

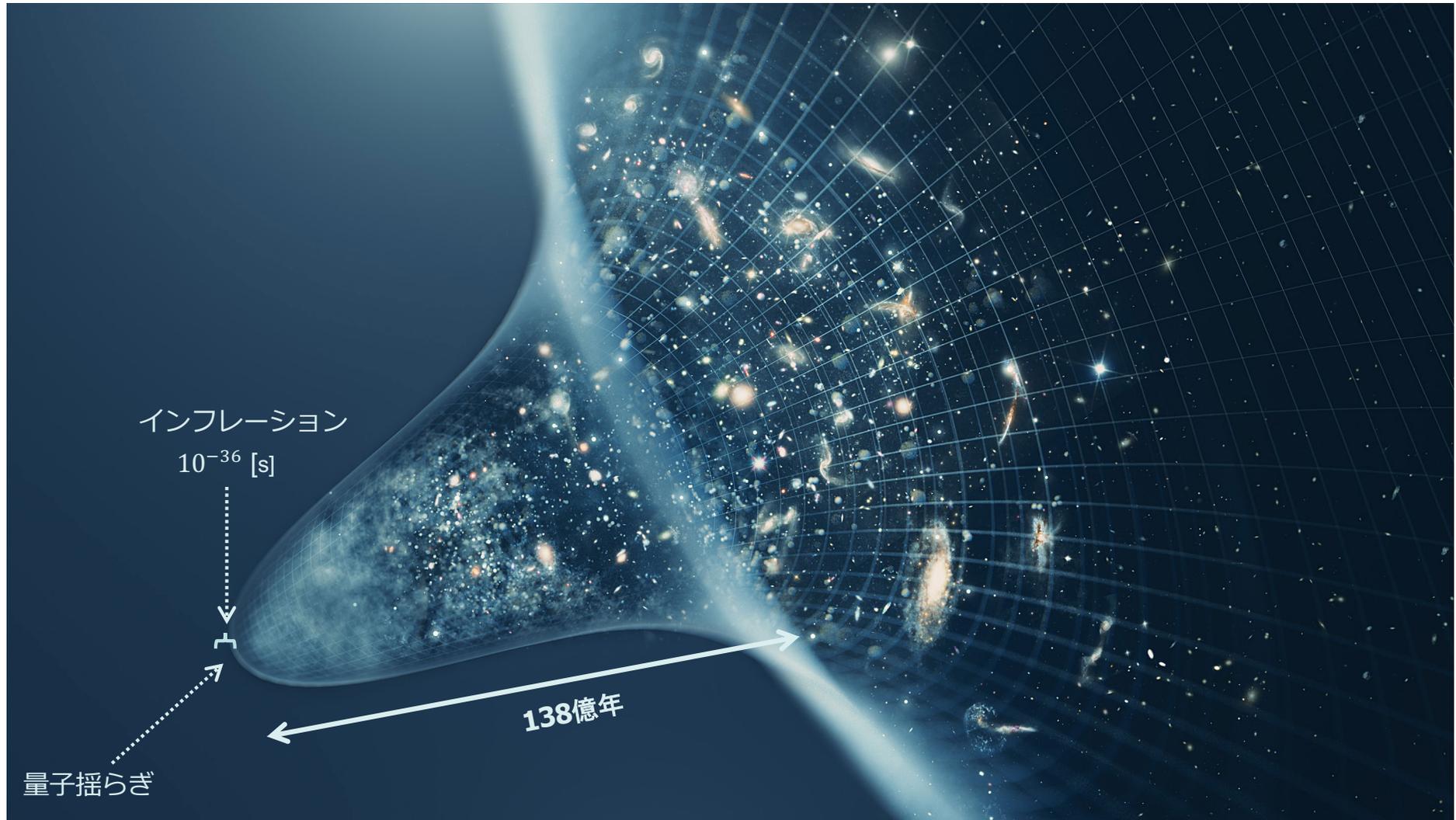
時空の量子力学と宇宙

九州大学 理学研究院 菅野 優美

共同研究者：早田次郎(神戸大)、谷口彰
arXiv:2508.17947

インフレーション理論

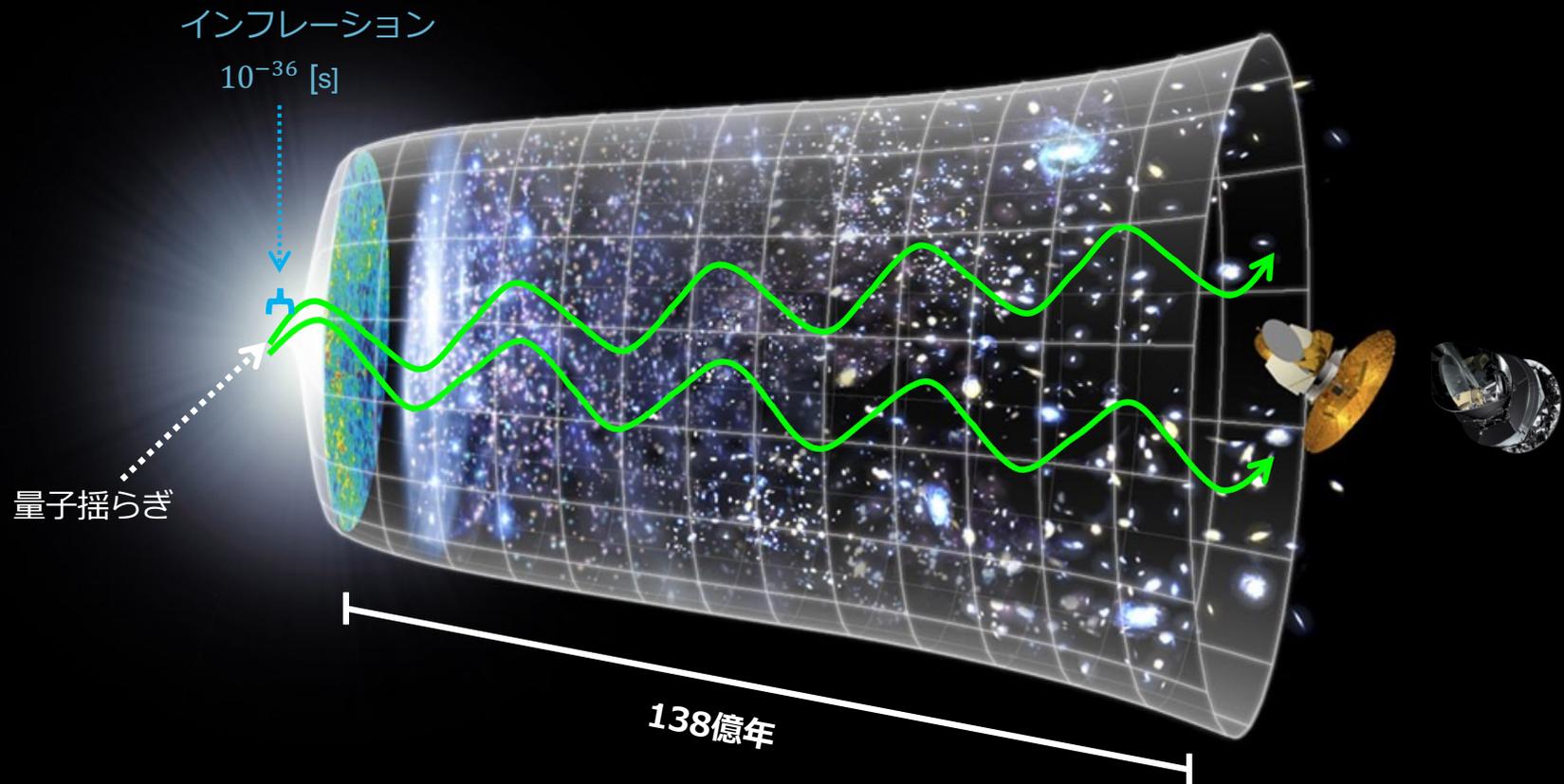
- ★ 現象論的にもっとも成功した理論



私たちの宇宙が確かに量子揺らぎから始まったという決定的な証拠はない

原始重力波

原始重力波は、インフレーション中に量子ゆらぎから直接生成される重力波



原始重力波を生成するための
原始重力波は生成された際の量子性を保ったまま伝播してくる... 現在、原始重力波を
測定することは期待される
... インフレーション宇宙のみが実現可能

もし原始重力波が観測されたら

原始重力波が教えてくれるものは、、、

宇宙の起源の情報

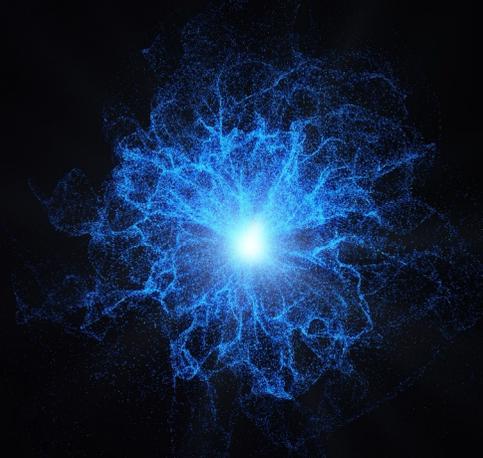
インフレーション宇宙を証明することになる

グラビトン（重力子）の発見につながる

連星ブラックホールからの重力波を使って、原始重力波の存在を確かめるられないか？

重力波は古典的な波として解析されている

量子力学は、自然を記述する最も基本的な枠組み



量子論の枠組みで、古典的な波はどう記述されるべきか？

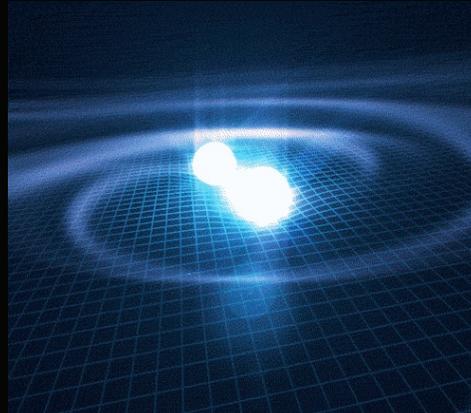
量子光学では、電磁波（古典的な波として記述される）は、フォトン
のコヒーレント状態(古典的な記述に近い量子状態)として記述される

フォトンの量子状態は常にコヒーレント状態というわけではない

ソースによっては、古典的には存在しない量子状態 - スクワイーズド状態にもなる

重力波は?

重力波も量子論的な記述が求められる



量子光学と同様に、古典的な重力波もグラビトン(重力子)のコヒーレント状態として記述されるはず

さらに、強い重力場中ではグラビトンの状態がスクイズド状態になることがある

例) インフレーション中の原始重力波

ブラックホールからのホーキング放射

連星ブラックホールからの重力波もスクイズド状態になっているかも

コヒーレント状態?

定義： $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$

コヒーレント状態は粒子を消滅させても変わらない状態

固有値方程式の形式解

$$|\alpha\rangle = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})|0\rangle \equiv \hat{D}(\alpha)|0\rangle$$

コヒーレント状態は真空演算子空間で真空を α だけ変位させた状態

フォトンのコヒーレント状態は、古典的な電流が量子化された電場と相互作用を考える

$$H_{\text{int}} = \int d^3x \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{A}}(t, \mathbf{x})$$

古典的な電流

$$\hat{A}_i(t, x^i) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} (\hat{a}_k e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e_i(\mathbf{k}) + \text{h.c.})$$

真空の時間発展を考えると

$$\exp\left(-i \int dt H_{\text{int}}\right)|0\rangle = \exp\left[\int d^3k (\alpha_k a_k^\dagger - \alpha_k^* a_k)\right]|0\rangle$$

変位演算子

コヒーレントパラメーター

$$\alpha_k = -\frac{i}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} \int dt e_i(\mathbf{k}) e^{i\omega_k t} j_i(t, -\mathbf{k})$$

なぜコヒーレント状態は古典的と呼ばれる？

コヒーレント状態は、ハイゼンベルグの不確定性関係が最小

定義

$$X = \frac{a + a^\dagger}{\sqrt{2}} \quad P = \frac{a - a^\dagger}{\sqrt{2}i} \quad [X, P] = i \rightarrow [a, a^\dagger] = 1$$

平均

$$\langle \alpha | X | \alpha \rangle = \frac{\alpha + \alpha^*}{\sqrt{2}} \quad \langle \alpha | P | \alpha \rangle = \frac{\alpha - \alpha^*}{i\sqrt{2}}$$

偏差

$$(\Delta X)^2 = \langle \alpha | (X - \langle X \rangle)^2 | \alpha \rangle = \frac{1}{2} \quad (\Delta P)^2 = \langle \alpha | (P - \langle P \rangle)^2 | \alpha \rangle = \frac{1}{2}$$

ハイゼンベルグの不確定性関係

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{1}{2} \quad \dots \text{コヒーレント状態はこの不等式の最小の値になっている}$$

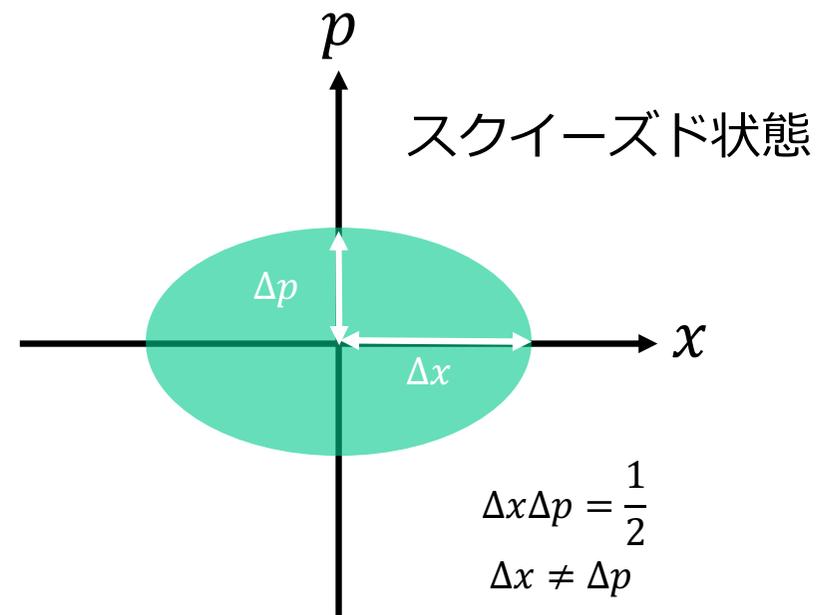
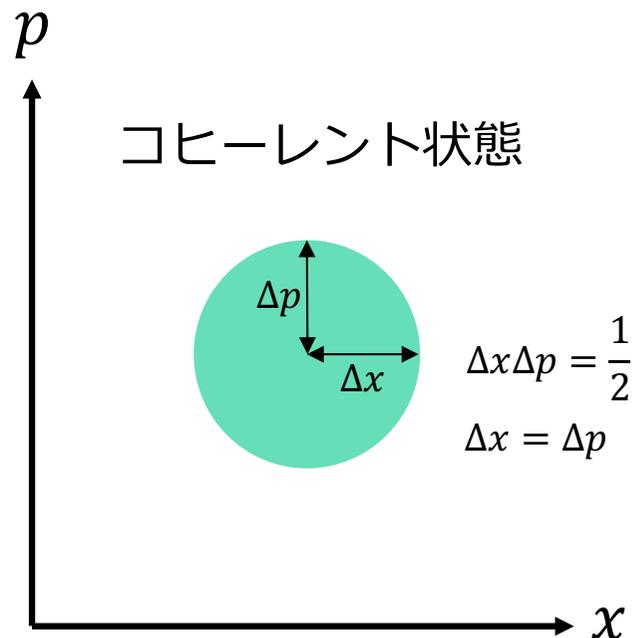
スクイーズド状態は？

定義：
$$|\beta\rangle = \exp(\beta \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger - \beta^* \hat{a} \hat{a}) |0\rangle, \beta = r e^{i\varphi}$$

スクイーズ演算子

スクイージングパラメーター

$$\equiv \hat{S}(\beta) |0\rangle$$



フォトンのスクイーズド状態は、媒質の非線形応答によって生成される

重力場の場合は？

重力場の場合に、コヒーレント、スクイーズド状態はどう生成できる？

真空の時間発展

$$\exp\left(-i \int dt H_{\text{int}}\right) |0\rangle$$

相互作用ハミルトニアン

$$H_{\text{int}} = \int d^3x \left[\underbrace{T_{ij}(t)}_{\text{古典}} \underbrace{\hat{h}_{ij}(t, \mathbf{x}(t))}_{\text{コヒーレント状態}} \overset{h_{ij} \text{に関する1次}}{+} \underbrace{\Lambda_{ijk\ell}(t)}_{\text{古典}} \underbrace{\hat{h}_{ij}(t, \mathbf{x}(t))}_{\text{スクイーズド状態}} \underbrace{\hat{h}_{k\ell}(t, \mathbf{x}(t))}_{\text{スクイーズド状態}} \dots \right] \overset{h_{ij} \text{に関する2次}}{}$$

量子化された重力場

$$\hat{h}_{ij}(\eta, \mathbf{x}) = \frac{2}{M_{\text{pl}}} \sum_{P=+, \times} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left[\frac{e^{-i\omega_k t}}{\sqrt{2\omega_k}} e_{ij}^{(P)}(\mathbf{k}) a^{(P)}(\mathbf{k}) + \frac{e^{i\omega_k t}}{\sqrt{2\omega_k}} e_{ij}^{(P)}(-\mathbf{k}) a^{(P)\dagger}(-\mathbf{k}) \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

セットアップ

作用

$$S = S_{\text{EH}} + S_1 + S_2$$
$$= \frac{M_{\text{pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R - m_1 \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\tau - m_2 \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\tau$$

固有時間
粒子の測地線

$$, M_{\text{pl}}^2 = \frac{1}{8\pi G}$$

重力波のメトリック (粒子の反作用は無視する)

$$ds^2 = -dt^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j$$

$h_{ij}{}^{,j} = h^i{}_i = 0$ を満たす

重力場の作用

$$S_{\text{EH}} = \frac{M_{\text{pl}}^2}{8} \int d^4x [\dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} - h_{ij,k} h_{ij,k}] \quad \cdot = \partial_t$$

正準規格化された場

$$\psi_{ij} \equiv h_{ij} \frac{M_{\text{pl}}}{2}$$

重力波の量子化

重力波の量子化

$$[\psi_{ij}(t, \mathbf{x}), \dot{\psi}^{k\ell}(t, \mathbf{x}')] = \frac{i}{2} (P_i^k P_j^\ell + P_i^\ell P_j^k - P_{ij} P^{k\ell}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

Transverse projection tensor

$$P_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2}$$

重力場

$$h_{ij}(\eta, \mathbf{x}) = \frac{2}{M_{\text{pl}}} \sum_{P=+, \times} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \left[\frac{e^{-i\omega_k t}}{\sqrt{2\omega_k}} e_{ij}^{(P)}(\mathbf{k}) a^{(P)}(\mathbf{k}) + \frac{e^{i\omega_k t}}{\sqrt{2\omega_k}} e_{ij}^{(P)}(-\mathbf{k}) a^{(P)\dagger}(-\mathbf{k}) \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

交換関係

$$[a^{(P)}(\mathbf{k}), a^{(Q)\dagger}(\mathbf{k}')] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta^{PQ}$$

相互作用ハミルトニアン

粒子の測地線 ζ_N ($N = 1, 2$) に対する作用: 相互作用を含む

$$S_1 + S_2 = - \sum_{N=1,2} m_N \int_{\zeta_N} \sqrt{dt^2 - \delta_{ij} dx^i dx^j + h_{ij}(t, \bar{\mathbf{x}}_N(t)) dx^i dx^j}$$

N番目の粒子の軌道

$$= - \sum_{N=1,2} m_N \int_{\zeta_N} dt \frac{1}{\gamma_N} \sqrt{1 - \gamma_N^2 h_{ij}(t, \bar{\mathbf{x}}_N(t)) v_N^i v_N^j}$$

ローレンツファクター

$$\gamma_N = \frac{1}{\sqrt{1-v_N^2}}, \quad v_N^2 = v_N^i v_N^i, \quad v_N^i = \frac{dx_N^i}{dt}$$

ルジャンドル変換を行なって h_{ij} に関する2次までとると相互作用ハミルトニアンは

$$H_{\text{int}}(t, \bar{\mathbf{x}}) = \sum_{N=1,2} \left[\frac{\gamma_N^3 m_N}{2} v_N^i v_N^j h_{ij}(t, \bar{\mathbf{x}}_N(t)) \right. \xrightarrow{\text{コヒーレント状態}}$$

古典的なソース h_{ij} に関する1次

$$+ \left. \frac{3}{8} \gamma_N^5 m_N v_N^i v_N^j v_N^\ell v_N^m h_{ij}(t, \bar{\mathbf{x}}_N(t)) h_{\ell m}(t, \bar{\mathbf{x}}_N(t)) \right] \xrightarrow{\text{スクイーズド状態}}$$

古典的なソース h_{ij} に関して2次

コヒーレント状態の生成

h_{ij} の1次による時間発展演算子

$$\hat{U}(t, \bar{\mathbf{x}}) = T \exp \left(-i \int^t dt' \hat{H}_{\text{int}}(t') \right)$$

ここで

$$\hat{h}_{ij}(\eta, x^i) = \frac{2}{M_{\text{pl}}} \sum_{P=+, \times} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \left[\frac{e^{-i\omega_k t}}{\sqrt{2\omega_k}} e_{ij}^{(P)}(\mathbf{k}) \hat{a}^{(P)}(\mathbf{k}) + \frac{e^{i\omega_k t}}{\sqrt{2\omega_k}} e_{ij}^{(P)}(-\mathbf{k}) \hat{a}^{(P)\dagger}(-\mathbf{k}) \right] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

$$\hat{H}_{\text{int}}(t, \bar{\mathbf{x}}) = \sum_{N=1,2} \left[\frac{\gamma_N^3 m_N}{2} \hat{h}_{ij}(t, \bar{\mathbf{x}}_N(t)) v_N^i v_N^j \right]$$

時間発展演算子

$$\hat{U}(t, \bar{\mathbf{x}}_N) = \exp \left[-i \frac{2}{M_{\text{pl}}} \sum_{N=1,2} \frac{\gamma_N^3 m_N}{2} \sum_{P=+, \times} \int^t dt' \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \right. \\ \left. \times \left(\frac{e^{-i\omega_k t}}{\sqrt{2\omega_k}} e_{ij}^{(P)}(\mathbf{k}) \hat{a}^{(P)}(\mathbf{k}) + \frac{e^{i\omega_k t}}{\sqrt{2\omega_k}} e_{ij}^{(P)}(-\mathbf{k}) \hat{a}^{(P)\dagger}(-\mathbf{k}) \right) e^{i\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{x}}_N} v_N^i v_N^j \right]$$

コヒーレントパラメーター

時間発展演算子

$$\hat{U}(t, \bar{\mathbf{x}}_N) = \prod_P \exp \left[-i \frac{2}{M_{\text{pl}}} \sum_{N=1,2} \frac{\gamma_N^3 m_N}{2} \int^t dt' \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \right. \\ \left. \times \left(\frac{e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} e_{ij}^{(P)}(\mathbf{k}) \hat{a}^{(P)}(\mathbf{k}) + \frac{e^{i\omega_{\mathbf{k}} t}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} e_{ij}^{(P)}(-\mathbf{k}) \hat{a}^{(P)\dagger}(-\mathbf{k}) \right) e^{i\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{x}}_N} v_N^i v_N^j \right]$$

を変位演算子の定義と比較

$$\hat{D}(\alpha) = \prod_P \exp \left[\int d^3 \mathbf{k} \left(\alpha^{(P)}(\mathbf{k}) \hat{a}^{(P)\dagger}(\mathbf{k}) - \alpha^{(P)*}(\mathbf{k}) \hat{a}^{(P)}(\mathbf{k}) \right) \right]$$

コヒーレントパラメーター

$$\alpha^{(P)} = -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{N=1,2} \int^t dt' \frac{\gamma_N^3 m_N}{M_{\text{pl}}} \frac{e^{i\omega_{\mathbf{k}} t}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} e_{ij}^{(P)}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{x}}_N} v_N^i v_N^j$$

コヒーレントパラメーター

コヒーレントパラメーター

$$\alpha^{(P)} = -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{N=1,2} \int dt' \frac{\gamma_N^3 m_N}{M_{pl}} \frac{e^{i\omega_k t}}{\sqrt{2\omega_k}} e_{ij}^{(P)}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\bar{\mathbf{x}}_N} \underbrace{v_N^i v_N^j}_{\text{粒子の速度}}$$

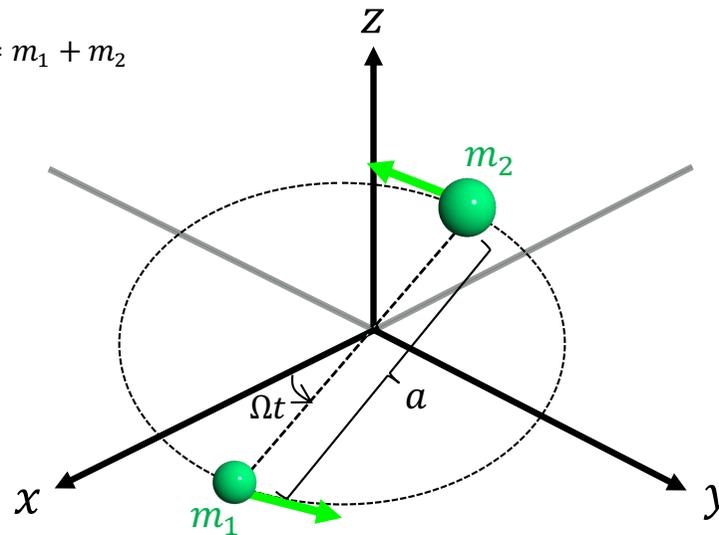
円軌道運動を考える

重心を原点にとると、 m_1 と m_2 の円軌道は

$$m_1 \begin{cases} x_1 = \frac{m_2}{M} a \cos \Omega t \\ y_1 = \frac{m_2}{M} a \sin \Omega t \\ z_1 = 0 \end{cases}$$

$$m_1 \begin{cases} v_{x1} = -\frac{m_2 \Omega}{M} a \sin \Omega t \\ v_{y1} = \frac{m_2 \Omega}{M} a \cos \Omega t \\ v_{z1} = 0 \end{cases}$$

$$M = m_1 + m_2$$



$$m_2 \begin{cases} x_2 = \frac{m_1}{M} a \cos(\Omega t + \pi) \\ y_2 = \frac{m_1}{M} a \sin(\Omega t + \pi) \\ z_2 = 0 \end{cases}$$

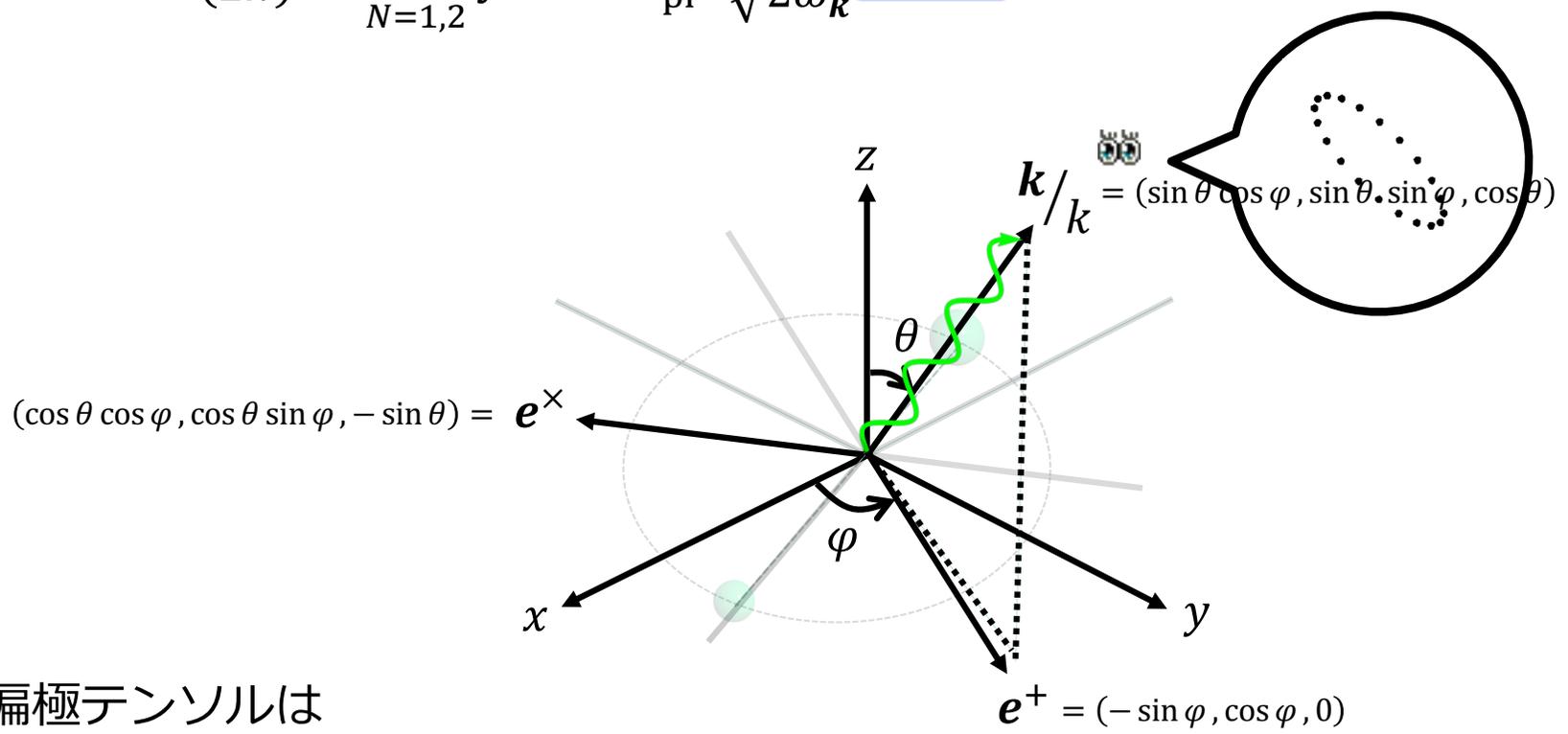
$$m_2 \begin{cases} v_{x2} = \frac{m_1 \Omega}{M} a \sin(\Omega t + \pi) \\ v_{y2} = \frac{m_1 \Omega}{M} a \cos(\Omega t + \pi) \\ v_{z2} = 0 \end{cases}$$

偏極テンソル

コヒーレントパラメーター

$$\alpha^{(P)} = -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{N=1,2} \int dt' \frac{\gamma_N^3 m_N}{M_{\text{pl}}} \frac{e^{i\omega_k t}}{\sqrt{2\omega_k}} e_{ij}^{(P)}(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot \bar{\mathbf{x}}_N} v_N^i v_N^j$$

偏極テンソル



偏極テンソルは

$$e_{ij}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta \cos^2 \varphi - \sin^2 \theta & (1 + \cos^2 \theta) \sin \varphi \cos \varphi & -1/2 \sin 2\theta \cos \varphi \\ (1 + \cos^2 \theta) \sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \theta \sin^2 \varphi - \cos^2 \theta & -\sin 2\theta \sin \varphi \\ -1/2 \sin 2\theta \cos \varphi & -\sin 2\theta \sin \varphi & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad e_{ij}^{(\times)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin 2\varphi & \cos \theta \cos 2\varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \cos 2\varphi & \cos \theta \sin 2\varphi & -\sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

コヒーレントパラメーター

コヒーレントパラメーターは

$$\alpha^{(+)} = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\mu(a\Omega)^2}{\sqrt{2}M_{\text{pl}}} \int^t dt' \frac{e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\frac{\sin^2 \theta}{2} + \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \cos(2\Omega t' - 2\varphi) \right) \\ \times \left[\gamma_1^3 \frac{m_2}{M} e^{-i(k_x x_1 + k_y y_1)} + \gamma_2^3 \frac{m_1}{M} e^{-i(k_x x_2 + k_y y_2)} \right]$$

換算質量

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$$

$$\alpha^{(\times)} = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\mu(a\Omega)^2}{\sqrt{2}M_{\text{pl}}} \int^t dt' \frac{e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \cos \theta \sin(2\Omega t' - 2\varphi) \\ \times \left[\gamma_1^3 \frac{m_2}{M} e^{-i(k_x x_1 + k_y y_1)} + \gamma_2^3 \frac{m_1}{M} e^{-i(k_x x_2 + k_y y_2)} \right]$$

ここで

$$k_x x_1 + k_y y_1 = \frac{m_2}{M} a k (\sin \theta \cos \varphi \cos(\Omega t') + \sin \theta \sin \varphi \sin(\Omega t'))$$

$$k_x x_2 + k_y y_2 = -\frac{m_1}{M} a k (\sin \theta \cos \varphi \cos(\Omega t') + \sin \theta \sin \varphi \sin(\Omega t'))$$

コヒーレント状態における重力波の期待値

期待値

$$\langle \alpha | h_{ij}(t, \mathbf{x}) | \alpha \rangle = \frac{2}{M_{\text{pl}}} \sum_{P=+, \times} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e_{ij}^{(P)}(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left[\alpha^{(P)}(\mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \alpha^{(P)*}(\mathbf{k}) e^{i\omega_{\mathbf{k}} t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right]$$

コヒーレントパラメーターを代入

$$\alpha^{(P)} = -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{N=1,2} \int dt' \frac{\gamma_N^3 m_N}{M_{\text{pl}}} \frac{e^{i\omega_{\mathbf{k}} t'}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} e_{ij}^{(P)}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_N} v_N^i v_N^j$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha | h_{ij}(t, \mathbf{x}) | \alpha \rangle &= \frac{\mu(a\Omega)^2}{\sqrt{2\pi} M_{\text{pl}}^2} \frac{1}{r} \int_0^\infty r dk \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^t k dt' \quad , r = |\mathbf{x}| \\ &\times \left[i \left(\gamma_1^3 \frac{m_2}{M} e^{-i(k_x x_1 + k_y y_1)} + \gamma_2^3 \frac{m_1}{M} e^{-i(k_x x_2 + k_y y_2)} \right) e^{-ikr \cos \theta + i\omega_{\mathbf{k}} t} e^{i\omega_{\mathbf{k}} t'} \right. \\ &\times \left. \left\{ e_{ij}^{(+)} \left(\frac{\sin^2 \theta}{2} + \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \cos(2\Omega t' - 2\varphi) \right) + e_{ij}^{(\times)} \cos \theta \sin(2\Omega t' - 2\varphi) \right\} + \text{c. c.} \right] \end{aligned}$$

$r \Omega \gg 1$ の場合、解析的に積分を実行できて

$$\langle \alpha | h_{xx}(t, \mathbf{x}) | \alpha \rangle = \frac{2G\mu(a\Omega)^2}{r} [\cos 2\Omega(t+r) - \cos 2\Omega(t-r)]$$

四重極公式

$$h_{xx} = \frac{4G\mu(a\Omega)^2}{r} \cos 2\Omega(t-r)$$

GW150914 のデータ

合体したブラックホールのそれぞれの質量 : $36M_{\odot}$ and $29M_{\odot}$, $\mu \sim 16M_{\odot}$

観測源までの光度距離 : 410 Mpc

最も内側の安定円軌道 (ISCO)

軌道速度 : $a\Omega = 1/\sqrt{6} \sim 0.41$

ローレンツファクター : $\gamma_1 = 1.02$, $\gamma_2 = 1.03$

重力波の振幅の期待値

$$\langle \alpha | h_{ij}(t, \mathbf{x}) | \alpha \rangle \cong 10^{-21} \left(\frac{\mu}{16M_{\odot}} \right) \left(\frac{a\Omega}{0.41} \right)^2 \left(\frac{410 \text{ Mpc}}{r} \right)$$

GW150914 で検出された重力波の振幅と一致

コヒーレント状態からのズレ

h_{ij} に関する2次の項による時間発展

$$\hat{U}(t, \bar{\mathbf{x}}) = T \exp \left(-i \int^t dt' \hat{H}_{\text{int}}(t') \right)$$

ここで

$$\hat{h}_{ij}(\eta, x^i) = \frac{2}{M_{\text{pl}}} \sum_{P=+, \times} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \left[\frac{e^{-i\omega_k t}}{\sqrt{2\omega_k}} e_{ij}^{(P)}(\mathbf{k}) \hat{a}^{(P)}(\mathbf{k}) + \frac{e^{i\omega_k t}}{\sqrt{2\omega_k}} e_{ij}^{(P)}(-\mathbf{k}) \hat{a}^{(P)\dagger}(-\mathbf{k}) \right] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

$$\hat{H}_{\text{int}}(t, \bar{\mathbf{x}}) = \sum_{N=1,2} \frac{3}{8} \gamma_N^5 m_N \hat{h}_{ij}(t, \bar{\mathbf{x}}_N(t)) \hat{h}_{\ell m}(t, \bar{\mathbf{x}}_N(t)) v_N^i v_N^j v_N^\ell v_N^m$$

時間発展演算子は

$$\hat{U}(t, \bar{\mathbf{x}}_N) = \exp \left[-i \sum_{N=1,2} \frac{3\gamma_N^5 m_N}{2M_{\text{pl}}^2} \sum_{P,Q} \int^t dt' \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^{3/2}} \right. \\ \left. \times \left(\frac{e^{-i(\omega_k + \omega_{k'})t'}}{\sqrt{2\omega_k \omega_{k'}}} e_{ij}^{(P)}(\mathbf{k}) e_{\ell m}^{(Q)}(\mathbf{k}') v_N^i v_N^j v_N^\ell v_N^m a^{(P)}(\mathbf{k}) a^{(Q)}(\mathbf{k}') \right) e^{i\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{x}}_N} e^{i\mathbf{k}' \cdot \bar{\mathbf{x}}_N} + \text{h. c.} \right]$$

スクイーズド状態の生成

時間発展演算子

$$\hat{U}(t, \bar{\mathbf{x}}_N) = \exp \left[-i \sum_{N=1,2} \frac{3\gamma_N^5 m_N}{2M_{\text{pl}}^2} \sum_{P,Q} \int^t dt' \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^{3/2}} \right. \\ \left. \times \left(\frac{e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})t'}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}} e_{ij}^{(P)}(\mathbf{k}) e_{\ell m}^{(Q)}(\mathbf{k}') v_N^i v_N^j v_N^\ell v_N^m a^{(P)}(\mathbf{k}) a^{(Q)}(\mathbf{k}') \right) e^{i\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{x}}_N} e^{i\mathbf{k}' \cdot \bar{\mathbf{x}}_N} + \text{h. c.} \right]$$

をスクイージング演算子の定義と比較すると

$$\hat{S}(\beta) = \prod_P \exp \left[\int d^3 k \int d^3 k' \left(\beta_{kk'}^{(P)} a^{(P)\dagger}(\mathbf{k}) a^{(P)\dagger}(\mathbf{k}') - \beta_{kk'}^{(P)*} a^{(P)}(\mathbf{k}) a^{(P)}(\mathbf{k}') \right) \right]$$

スクイージングパラメーターが読み取れて

$$\beta_{kk'}^{(P)} = -\frac{3i}{(2\pi)^3 2M_{\text{pl}}^2} \sum_{N=1,2} \gamma_N^5 m_N \int^t dt' \frac{e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})t'}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}} e_{ij}^{(P)}(\mathbf{k}) e_{\ell m}^{(P)}(\mathbf{k}') v_N^i v_N^j v_N^\ell v_N^m e^{-i\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{x}}_N} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \bar{\mathbf{x}}_N}$$

スキュージングパラメーター

重力波のそれぞれの偏光に対するスキュージングパラメーター

$$\beta_{kk'}^{(+)} = -\frac{3i}{64\pi^3 M_{\text{pl}}^2} \mu (a\Omega)^4$$

$$\times \int^t dt' \left[\gamma_1^5 \left(\frac{m_2}{M}\right)^3 e^{-i(k_x+k'_x)x_1 - i(k_y+k'_y)y_1} + \gamma_2^5 \left(\frac{m_1}{M}\right)^3 e^{-i(k_x+k'_x)x_2 - i(k_y+k'_y)y_2} \right]$$

$$\times \frac{e^{-i(\omega_k+\omega_{k'})t'}}{\sqrt{2\omega_k\omega_{k'}}} \left(\frac{\sin^2 \theta}{2} + \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \cos(2\Omega t' - 2\varphi) \right) \left(\frac{\sin^2 \theta'}{2} + \frac{1 + \cos^2 \theta'}{2} \cos(2\Omega t' - 2\varphi') \right)$$

$$\beta_{kk'}^{(\times)} = -\frac{3i}{64\pi^3 M_{\text{pl}}^2} \mu (a\Omega)^4$$

$$\times \int^t dt' \left[\gamma_1^5 \left(\frac{m_2}{M}\right)^3 e^{-i(k_x+k'_x)x_1 - i(k_y+k'_y)y_1} + \gamma_2^5 \left(\frac{m_1}{M}\right)^3 e^{-i(k_x+k'_x)x_2 - i(k_y+k'_y)y_2} \right]$$

$$\times \frac{e^{-i(\omega_k+\omega_{k'})t'}}{\sqrt{2\omega_k\omega_{k'}}} \cos \theta \sin(2\Omega t' - 2\varphi) \cos \theta' \sin(2\Omega t' - 2\varphi')$$

スキュージングパラメーターの評価

簡単のため、重力波は伝播中にデコヒーレンスが起きないとする

発生源における $\beta_{kk'}^{(P)}$ の値 = 検出器における $\beta_{kk'}^{(P)}$ の値

連星ブラックホールの位置におけるスキュージングパラメーターは

$$\zeta \cong \frac{4\pi}{3} (2\Omega)^3 |\beta| \cong \frac{1}{8\pi M_{\text{pl}}^2} \mu (a\Omega)^4 f$$

GW150914 の観測データを用いると

$$\zeta \cong 2 \times 10^{-3} \left(\frac{\mu}{16M_{\odot}} \right) \left(\frac{a\Omega}{0.41} \right)^4 \left(\frac{f}{68 \text{ Hz}} \right)$$

原始重力波
 $\zeta \cong 30$ for 100 Hz

スキュージングは加法的なので

$$\hat{S}(\beta_{\text{PGW}}) \hat{S}(\beta_{\text{GW}}) |0\rangle = \exp(\beta_{\text{PGW}} \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger - \beta_{\text{PGW}}^* \hat{a} \hat{a} + \beta_{\text{GW}} \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger - \beta_{\text{GW}}^* \hat{a} \hat{a}) |0\rangle$$

もし 10^{-3} より大きなスキュージングが検出されれば、宇宙でインフレーションが起きた証拠になりうる

まとめ

天体ブラックホールがどのようにグラビトンの量子状態を生成するのかを調べた

連星系を古典的な重力波源としてモデル化した

古典的な重力波が、量子的なコヒーレント状態で表せることを示した

相互作用ハミルトニアンを次のオーダーまで解析することで、連星ブラックホールもスクイズド状態を生成する可能性があることを示した

GW150914 に対するスクイーミングの程度を見積もった結果、スクイーミングパラメータは $\sim 10^{-3}$ のオーダーであることがわかった

もし 10^{-3} を超えるスクイーミングが検出されれば、宇宙でインフレーションが起こったことを示唆することになる