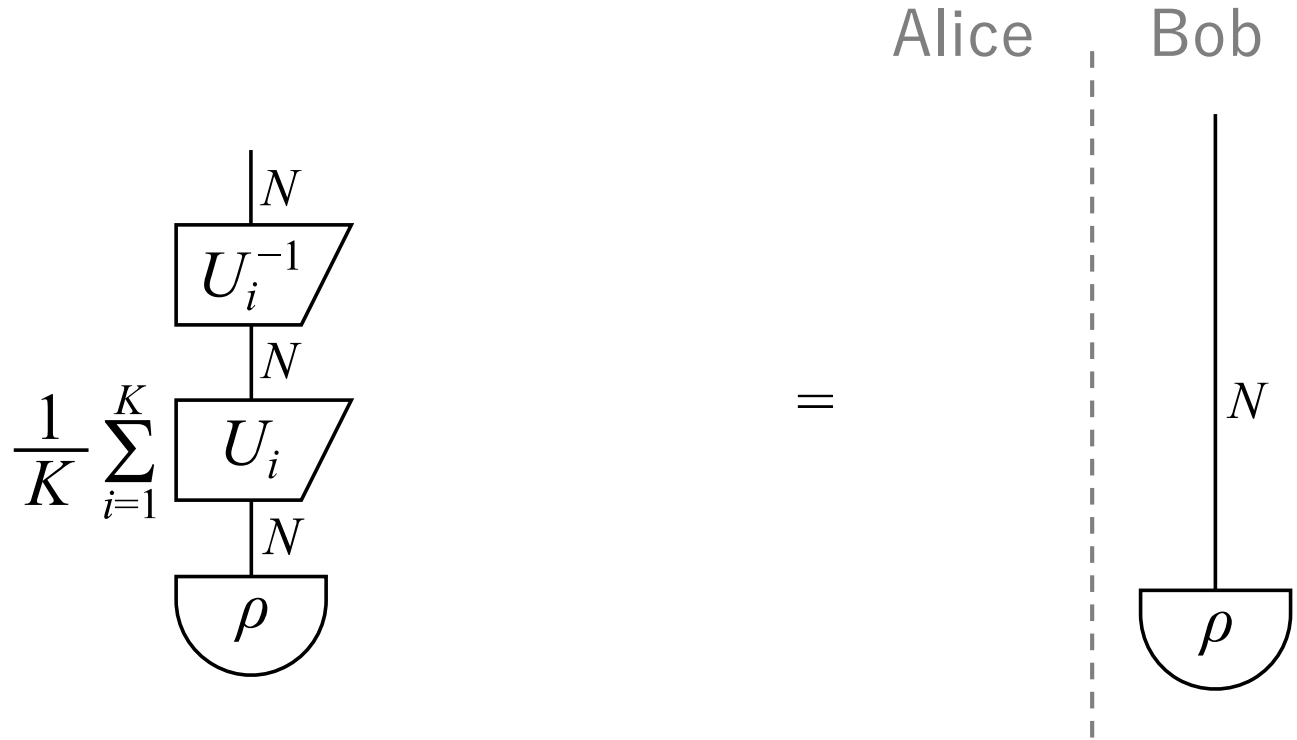
[ジグザグ等式の応用2] 量子テレポーテーション



ただし $\{U_i\}_{i=1}^K$ は $\frac{N}{K} \sum_{i=1}^K U_i$ を満たす

The diagrammatic equation shows the condition on the set of unitaries $\{U_i\}_{i=1}^K$. On the left, the expression is $\frac{N}{K} \sum_{i=1}^K U_i$, where each U_i is a trapezoid with a vertical line of size N entering from the top and exiting from the bottom. This is set equal to a diagram representing the identity channel I_N . The identity channel is shown as a vertical line of size N with a horizontal line above it labeled I_N and a horizontal line below it labeled Tr .

[ジグザグ等式の応用2] 量子テレポーテーション



ただし $\{U_i\}_{i=1}^K$ は $\frac{N}{K} \sum_{i=1}^K U_i = \begin{array}{c} |N\rangle \\ \hline \hline \hline |N\rangle \end{array}$ を満たす

I_N
 \swarrow
 Tr

目次

前半：チュートリアル

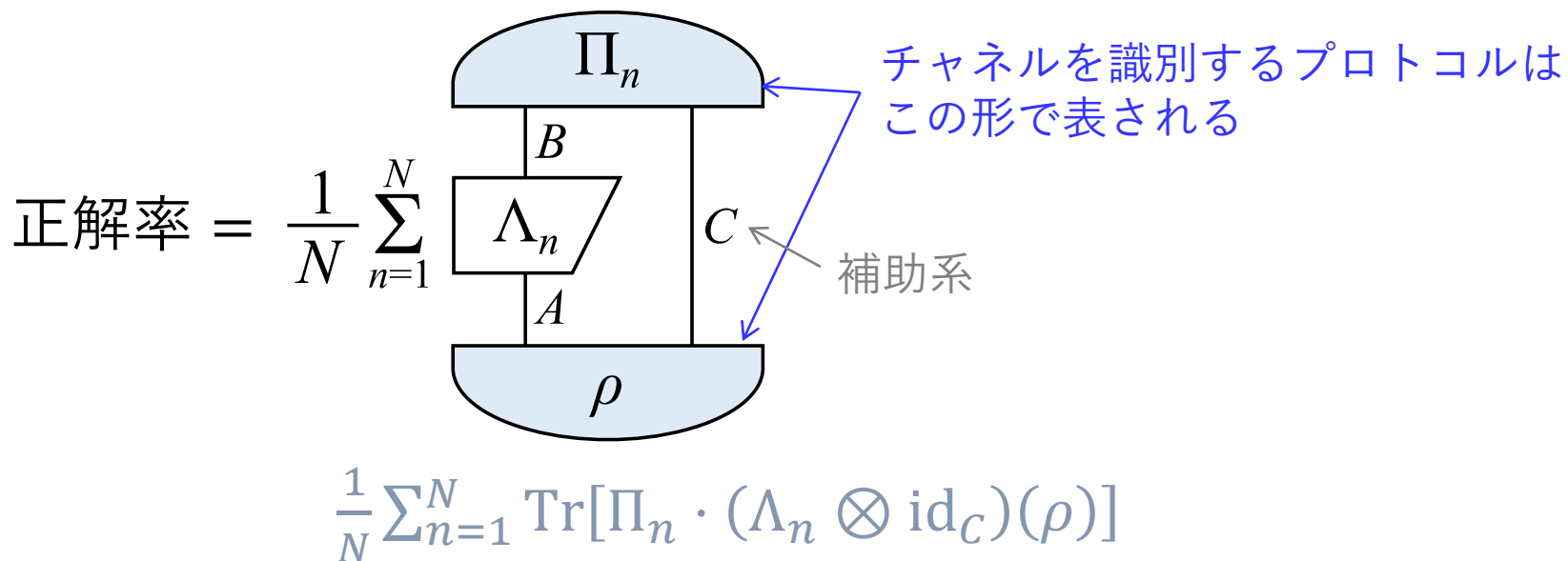
1. 関式とは
2. 量子論の関式の基礎

後半：応用例（研究紹介）

- 例 1：量子チャネル識別
- 例 2：識別能力

量子チャネル識別問題

チャネル $\Lambda_1, \dots, \Lambda_N$ をできるだけ正確に識別する問題を考える
(チャネルを施せるのは1度のみ)



正解率の最大値を求めたいが、
 ρ と $\{\Pi_n\}_n$ の両方を最適化する必要があり、困難

量子チャネル識別問題：式変形

次のように式変形する

$$\text{正解率} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \text{Diagram 1} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \text{Diagram 2}$$

Diagram 1: A state ρ on system A is processed by a channel Λ_n to produce system B . System B is then measured by an effect Π_n . The channel Λ_n is represented by a trapezoidal box with input A and output B . The Choi state C is shown as a vertical line connecting the input and output.

Diagram 2: The same setup as Diagram 1, but with the channel Λ_n and its Choi state $C(\Lambda_n)$ on system A , and the effect Π_n on system B . The Choi state $C(\Lambda_n)$ is shown as a state on system A , and the effect Π_n is shown as a state on system B . The diagram is labeled with "エフェクト" (effect) and " Λ_n のChoi状態 $C(\Lambda_n)$ ".

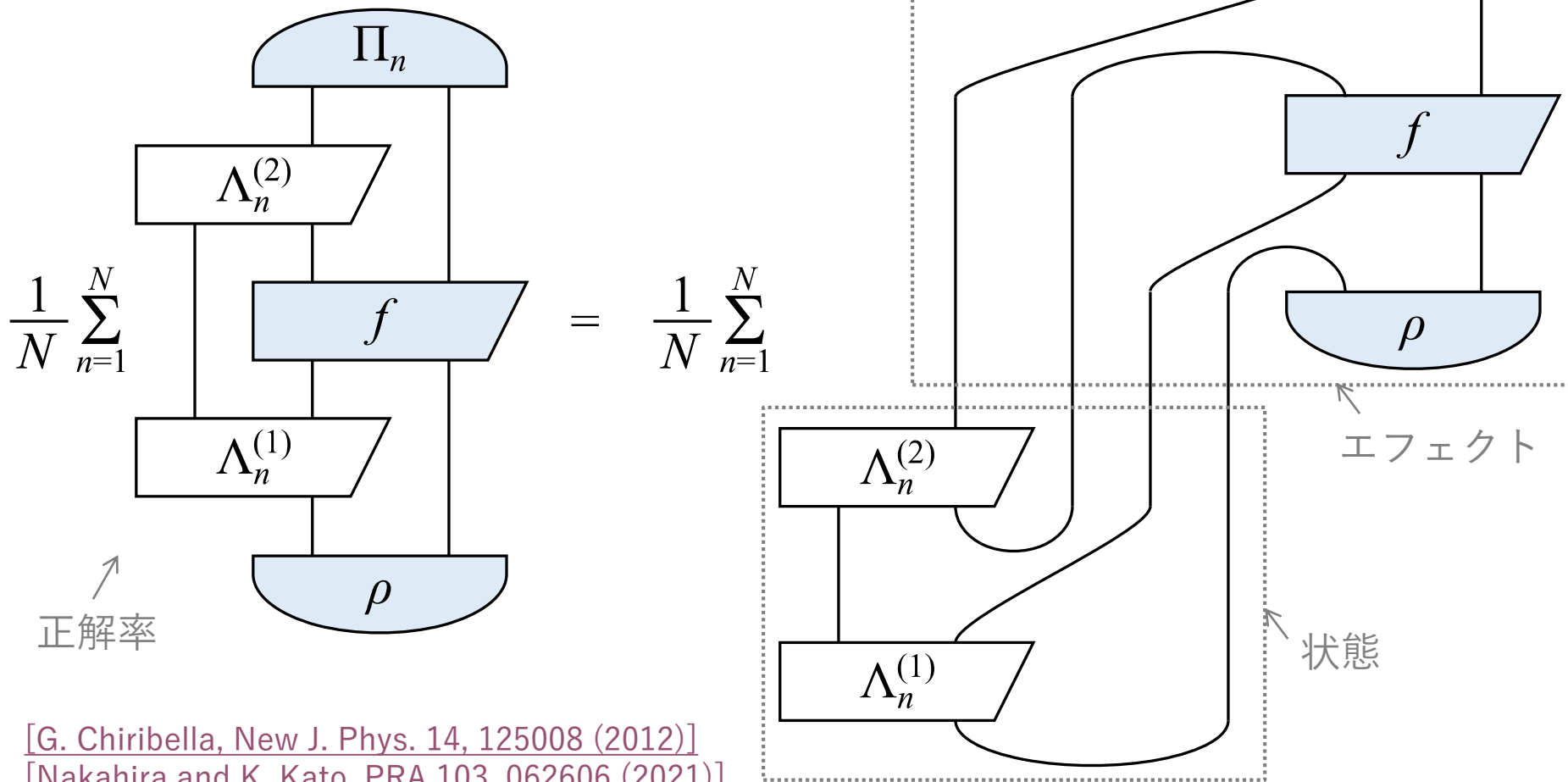
状態の組 $\{C(\Lambda_n)\}_n$ をあるエフェクトの組で識別する問題と捉えられて、**解析解や数値解を比較的容易に求められる**

多段のチャネル識別問題への拡張

多段の問題でも、同様の手法を適用できる

2段の例

チャネルのペア $(\Lambda_1^{(1)}, \Lambda_1^{(2)}), \dots, (\Lambda_N^{(1)}, \Lambda_N^{(2)})$ を識別する問題



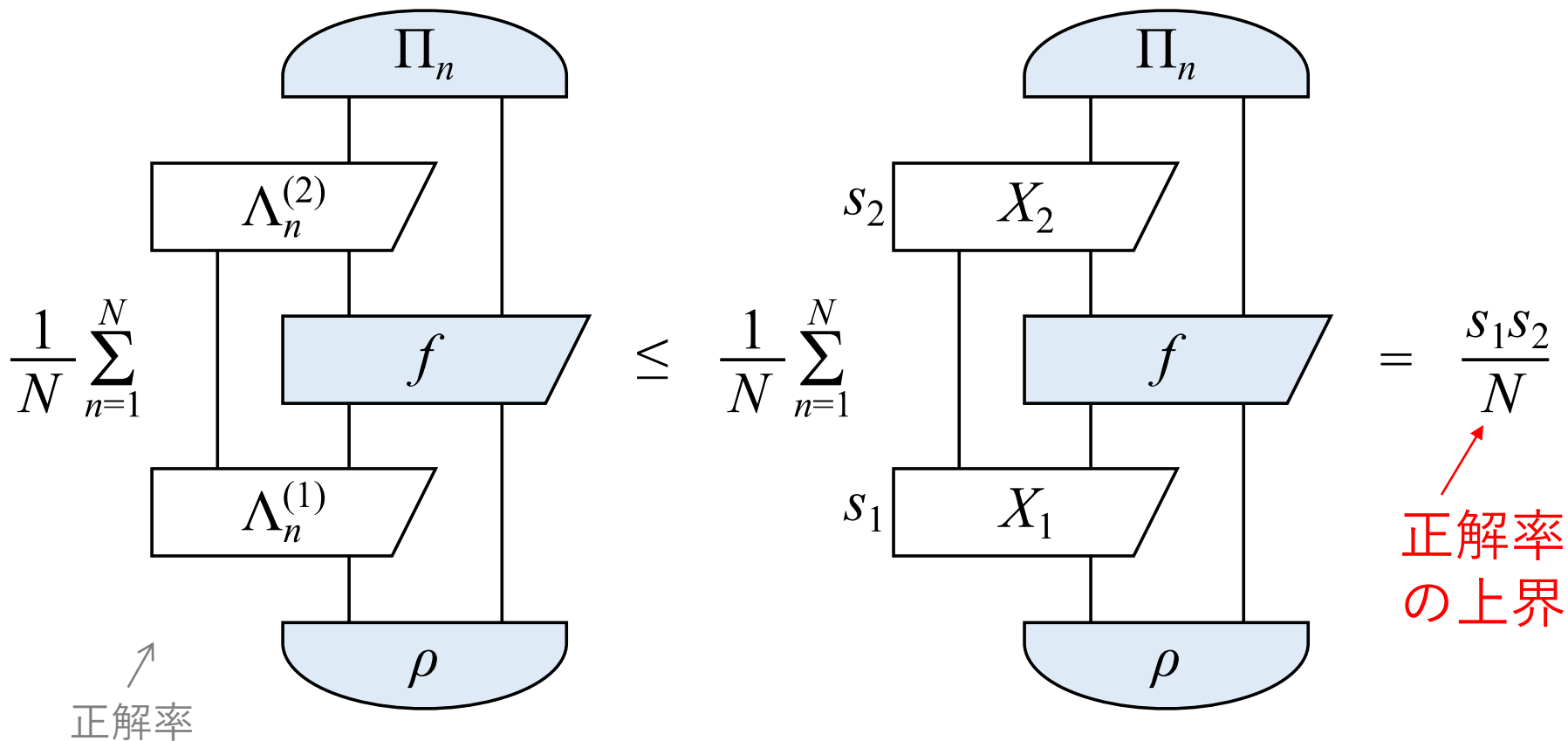
[G. Chiribella, New J. Phys. 14, 125008 (2012)]

[Nakahira and K. Kato, PRA 103, 062606 (2021)]

正解率の上界

[Nakahira and K. Kato, PRL 126, 200502 (2021)]

2段の例



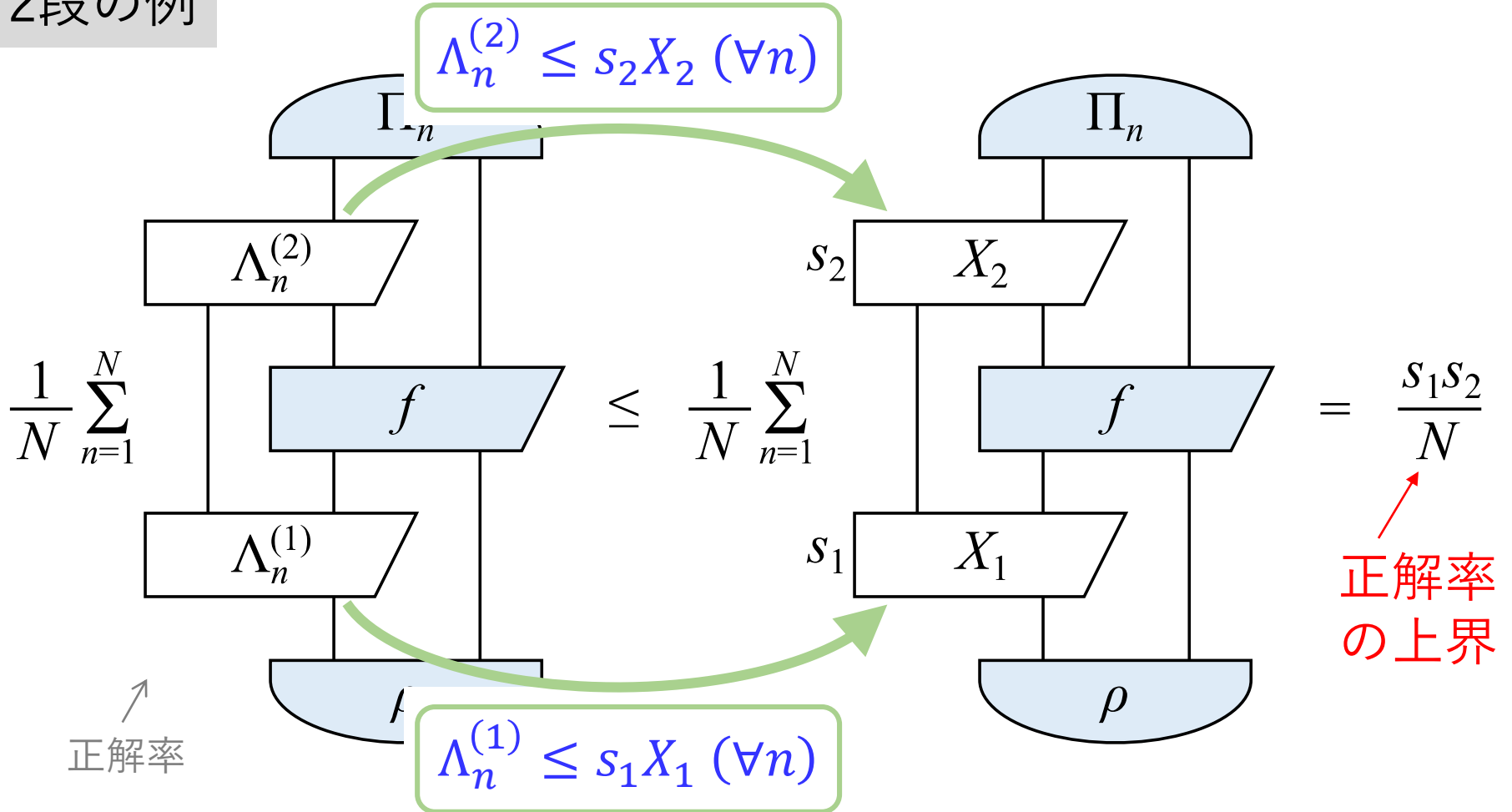
$\Lambda_n^{(1)} \leq s_1 X_1$ ($\forall n$) $*$ を満たすチャネル X_1 とできるだけ小さな実数 s_1 を求める ($\Lambda_n^{(2)}$ も同様)

$* f \leq g : g - f$ がCP写像

正解率の上界

[Nakahira and K. Kato, PRL 126, 200502 (2021)]

2段の例



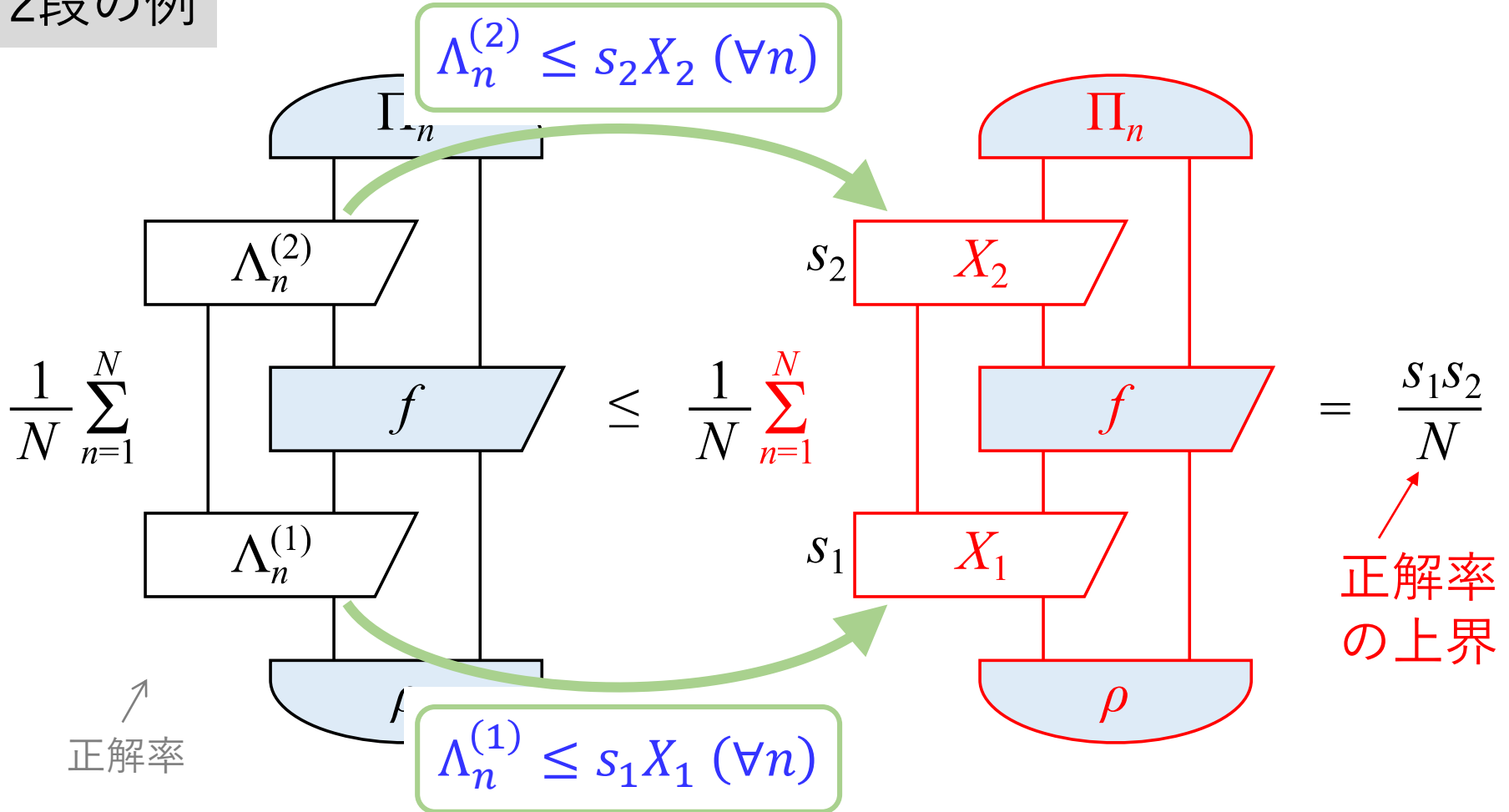
$\Lambda_n^{(1)} \leq s_1 X_1 (\forall n)$ ※ を満たすチャネル X_1 とできるだけ小さな実数 s_1 を求める ($\Lambda_n^{(2)}$ も同様)

※ $f \leq g : g - f$ がCP写像

正解率の上界

[Nakahira and K. Kato, PRL 126, 200502 (2021)]

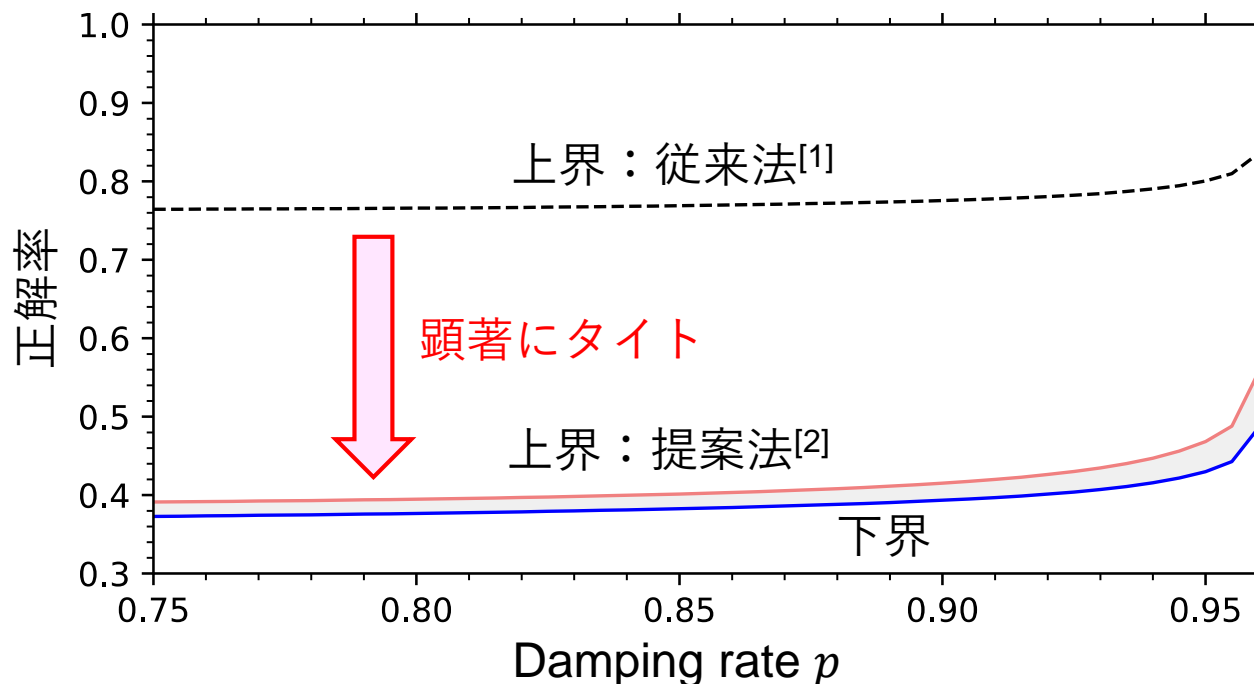
2段の例



$\Lambda_n^{(1)} \leq s_1 X_1 (\forall n)$ ※ を満たすチャネル X_1 とできるだけ小さな実数 s_1 を求める ($\Lambda_n^{(2)}$ も同様)

※ $f \leq g : g - f$ がCP写像

正解率の上界：結果



[1] [\[Q. Zhuang and S. Pirandola, PRL 125, 080505 \(2020\)\]](#)

[2] [\[Nakahira and K. Kato, PRL 126, 200502 \(2021\)\]](#)

[詳細] 以下のチャネルの識別を考えた

$$\Lambda_n^{(k)} = \begin{cases} A_p \otimes A_q \otimes A_q & (n = 1) \\ A_q \otimes A_p \otimes A_q & (n = 2) \\ A_q \otimes A_q \otimes A_p & (n = 3) \end{cases}$$

A_p と A_q は damping rate p と $q := p + 0.04$ の amplitude damping チャネル

目次

前半：チュートリアル

1. 関式とは
2. 量子論の関式の基礎

後半：応用例（研究紹介）

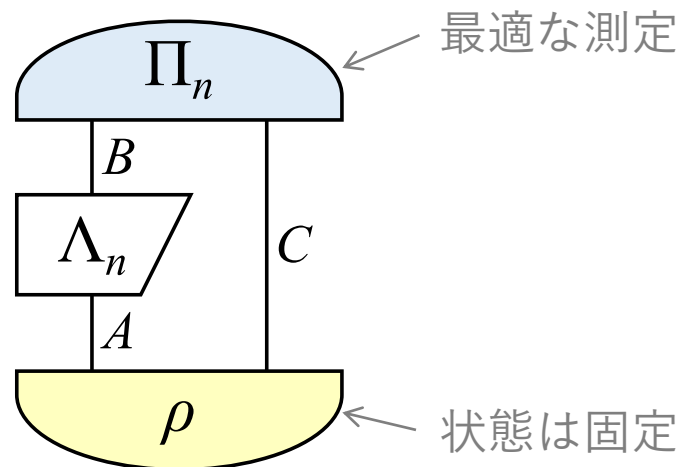
- 例 1：量子チャネル識別
例 2：識別能力

チャンネル識別でのもつれ状態の優位性

チャンネル $\Lambda_1, \dots, \Lambda_N$ の識別を考える

$$P_{\max}(\rho; \{\Lambda_n\}) := \max_{\{\Pi_n\}} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N$$

↑
最大正解率



任意のもつれ状態 ρ はどの separable な状態よりも真に優位か？

➡ $G(\rho, \text{Sep}) := \max_{\{\Lambda_n\}} \frac{P_{\max}(\rho; \{\Lambda_n\})}{\max_{\omega \in \text{Sep}} P_{\max}(\omega; \{\Lambda_n\})}$ は 1 より大きいのか？

↑
識別能力

(Sep : separable な状態全体)

➡ Yes [\[M. Piani et al., PRL 102, 250501 \(2009\)\]](#)

➡ $G(\rho, \text{Sep})$ の具体的な値は？

もつれ状態の識別能力

定理 $G(\rho, \mathbf{Sep})$ はロバストネス $R_{\mathbf{Sep}}(\rho)$ に等しい

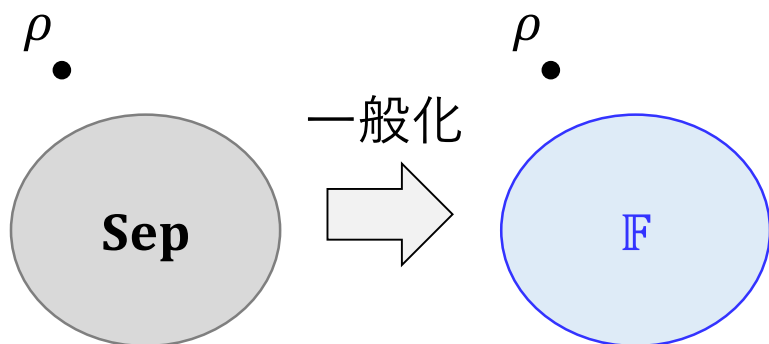
[J. Bae et al., PRL 122, 140404 (2019)]

ただし、ロバストネス $R_{\mathbb{F}}(\rho)$ (\mathbb{F} は $\mathbf{St}_{A \otimes C}$ の部分凸集合) は次式で定められる

($\mathbf{St}_{A \otimes C}$: $A \otimes C$ の正規状態全体)

$$R_{\mathbb{F}}(\rho) := \max_{x \in \mathcal{X}} \text{Tr}(x\rho), \quad \mathcal{X} := \{x \geq 0 \mid \text{Tr}(x\omega) \leq 1 \ (\forall \omega \in \mathbb{F})\}$$

問い 「もつれ vs separable」 以外のより一般の問題では？



集合 \mathbb{F} の例：

- ・量子相関がない状態の全体
- ・Bell local状態全体
- など，多数

(**Sep** : separableな状態全体)

一般の問題における識別能力

問題 一般の \mathbb{F} に対して $G(\rho, \mathbb{F}) := \max_{\{\Lambda_n\}} \frac{P_{\max}(\rho; \{\Lambda_n\})}{\max_{\omega \in \mathbb{F}} P_{\max}(\omega; \{\Lambda_n\})}$ は？

→ 一部のケース※を除いて求められていなかった

※ [\[C. Napoli et al., PRL 116, 150502 \(2016\)\]](#),
[\[K. Bu et al., PRL 119, 150405 \(2017\)\]](#),

[\[M. Piani et al., PRA 93, 042107 \(2016\)\]](#),
[\[R. Takagi et al., PRL 122, 140402 \(2019\)\]](#)

→ important outstanding open question

[\[R. Takagi et al., PRL 122, 140402 \(2019\)\]](#)

定理 任意の \mathbb{F} について、 $G(\rho, \mathbb{F})$ は $R_{\bar{\mathbb{F}}}(\rho)$ に等しい

$\bar{\mathbb{F}}$: $(\text{id}_A \otimes \Gamma)\omega$ の形 (ただし $\omega \in \mathbb{F}$ で、 Γ は C 上のチャネル) で表される状態の全体の凸包

[\[Nakahira, PRA 112, 032414 \(2025\)\]](#)

ロバストネス $R_{\mathbb{F}}(\rho)$ の直観的で素直な操作的意味付けを与えられた

補助系がないチャネル識別問題に限定すれば,
 $R_{\mathbb{F}}(\rho) = G(\rho, \mathbb{F})$ が得られる

証明の概要 1/4

定理 (再掲) 任意の \mathbb{F} について, $G(\rho, \mathbb{F})$ は $R_{\mathbb{F}}(\rho)$ に等しい

- $G(\rho, \mathbb{F}) \leq R_{\mathbb{F}}(\rho)$ は容易に示せる

(ほかの論文の手法をそのまま適用できる)

- $G(\rho, \mathbb{F}) \geq R_{\mathbb{F}}(\rho)$ を示すためには,

ある $s > 0$ と $\{\Lambda_n\}$ が存在して

$$(1) P_{\max}(\rho; \{\Lambda_n\}) \geq s \cdot R_{\mathbb{F}}(\rho)$$

$$(2) P_{\max}(\omega; \{\Lambda_n\}) \leq s \quad (\forall \omega \in \mathbb{F})$$

を満たすことを示せば十分

$$\left[\because G(\rho, \mathbb{F}) := \max_{\{\Lambda'_n\}} \frac{P_{\max}(\rho; \{\Lambda'_n\})}{\max_{\omega \in \mathbb{F}} P_{\max}(\omega; \{\Lambda'_n\})} \geq \frac{P_{\max}(\rho; \{\Lambda_n\})}{\max_{\omega \in \mathbb{F}} P_{\max}(\omega; \{\Lambda_n\})} \stackrel{\text{条件(1),(2)}}{\geq} R_{\mathbb{F}}(\rho) \right]$$

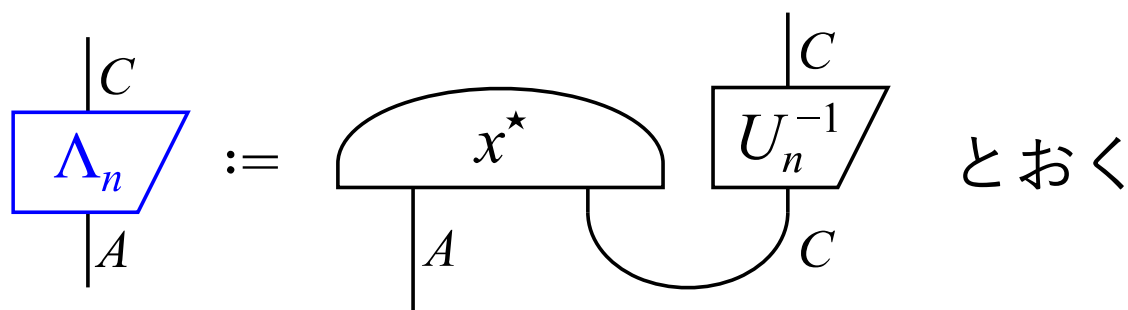
量子テレポーテーションに似た図式を用いて, 青字部分を示す

証明の概要 2/4

■ s と $\{\Lambda_n\}$ の特定

$$R_{\overline{\mathbb{F}}}(\rho) := \max_{x \in \mathcal{X}} \text{Tr}(x\rho), \quad \mathcal{X} := \{x \geq 0 \mid \text{Tr}(x\omega) \leq 1 \ (\forall \omega \in \overline{\mathbb{F}})\}$$

の右辺を最大化する x を x^* とおき,



ただし $\{U_n\}$ は量子テレポーテーションの例で述べたユニタリチャネルの組

$$\left[\text{ある } s > 0 \text{ に対して } s \sum_{n=1}^N \begin{array}{c} |C \\ \hline U_n \\ \hline |C \end{array} = \begin{array}{c} |C \\ \hline \hline \hline |C \end{array} \text{ を満たす} \right]$$

※ Λ_n は一般にチャネルではないが、少し工夫すれば Λ_n に対応するチャネルが得られる

証明の概要 3/4

示したい式

$$(1) P_{\max}(\rho; \{\Lambda_n\}) \geq s \cdot R_{\overline{\mathbb{F}}}(\rho)$$

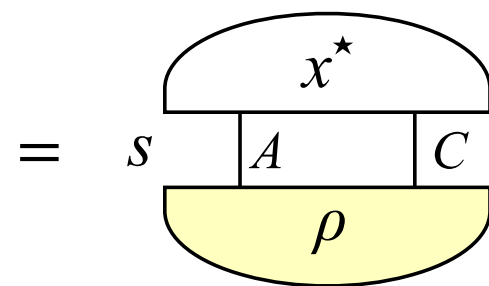
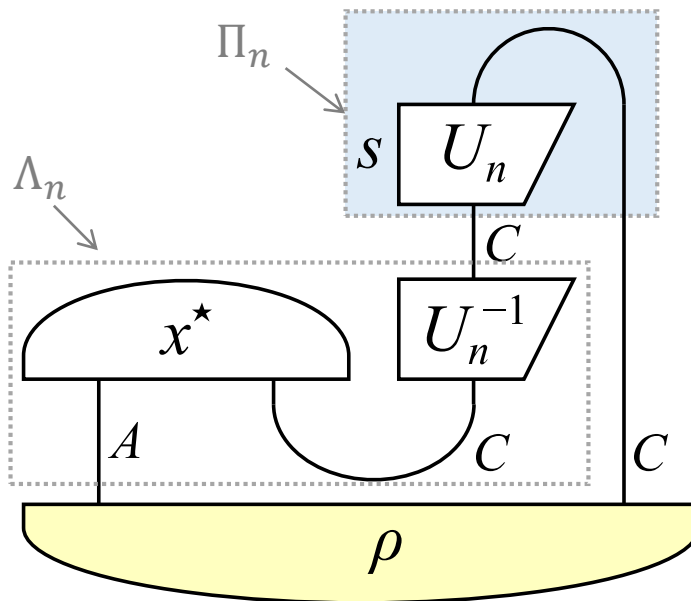
$$(2) P_{\max}(\omega; \{\Lambda_n\}) \leq s \quad (\forall \omega \in \mathbb{F})$$

(1)

測定 $\{\Pi_n\}_{n=1}^N$ を  $:=$  で定める

$$P_{\max}(\rho; \{\Lambda_n\}) \geq$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N$$



x^* の定義

$$= s \cdot R_{\overline{\mathbb{F}}}(\rho)$$

最大正解率

測定 $\{\Pi_n\}_{n=1}^N$ を用いたときの正解率

証明の概要 4/4

示したい式

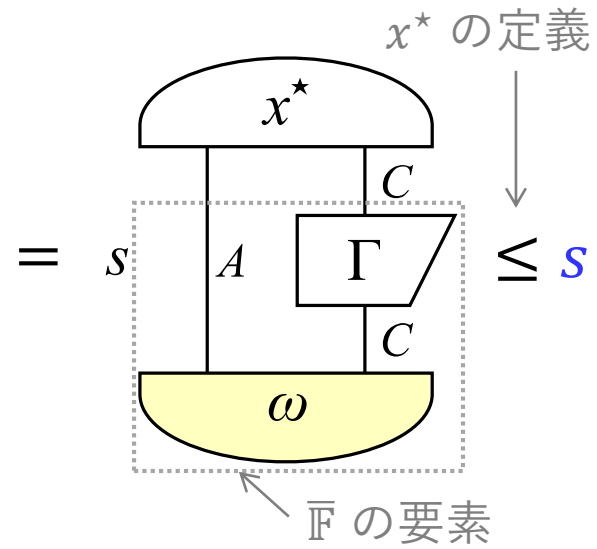
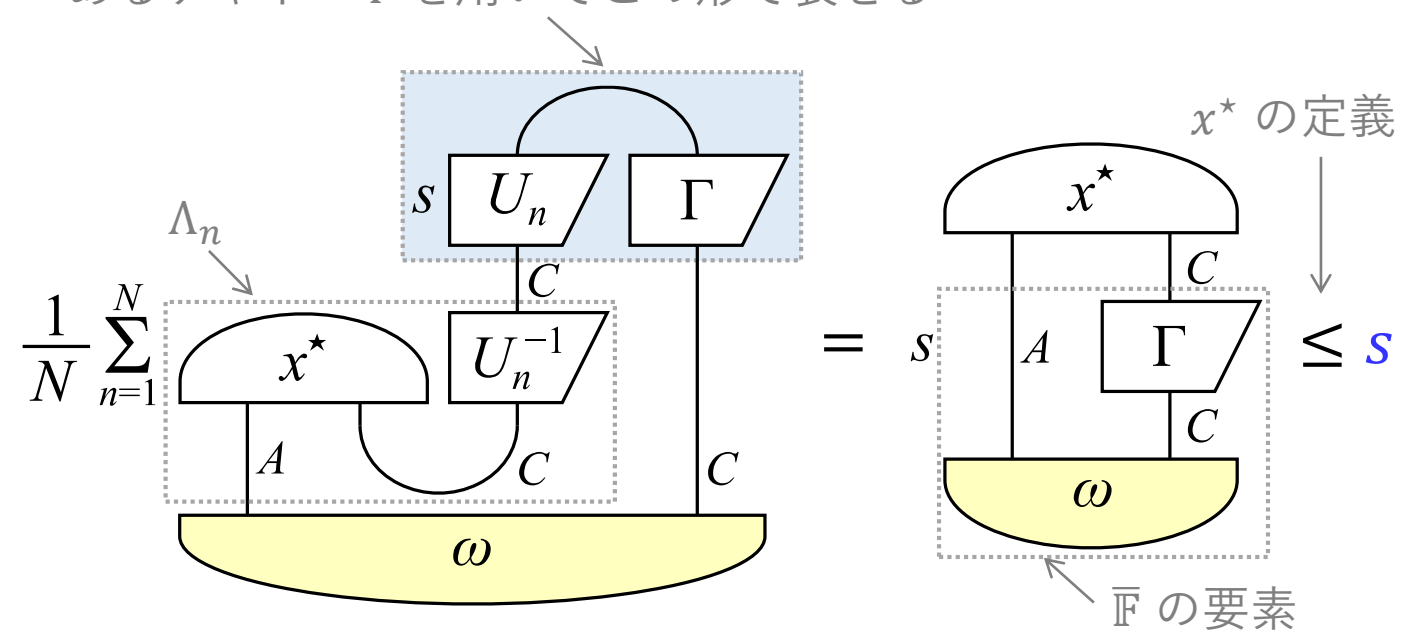
$$(1) P_{\max}(\rho; \{\Lambda_n\}) \geq s \cdot R_{\bar{\mathbb{F}}}(\rho)$$

$$(2) P_{\max}(\omega; \{\Lambda_n\}) \leq s \quad (\forall \omega \in \bar{\mathbb{F}})$$

(2)

正解率を最大化する測定は
あるチャネル Γ を用いてこの形で表せる

$$P_{\max}(\omega; \{\Lambda_n\}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N$$



証明の概要 4/4

示したい式

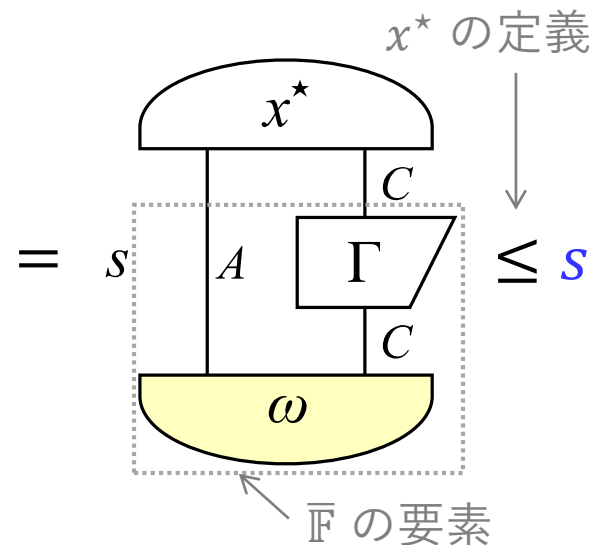
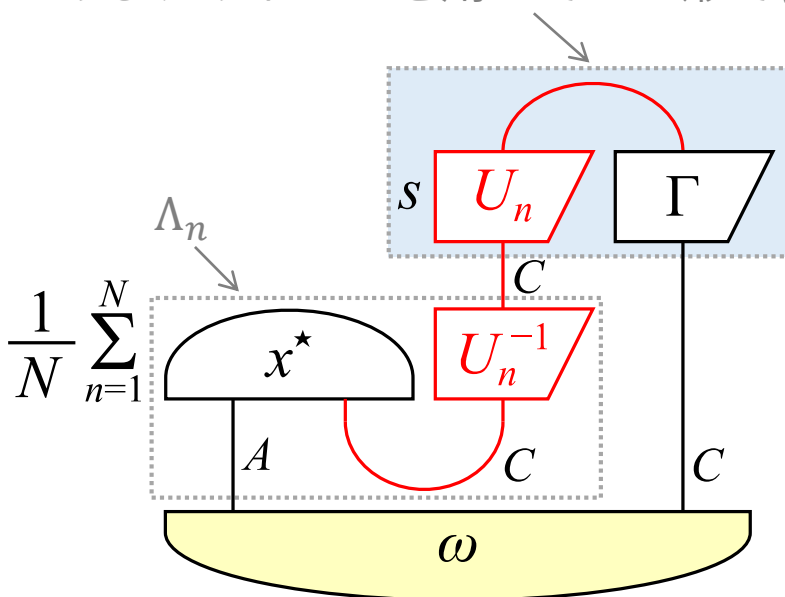
$$(1) P_{\max}(\rho; \{\Lambda_n\}) \geq s \cdot R_{\bar{\mathbb{F}}}(\rho)$$

$$(2) P_{\max}(\omega; \{\Lambda_n\}) \leq s \quad (\forall \omega \in \bar{\mathbb{F}})$$

(2)

正解率を最大化する測定は
あるチャネル Γ を用いてこの形で表せる

$$P_{\max}(\omega; \{\Lambda_n\}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N$$



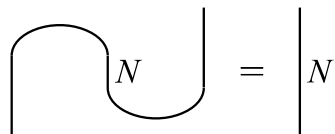
$\leq s$

$\bar{\mathbb{F}}$ の要素

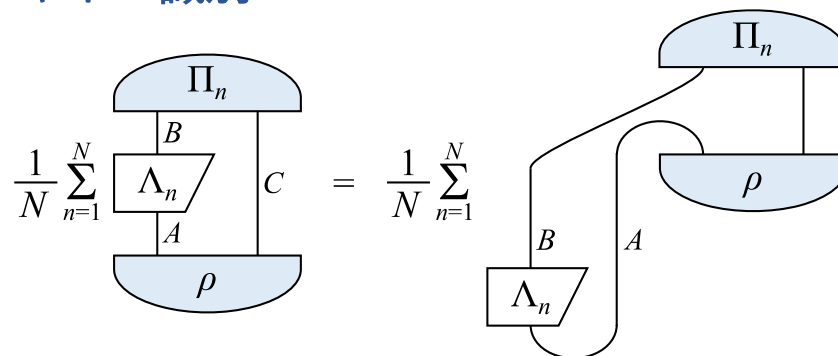
まとめ

量子論における図式表現の基礎とその応用事例を紹介した

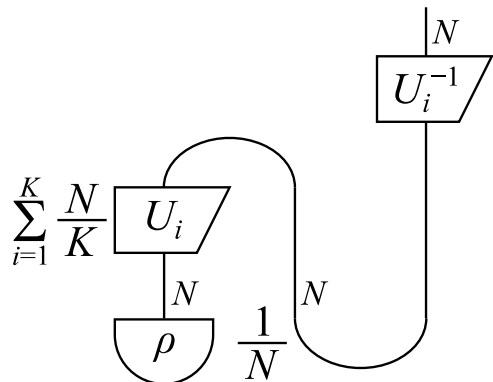
ジグザグ等式



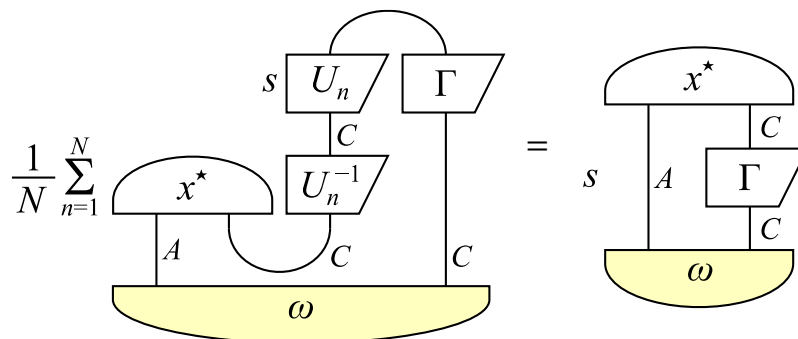
チャネル識別



量子テレポーテーション



識別能力



図式は量子論の今後の発展に大きく寄与する可能性がある

新たな視点を得るためのツールとして
図式の活用範囲の拡大を期待