

量子力学から

量子情報科学

中田 芳史

# 目次

1. 量子の復習
2. 量子力学から量子情報へ
3. 量子のより深い理解

厳密なお話はこちら →



# 1. 量子の復習

1-1. 量子力学の復習

1-2. 公理的な定式化

1-3. 量子論の確率論的側面

## 1-1. 量子力学の復習

① 量子力学では、状態は波動関数  $\Psi(x,t)$  で記述される。

② 波動関数の運動方程式 = Schrödinger 方程式。

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(x,t) = \hat{H} \Psi(x,t)$$

ハミルトニアン。

③ 可観測量  $\hat{O}$  (エルミート演算子  $\hat{O} = \hat{O}^\dagger$ ) を測定した時の期待値。

$$\langle \hat{O} \rangle_{\Psi} = \int dx \Psi^*(x,t) \hat{O} \Psi(x,t)$$

## 1-2. 公理的な定式化

- ① 量子状態: ヒルベルト空間 の 単位ベクトル.  
~ 内積を持つベクトル空間 =  $L^2(\mathbb{R}^3)$  が 1.

例:

1. 波動関数  $\Psi(x,t)$ :  $L_2$  空間 の 単位ベクトル.

-  $L^2$   $\|\Psi\| := \sqrt{\langle \Psi, \Psi \rangle} = \int dx |\Psi(x)|^2 < \infty$   
↑ これは  $L_2$  の特徴

- 波動関数:  $L^2$  を 1 に規格化した関数

→  $L_2$  空間の次元は無限なので、分かりにくい.....

2.  $\text{Spin}-1/2$  : 二次元ヒルベルト空間 (量子ビット)

$$\text{— 量子状態 } |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \quad \psi_{0,1} \in \mathbb{C}$$

$$= \psi_0 |\uparrow\rangle + \psi_1 |\downarrow\rangle$$

$$\text{==> } \|\psi\rangle\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} = \sqrt{|\psi_0|^2 + |\psi_1|^2} = 1 \quad \leftarrow \text{規格化}$$

$\rightsquigarrow$  以降は、基本的に、『有限次元ヒルベルト空間』を扱う。

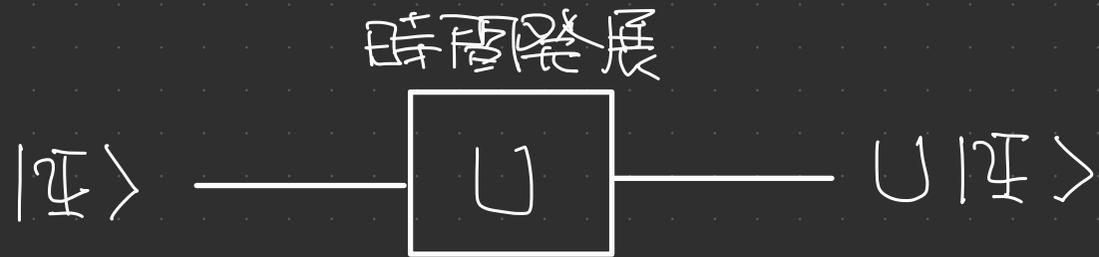
※ 密度行列 を導くると便利.

↳ 量子状態 (単位ベクトル) を行列で表す方法。

$$\begin{array}{ccc} \text{単位ベクトル} & & \text{行列} \\ | \psi \rangle = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} & \Leftrightarrow & | \psi \rangle \langle \psi | = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\psi_0} & \overline{\psi_1} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{c} \nearrow \\ 2 \times 1 \end{array} & & \begin{array}{c} \nearrow \\ 2 \times 2 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \swarrow 2 \times 1 & \swarrow 1 \times 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} |\psi_0|^2 & \psi_0 \overline{\psi_1} \\ \psi_1 \overline{\psi_0} & |\psi_1|^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

量子状態  $|\psi\rangle$  の密度行列.

② 時間発展:  $U = U(t)$  行列  $U$ , ( $U^\dagger U = U U^\dagger = I$ )



□  $|\psi\rangle$  が量子状態  $\Rightarrow$   $U|\psi\rangle$  も量子状態。 □

$$\Leftrightarrow \|U|\psi\rangle\| = 1$$

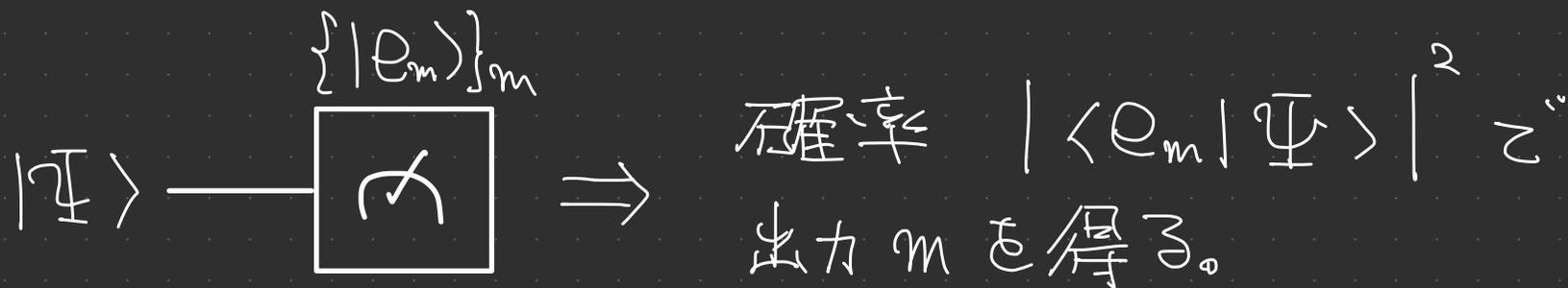
$$\Leftrightarrow \langle\psi|U^\dagger U|\psi\rangle = 1$$

全ての量子状態  $|\psi\rangle$  に対して成立  $\Leftrightarrow U^\dagger U = I$  ( $U = U^\dagger$ )

※ 無限小時間発展を考えると、形式的にシュレーディンガー方程式が出る。

③ 測定：正規直交基底  $\{|e_m\rangle\}_m$

## 測定のプロセス



[量子状態は  $|e_m\rangle$  に変化]

↪ 密度行列で表すと、

$$\text{確率} = |\langle e_m | \Psi \rangle|^2 = \text{Tr} [ |e_m\rangle \langle e_m| |\Psi\rangle \langle \Psi| ]$$

- 可換測量  $\Theta$  の期待値  $\langle \Psi | \Theta | \Psi \rangle$  との関係？

$$\Theta = \sum_m \Theta_m |m\rangle \langle m| \quad : \text{対角化} \quad (\Theta_m \in \mathbb{R})$$

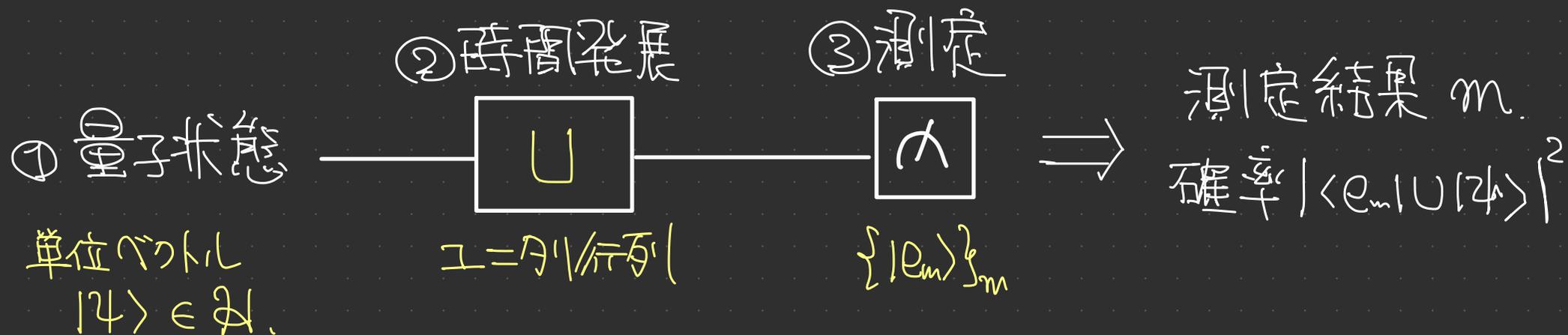
↘ 正規直交基底

—  $\{|m\rangle\}_m$  で測定  $\Rightarrow$  確率  $\text{Tr}[|m\rangle \langle m| \Psi \langle \Psi|]$  で  $m$  を得る。

— 期待値:  $\sum_m \text{Tr}[|m\rangle \langle m| \Psi \langle \Psi|] \Theta_m$

$$= \text{Tr}[\Theta \Psi \langle \Psi|] = \langle \Psi | \Theta | \Psi \rangle$$

# 1-2 のまとめ: 量子論の公理



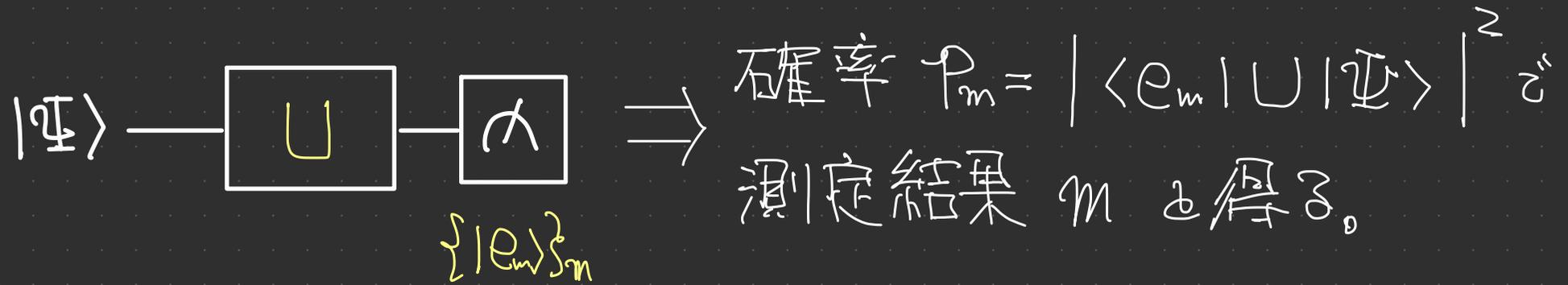
④ 複合量子系のヒルベルト空間はテンソル積



eg. spin-1/2 x 2 =  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$

$\hookrightarrow$  これを一つの量子系 AB :  $\mathcal{H}^{AB} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$

# 1-3. 量子論 = 一種の確率論



現下かに「確率」が主役の一つ。

⇒ なぜ、“通常”の確率の言葉で記述しないのか？

波動関数  
ややこしい!!



その一つの理由は、

「量子ごとの確率の変化の法則」が

通常の確率論では想定せられたものではない。

通常の確率論

確率分布  
 $\{P_m\}_m$

変化  
→  
eg.) 二重確率行列

確率分布  
 $\{Q_m\}_m$

量子ごとの確率論

$|\Psi\rangle$

ユニタリ  
→

$U|\Psi\rangle$

↓測定

$\{P_m\}_m$

↓測定

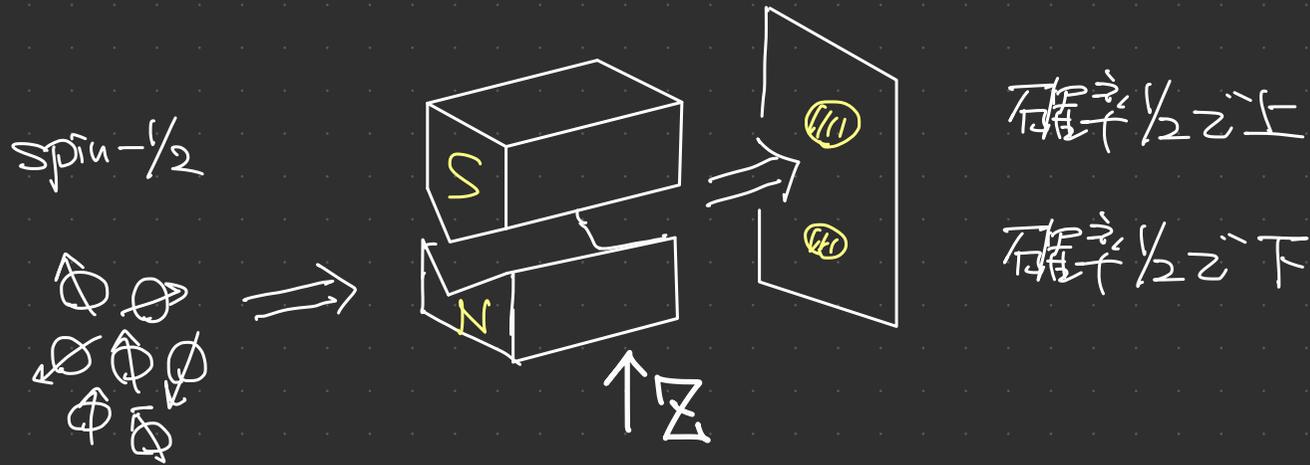
$\{Q_m\}_m$

量子論では、確率が“ユ=Δ”で変化する。

⇒ 確率で考えると“変”/“複雑”な変化も、  
シンプルに実行できることも。

# 例 Z-X-Z Stern-Gerlach 実験

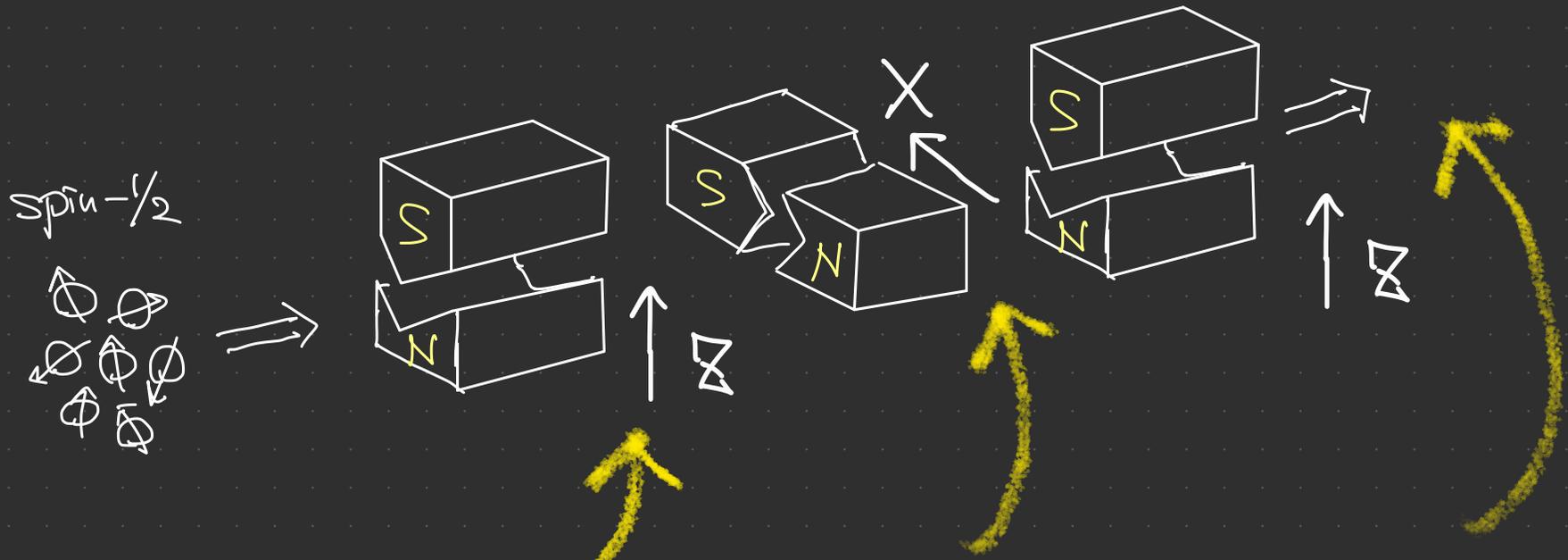
## • Stern-Gerlach 実験



→ 歴史的には、<sup>↑</sup>電子が持つ spin-1/2 の直接的観測<sup>↓</sup>

→ (物理を忘れて  
ひねくねて見れば) 確率  $\frac{1}{2}$  で上下に分かれる現象  
確率の変化としては単純

• Z-X-Z Stern-Gerlach 実験



確率  $\frac{1}{2}$  で  
縦にスプリット

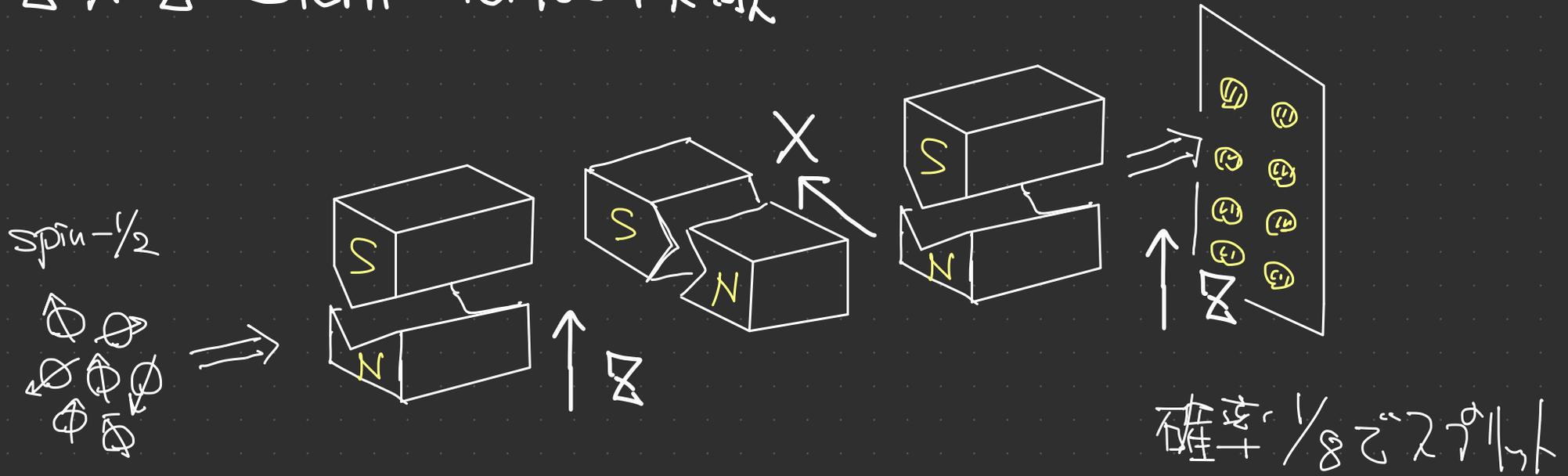


各々が確率  $\frac{1}{2}$  で  
横にスプリット



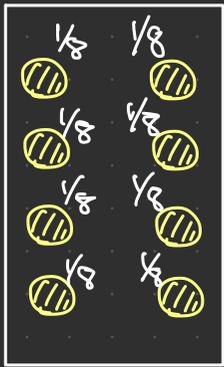
各々が確率  $\frac{1}{2}$  で  
縦にスプリット

• Z-X-Z Stern-Gerlach 実験

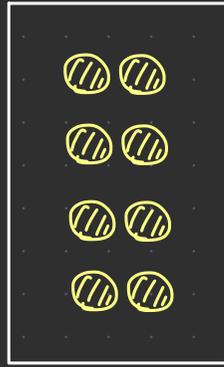


→ (やはり物理を忘れた) 単純な確率変化 × 3

→ 真ん中の X 磁場を除く = 弱めていく。



X 磁場  
→  
弱く



X 磁場  
→  
ゼロ極限



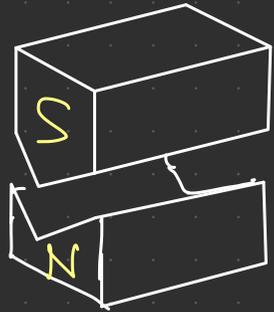
4点  
確率 1/4

X 磁場が 0 のとき

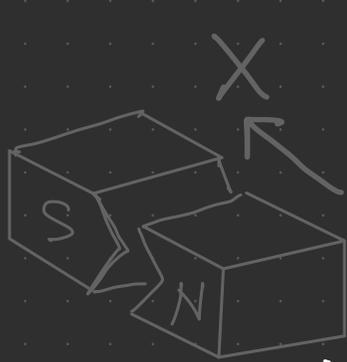
spin-1/2



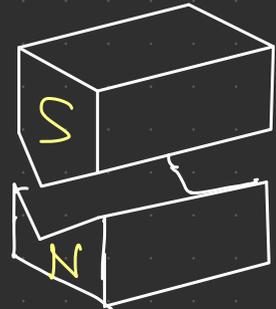
⇒



↑  
⊗



X 磁場なし

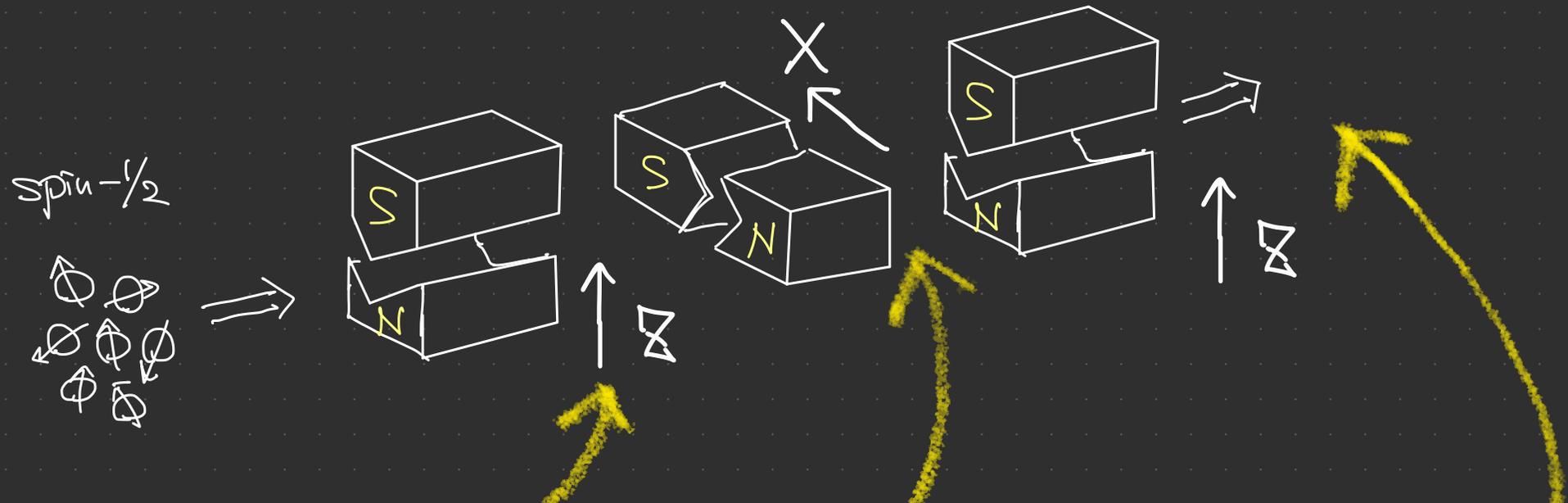


⇒

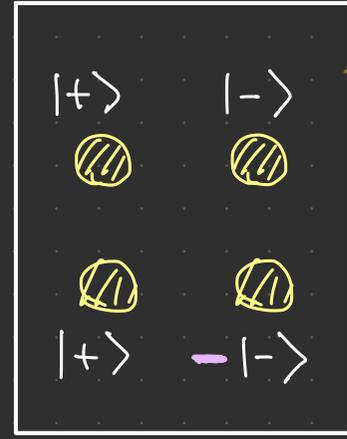
↑  
⊗



# 實際に起るコト：ユニタリ変化

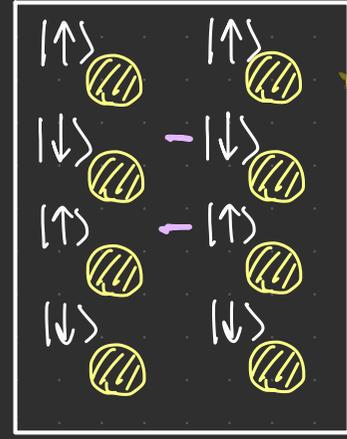


元の固有状態



Xの固有状態

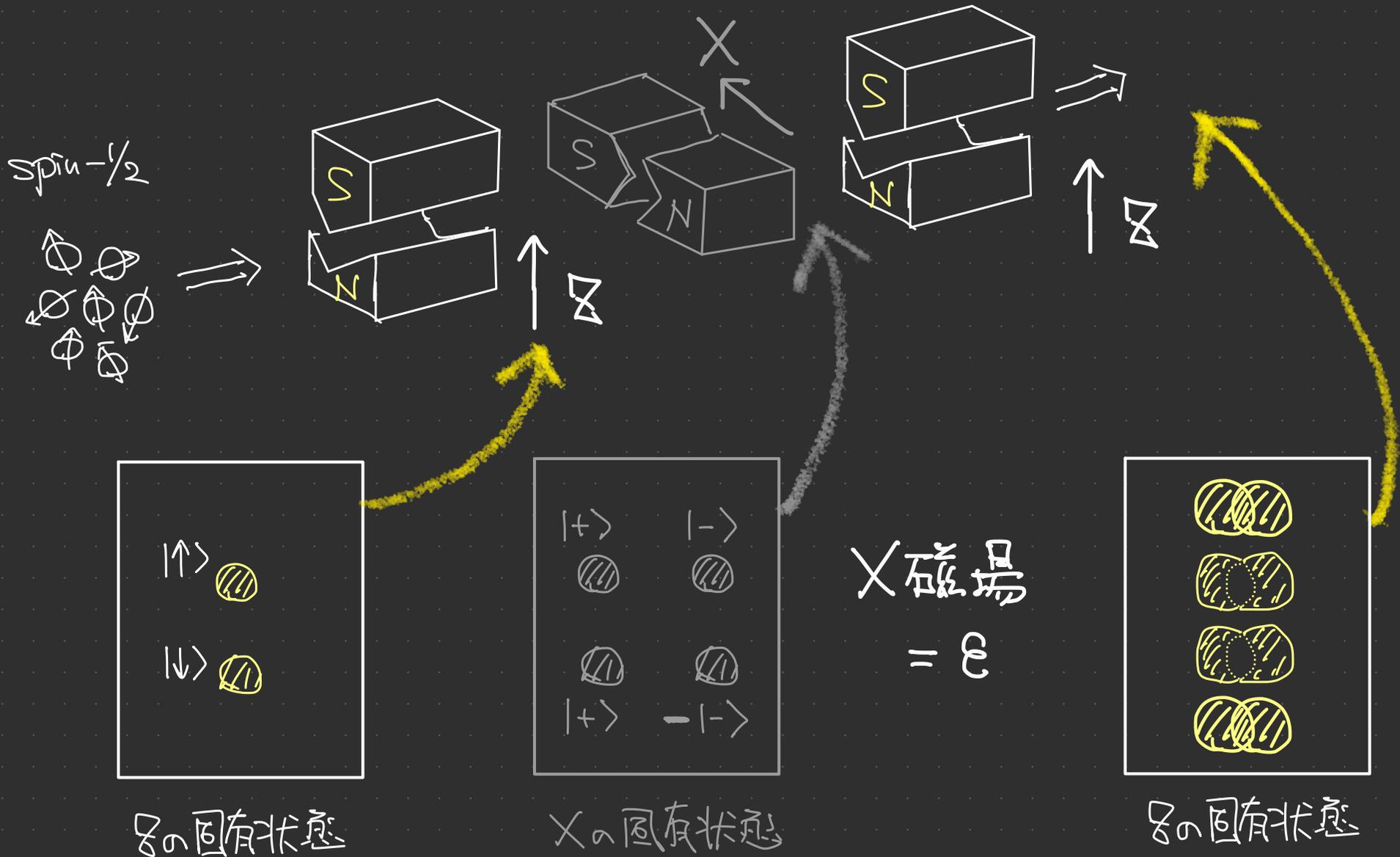
$X \rightarrow 0$  のとき、  
干渉して  
消える。



元の固有状態

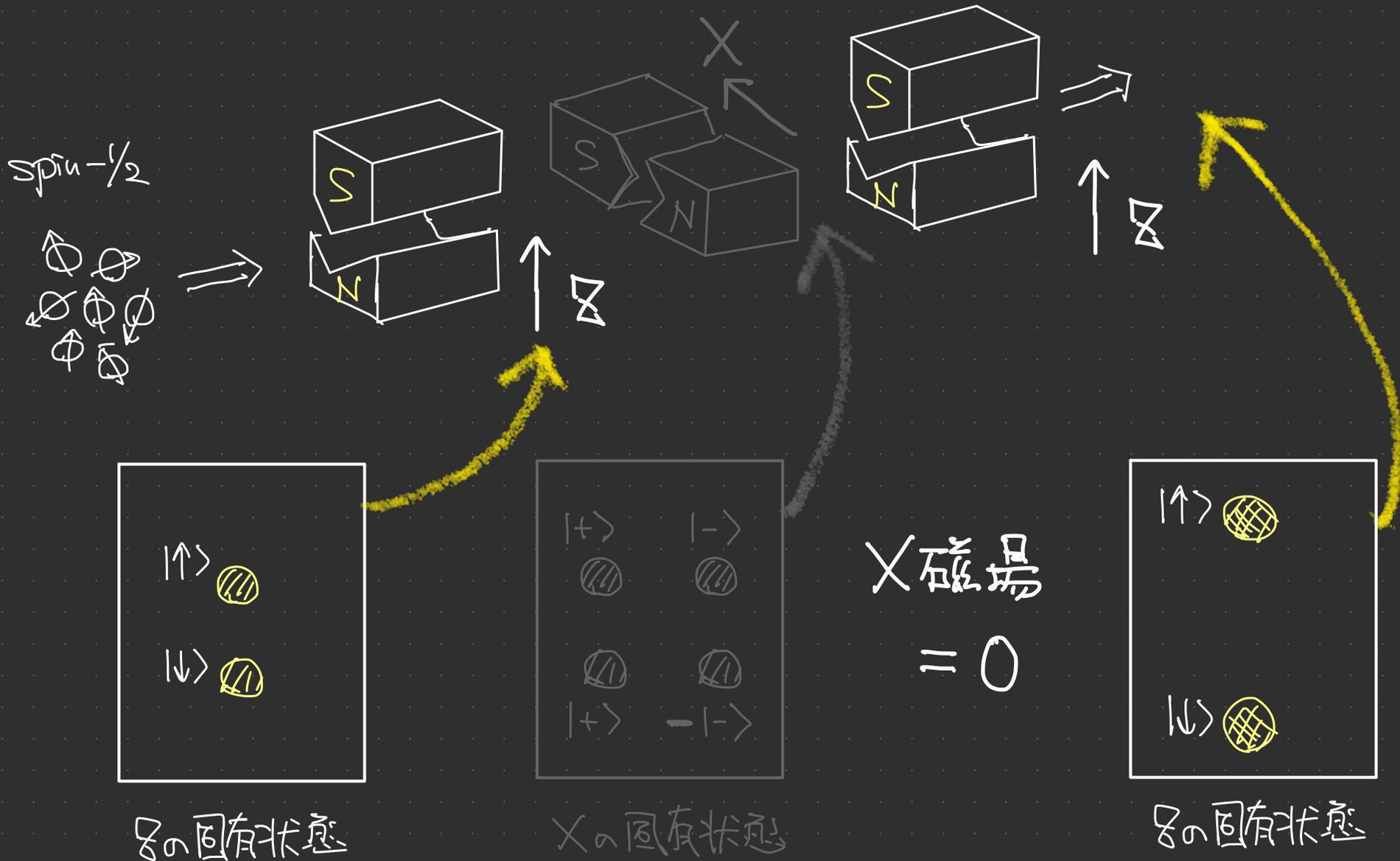
$$\begin{aligned}
 |+\rangle &\propto |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle & \left( \begin{aligned} |\uparrow\rangle &\propto |+\rangle + |-\rangle \\ |\downarrow\rangle &\propto |+\rangle - |-\rangle \end{aligned} \right) \\
 |-\rangle &\propto |\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle
 \end{aligned}$$

# 實際に起る事: 行列変化



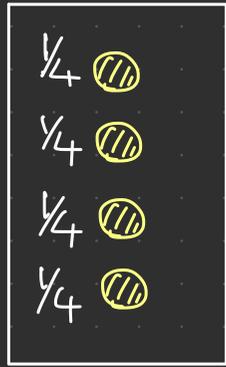
$$\begin{aligned}
 |+\rangle &\propto |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle & \left( \begin{aligned} |\uparrow\rangle &\propto |+\rangle + |-\rangle \\ |\downarrow\rangle &\propto |+\rangle - |-\rangle \end{aligned} \right) \\
 |-\rangle &\propto |\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle
 \end{aligned}$$

# 實際に起る事：ユニタリ変化



$$\begin{aligned}
 |+\rangle &\propto |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle \\
 |-\rangle &\propto |\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle
 \end{aligned}
 \left( \begin{aligned}
 |\uparrow\rangle &\propto |+\rangle + |-\rangle \\
 |\downarrow\rangle &\propto |+\rangle - |-\rangle
 \end{aligned} \right)$$

X 磁場  $\rightarrow 0$



$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$



パラドクサー!!  
なんじゃー!!



X 磁場 = 0



量子論は「一種の確率論」だが、

確率の言葉だけで説明しようとすると、非直観的な変化

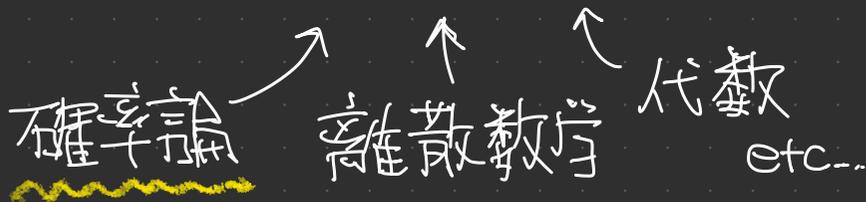
量子を用いると、非自明な確率変化も  
簡単に引き起こせる (= ともあがり)

逆に言えば、

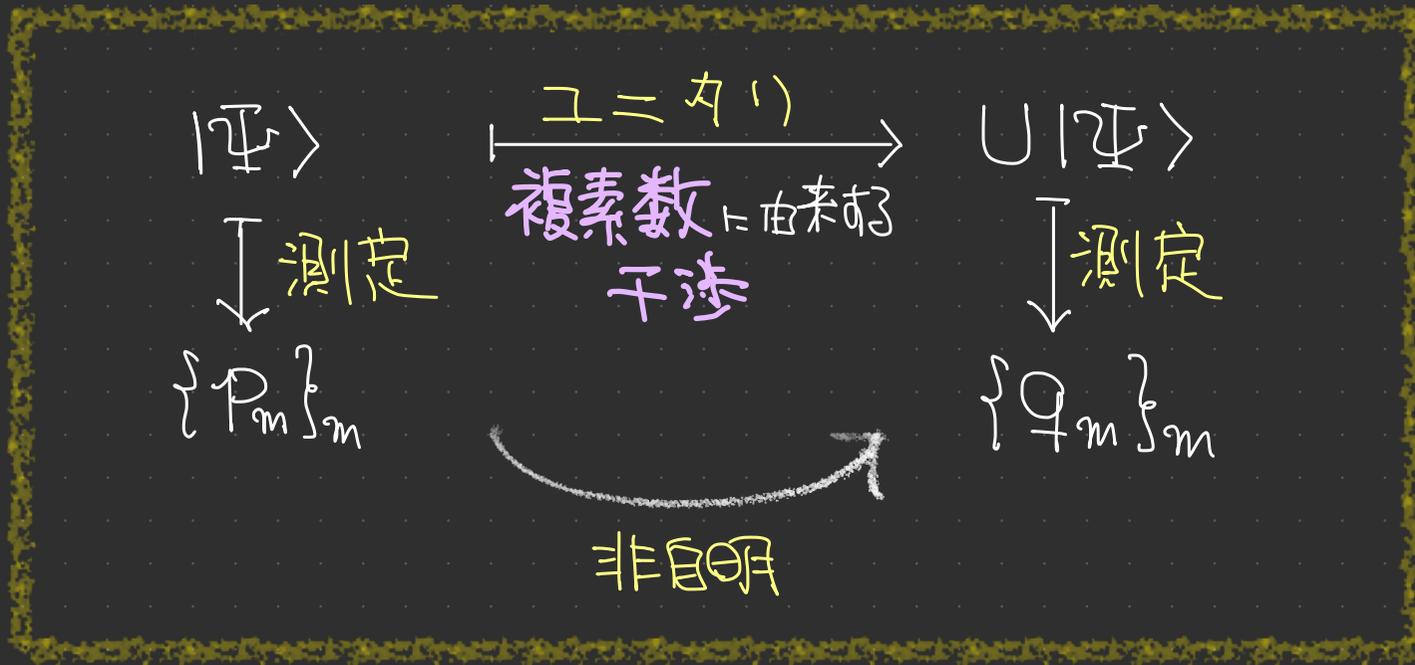
# 情報科学



# 量子情報科学



非自明に変化する  
確率論



量子力学 から

# 2. 量子情報

2-1. 量子論の拡張公理

2-2. 標準的量子論と拡張公理の関係

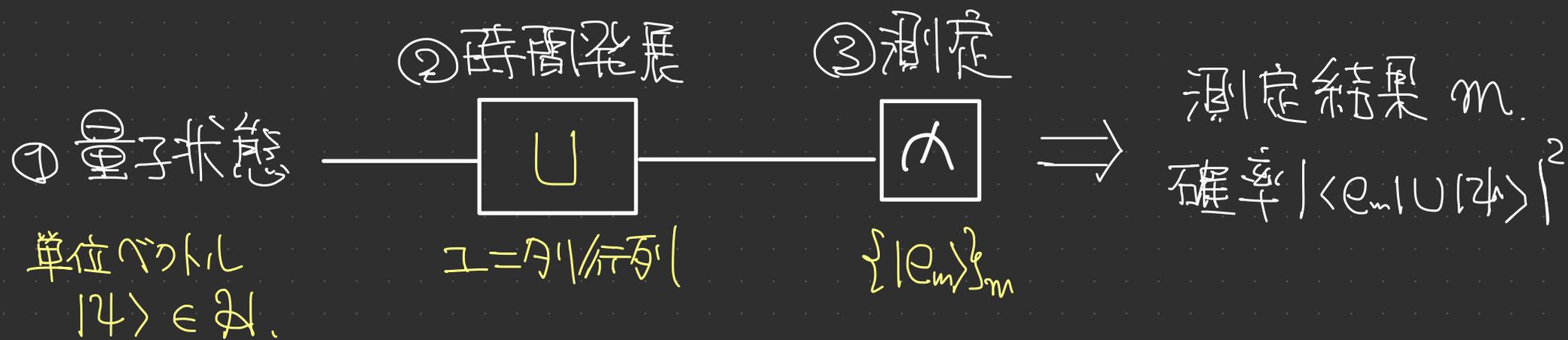
# 2.1. 量子論の拡張

## 2-1. 量子論の枠組みの拡張

量子論の確率論!!



### 量子力学の構成要素



④ 複合量子系のヒルベルト空間はテンソル積

$\Rightarrow$  “古典的な操作” を含めると、少し拡張した方が使いやすい。

## 2-1-1. 量子状態の拡張：密度行列

確率  $p_i$  で、 $|\psi_i\rangle$  を  
準備したぜ!!!



量子系

$$\{p_i, |\psi_i\rangle\}$$

むむむ。  
どう言ったらいいの?



量子状態の確率混合まで考えると、密度行列で記述される。

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad \leftarrow \text{密度行列の一般的な形}$$

例1. 確率  $\frac{1}{2}$  で  $|0\rangle$ , 確率  $\frac{1}{2}$  で  $|1\rangle$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{I}{2}$$

量子系

$|0\rangle$  or  $|1\rangle$

例2. 確率  $\frac{1}{2}$  で  $|0\rangle$ , 確率  $\frac{1}{2}$  で  $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| + |+\rangle\langle +|) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

量子系

$|0\rangle$  or  $|+\rangle$

例3.  $E_j$  をエネルギーとして, 確率  $P_j \propto e^{-E_j/k_B T}$  で  $|E_j\rangle$

$$\Rightarrow \sum_j P_j |E_j\rangle\langle E_j| \propto e^{-\hat{H}/k_B T}$$

~~~~~ ギブス状態

量子系

$\{P_j, |E_j\rangle\}$

\* これらは、一般に  $|\varphi\rangle\langle\varphi|$  とは表せない。

一般に、

- 単位ベクトル  $|\varphi\rangle$  で表現できる状態: 純粋状態
- $|\varphi\rangle\langle\varphi|$  とは表現できない状態: 混合状態

密度行列  $\rho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$  の性質。

1.  $\text{Tr}[\rho] = 1$   $\because$  r.h.s.  $= \sum_j p_j \text{Tr}[|\psi_j\rangle\langle\psi_j|] = \sum_j p_j = 1.$
2.  $\forall |\varphi\rangle, \langle\varphi|\rho|\varphi\rangle \geq 0 \stackrel{\text{def}}{\iff} \rho \geq 0$  : 半正定値行列.

$$\begin{aligned}\because \langle\varphi|\rho|\varphi\rangle &= \sum_j p_j \langle\varphi|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\varphi\rangle \\ &= \sum_j p_j |\langle\varphi|\psi_j\rangle|^2 \geq 0\end{aligned}$$

定義: 量子状態は、密度行列で記述される。

$$\iff \rho \text{ such that } \text{Tr}[\rho] = 1 \text{ \& } \rho \geq 0.$$

## 2-1-2. 時間発展の拡張: 量子チャンネル

時間発展が  $\gamma=1$  の理由

□  $|\psi\rangle$  が量子状態  $\Rightarrow$   $U|\psi\rangle$  も量子状態。□

一般の場合: 量子チャンネル  $\mathcal{T}$   $\leftarrow$   $\Gamma$  のカリグラフター。

□  $\rho$  が量子状態  $\Rightarrow$   $\mathcal{T}(\rho)$  も量子状態 □

時間発展を表す map

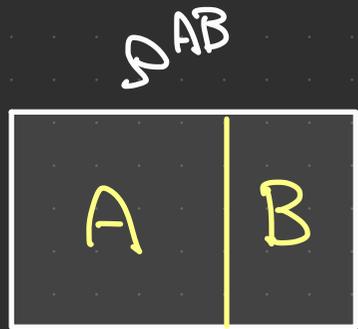
➔  $\gamma=1$  以外の時間発展も存在する。

密度行列  $\rho \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{Tr}[\rho] = 1, \rho \geq 0$  なる。

1. 量子エンタングルメントは、トランス保存する。

$$\iff \text{Tr}[\sigma(\rho)] = \text{Tr}[\rho]$$

2. 量子エンタングルメントは、半正定値性を保存する。



↓  
Aを時間発展

$$\forall \rho^{AB} \geq 0 \implies (\sigma^A \otimes \text{id}^B)(\rho^{AB}) \geq 0$$

↪ 完全正値写像

$$\forall B, \forall \rho^{AB} \geq 0, (\sigma^A \otimes \text{id}^B)(\rho^{AB}) \geq 0$$

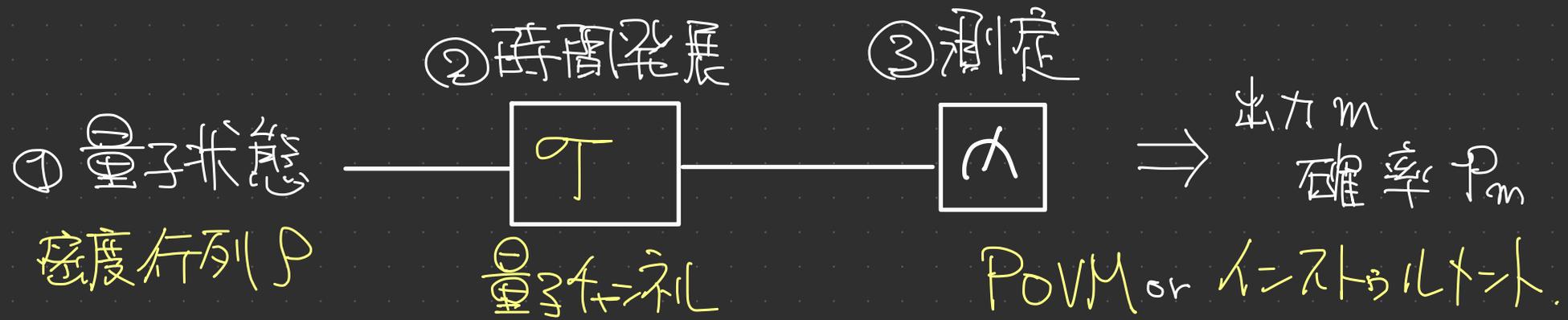
定義: 量子系の時間発展は、量子チャンネルと記述される。

量子チャンネル  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$  以下をみたす線型写像。

1. トル-不保存 (Trace-Preserving)
2. 完全正值性 (Completely-Positive)

↳ しばしば、CPTP / TPCP 写像。

## 2-1-3. 測定 of 拡張: POVM とインスタント



測定確率だけに興味がある場合

Positive-Operator-Valued Measure  $\{P_m\}_m$

1.  $P_m \geq 0$  i.e.  $\forall |\psi\rangle, \langle \psi | P_m | \psi \rangle \geq 0$
2.  $\sum_m P_m = I$

$\Rightarrow$  測定確率  $P_m := \text{Tr}[P_m \rho]$

•  $P_m = \text{Tr}[P_m \rho]$  が確率であることの確認。

1.  $\Leftrightarrow P_m = \text{Tr}[P_m \rho] \geq 0 \leftarrow \rho$  を対角化すれば分る。

2.  $\Leftrightarrow \sum_m P_m = \sum_m \text{Tr}[P_m \rho] = \text{Tr}[\rho] = 1$

つまり、1と2は  $\{\text{Tr}[P_m \rho]\}_m$  が確率分布になるための必要+十分条件。

測定後の状態変化も記述した...場合

インストルメント  $\{C_m\}_m$

1.  $C_m$  は 完全正値写像.
2.  $C_m$  は、トレース非増加

$$\text{Tr}[C_m(\rho)] \leq \text{Tr}[\rho] \quad \forall \rho$$

かつ、 $\sum_m C_m$  はトレース保存。

• 量子状態の変化



— 測定値  $m$  を得る確率,  $P_m$

$$P_m = \text{Tr} [C_m(\rho)]$$



1. と 2. より  $P_m \geq 0$  かつ  $\sum_m P_m = 1$  が成り立つ。

— 測定値  $m$  を得た後の状態.

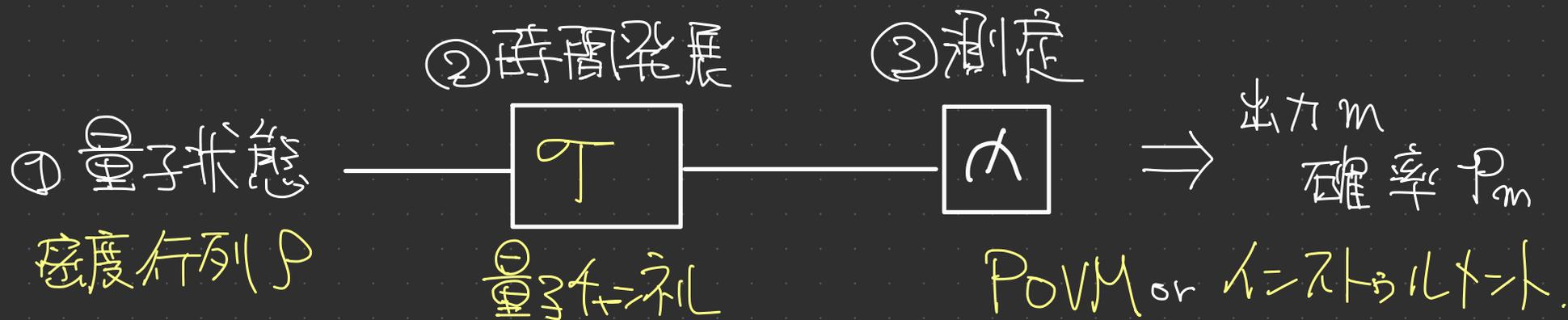
$$\frac{C_m(\rho)}{P_m} \leftarrow 1. \text{より} \geq 0 \text{ なので、状態。}$$

# 2-1. のまとめ. 量子論の拡張公理

量子論の確率論!!



確率混合 etc の古典操作も含めて記述した!!



④ 複合量子系のヒルベルト空間はテンソル積

# 標準的な枠組みでは記述しづらいこと

確率  $p_j$  で、 $|\psi_j\rangle$  を  
準備したぜい!!



量子系

$$\{p_j, |\psi_j\rangle\}$$



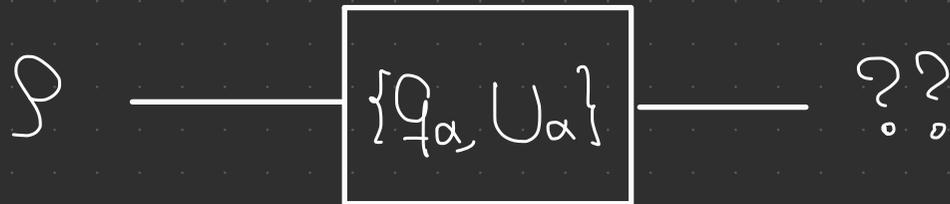
密度行列

$$\sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$$



確率分布 知らない

確率  $q_\alpha$  で、 $U_\alpha$  を  
かけたぜい!!



量子チャンネル

$$\sum_\alpha q_\alpha U_\alpha \rho U_\alpha^\dagger$$

1. 密度行列  $\rho \Leftrightarrow \text{Tr}[\rho] = 1, \rho \geq 0$

2. 量子チャネル  $\mathcal{T}$  : 行列  $\rightarrow$  行列 の写像

- $\text{Tr}[\mathcal{T}(\rho)] = \text{Tr}[\rho]$

- $(\mathcal{T}^A \otimes \text{id}^B)(\rho^{AB}) \geq 0$  for  $\forall \rho^{AB} \geq 0$



3-1. POVM  $\{P_m\}_m$  : 行列の集合.

$$P_m \geq 0 \quad \& \quad \sum_m P_m = I$$

$\rho$  —  $\boxed{\text{A}}$  確率  $\text{Tr}[P_m \rho]$  が  $m$  を得る。

3-2.  $\mathcal{L}$  = ストール  $\mathcal{Y} = \mathcal{T}$   $\{C_m\}_m$  : 写像の集合

- $C_m$ : 完全正値 &  $\mathcal{T}$ - $\mathcal{L}$  非増加
- $\sum_m C_m$  は  $\mathcal{T}$ - $\mathcal{L}$  保存.

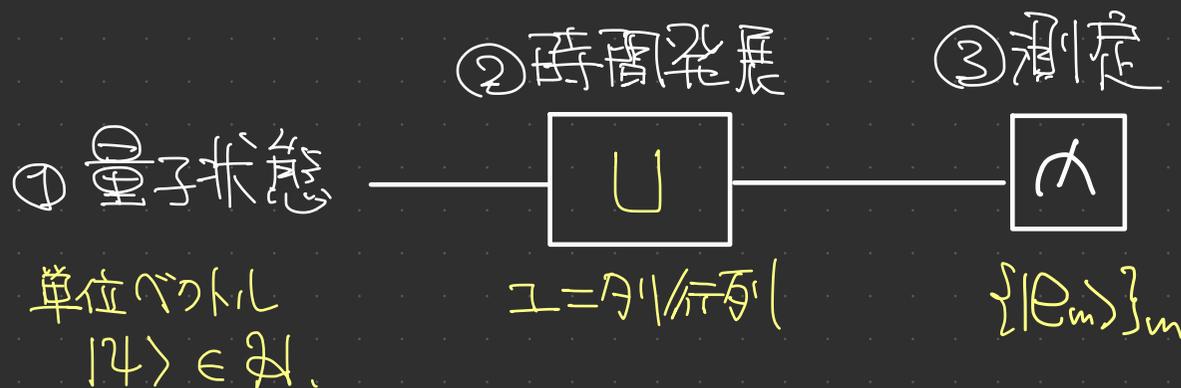
$\rho$  —  $\boxed{\text{A}}$   $\xrightarrow{m}$  確率  $\text{Tr}[C_m(\rho)]$  が  $m$  を得る.  
 $\xrightarrow{\alpha C_m(\rho)}$  状態は  $\alpha C_m(\rho)$  に変化.

標準的量子論と

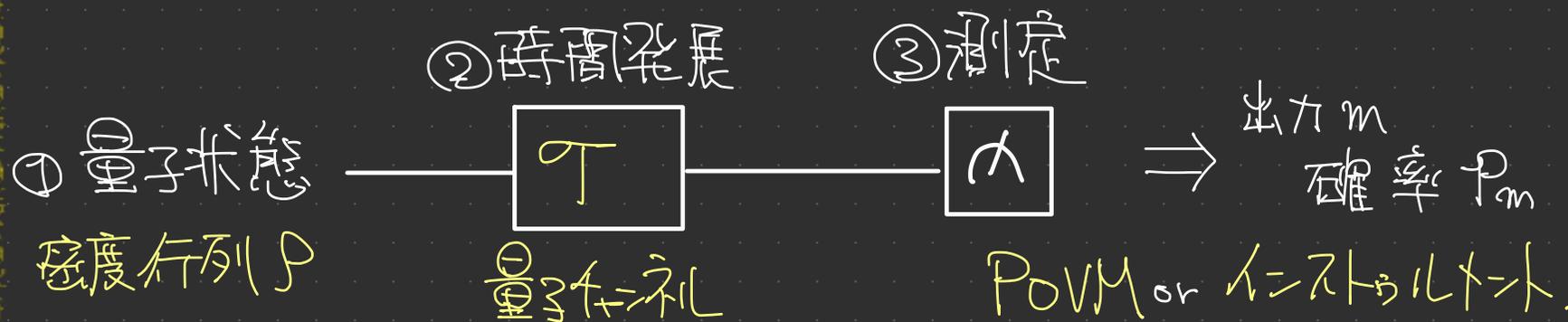
2-2.

拡張公理

標準:



④ 複合量子系のヒルベルト空間はテンソル積



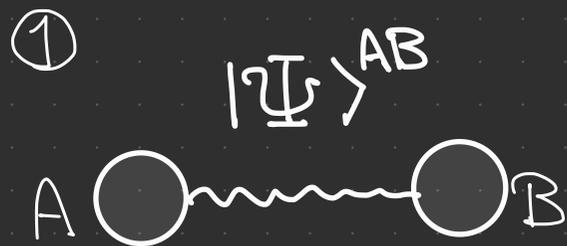
拡張

④ 複合量子系のヒルベルト空間はテンソル積

→ 量子力学を越えてくる?

## 2-2-1. 量子状態：純粹 v.s. 混合

標準的な枠組みに戻り、上下を考える。



考え方:

Bにどんな操作をしても、その情報がAに伝わらない「限り」は、  
Aの量子状態は変化しない。

→ 仮想的にBを測定したと考えると簡単。



↑ Aの状態は？

→ Aには何もしないので、測定は、 $\{ I^A \otimes |e_m\rangle\langle e_m|^B \}_m$ .

• 確率  $P_m := \text{Tr}[(I^A \otimes |e_m\rangle\langle e_m|^B) |\Psi\rangle\langle\Psi|^{AB}]$  だ。

$m$  が出力された状態は、以下。

$$\begin{aligned}
 |\Psi_m\rangle^{AB} &= \frac{(I^A \otimes |e_m\rangle\langle e_m|^B) |\Psi\rangle^{AB}}{\sqrt{P_m}} \\
 &= \frac{(I^A \otimes \langle e_m|^B) |\Psi\rangle^{AB}}{\sqrt{P_m}} \otimes |e_m\rangle^B
 \end{aligned}$$

→ A については、 $\left\{ P_m, \frac{(I^A \otimes \langle e_m |^B) |\Psi\rangle^{AB}}{\sqrt{P_m}} \right\}$  とする。

つまり、A の状態は、以下の **密度行列** になる。

$$\rho^A := \sum_m P_m \times \frac{(I^A \otimes \langle e_m |^B) |\Psi\rangle \langle \Psi|^{AB} (I^A \otimes |e_m\rangle^B)}{P_m}$$

$$= \sum_m \underbrace{(I^A \otimes \langle e_m |^B)}_{\text{部分トレース}} \underbrace{|\Psi\rangle \langle \Psi|^{AB}}_{\text{部分トレース}} (I^A \otimes |e_m\rangle^B)$$

部分トレース。

$$=: \text{Tr}_B [ |\Psi\rangle \langle \Psi|^{AB} ]$$

↑ A における  $|\Psi\rangle^{AB}$  の **縮約状態**



B を捨てる。



$$\Psi^A = \text{Tr}_B [ |\Psi\rangle \langle \Psi|^{AB} ]$$

具体的にやってみる。

$$\bullet \quad |\Psi\rangle^{AB} = \sum_{j=1}^{d_A} \sum_{k=1}^{d_B} C_{jk} |a_j\rangle^A \otimes |b_k\rangle^B$$

$$\bullet \quad \Psi^A = \text{Tr}_B \left[ \sum_{j,j'=1}^{d_A} \sum_{k,k'=1}^{d_B} C_{jk} \overline{C_{j'k'}} |a_j\rangle \langle a_{j'}|^A \otimes |b_k\rangle \langle b_{k'}|^B \right]$$

$$= \sum_{m=1}^{d_B} \sum_{j,j'=1}^{d_A} \sum_{k,k'=1}^{d_B} C_{jk} \overline{C_{j'k'}} |a_j\rangle \langle a_{j'}|^A \langle e_m | b_k \rangle \langle b_{k'} | e_m \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j, j'=1}^{d_A} \sum_{R, R'=1}^{d_B} C_{jR} \overline{C_{j'R'}} |a_j\rangle \langle a_{j'}|^A \sum_{m=1}^{d_B} \langle e_m | b_R \rangle \langle b_{R'} | e_m \rangle \\
&= \sum_{m=1}^{d_B} \langle b_{R'} | e_m \rangle \langle e_m | b_R \rangle \\
&= \langle b_{R'} | \left( \sum_{m=1}^{d_B} |e_m\rangle \langle e_m| \right) | b_R \rangle \\
&= \langle b_{R'} | b_R \rangle \\
&= \delta_{RR'}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j, j'=1}^{d_A} \left( \sum_{R=1}^{d_B} C_{jR} \overline{C_{j'R'}} \right) |a_j\rangle \langle a_{j'}|^A$$

$\Rightarrow T_B$  は、Bの基底  $\{|e_m\rangle\}_m$  に依存しない。

↳ 実際には、

$$\Psi^A = \text{Tr}_B \left[ \sum_{j,j'=1}^{d_A} \sum_{r,r'=1}^{d_B} C_{jr} \overline{C_{j'r'}} |a_j\rangle \langle a_{j'}|^A \otimes |b_r\rangle \langle b_{r'}|^B \right]$$
$$= \sum_{j,j'=1}^{d_A} \sum_{r,r'=1}^{d_B} C_{jr} \overline{C_{j'r'}} |a_j\rangle \langle a_{j'}|^A \times \text{Tr}_B [ |b_r\rangle \langle b_{r'}| ]$$

$$= \langle b_{r'} | b_r \rangle$$

$$= \delta_{rr'}$$

$$= \sum_{j,j'=1}^{d_A} \left( \sum_{r=1}^{d_B} C_{jr} \overline{C_{j'r}} \right) |a_j\rangle \langle a_{j'}|^A$$

と計算するのが楽。

具体例1.



$$|\Psi\rangle^{AB} = |\varphi\rangle^A \otimes |\psi\rangle^B : \text{積純粋状態}$$

$$\Rightarrow \Psi^A = \text{Tr}_B [ |\varphi\rangle\langle\varphi|^A \otimes |\psi\rangle\langle\psi|^B ]$$

$$= |\varphi\rangle\langle\varphi|^A \times \text{Tr}_B [ |\psi\rangle\langle\psi|^B ]$$

$$= |\varphi\rangle\langle\varphi|^A : \text{純粋状態}$$

同様に,  $\Psi^B = |\psi\rangle\langle\psi|^B$

積純粋状態の縮約状態は、純粋状態

具体例2. 

(積ごとの状態)

$$|\Psi\rangle^{AB} = \frac{1}{2} (\sqrt{3} |0\rangle^A |0\rangle^B + |1\rangle^A |1\rangle^B) : \text{エンタングル純粋状態}$$

$$\Rightarrow \Psi^A = \text{Tr}_B \left[ \frac{\sqrt{3} |00\rangle^{AB} + |11\rangle^{AB}}{2} \frac{\sqrt{3} \langle 00|^{AB} + \langle 11|^{AB}}{2} \right]$$

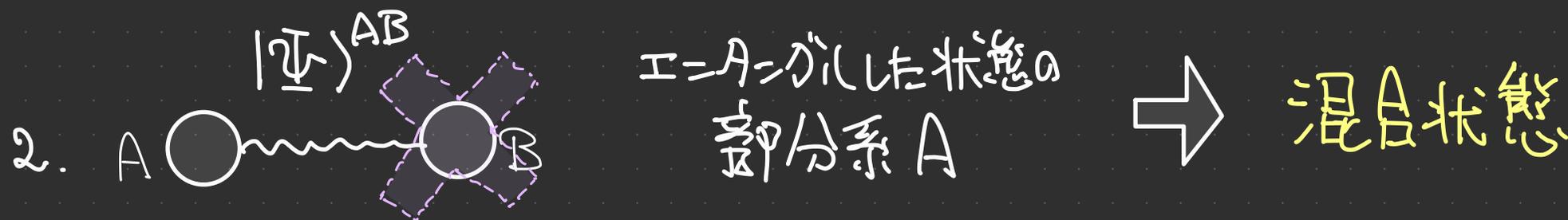
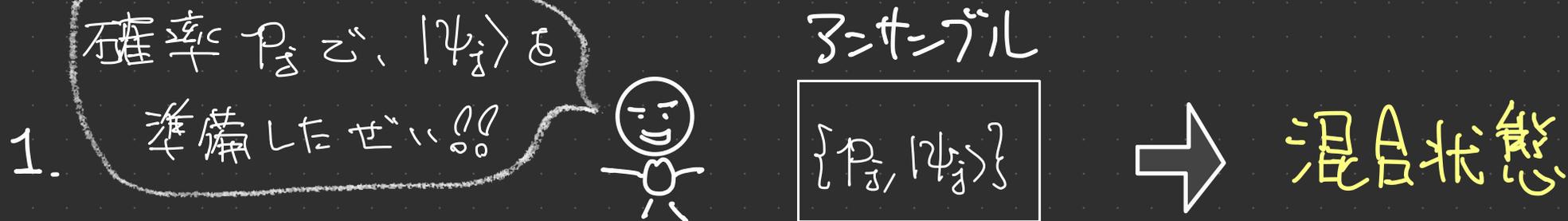
$$= \frac{1}{4} \text{Tr}_B \left[ 3 |00\rangle \langle 00|^{AB} + \sqrt{3} (|00\rangle \langle 11|^{AB} + |11\rangle \langle 00|^{AB}) + |11\rangle \langle 11|^{AB} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Tr}_B [ |00\rangle \langle 00|^{AB} ] = |0\rangle \langle 0|^A \times \text{Tr}_B [ |0\rangle \langle 0|^B ] = |0\rangle \langle 0|^A \\ \text{Tr}_B [ |00\rangle \langle 11|^{AB} ] = |0\rangle \langle 1|^A \times \text{Tr}_B [ |0\rangle \langle 1|^B ] = 0 \quad \text{etc...} \end{array} \right.$$

$$\therefore \Psi^A = \frac{1}{4} (3 |0\rangle \langle 0|^A + |1\rangle \langle 1|^A) : \text{混合状態}$$

エンタングルした純粋状態の縮約状態は、混合状態

## 混合状態の二通りの解釈



例: Gibbs 状態  $e^{-\hat{H}/k_B T} / Z$

量子系 A

熱浴 B

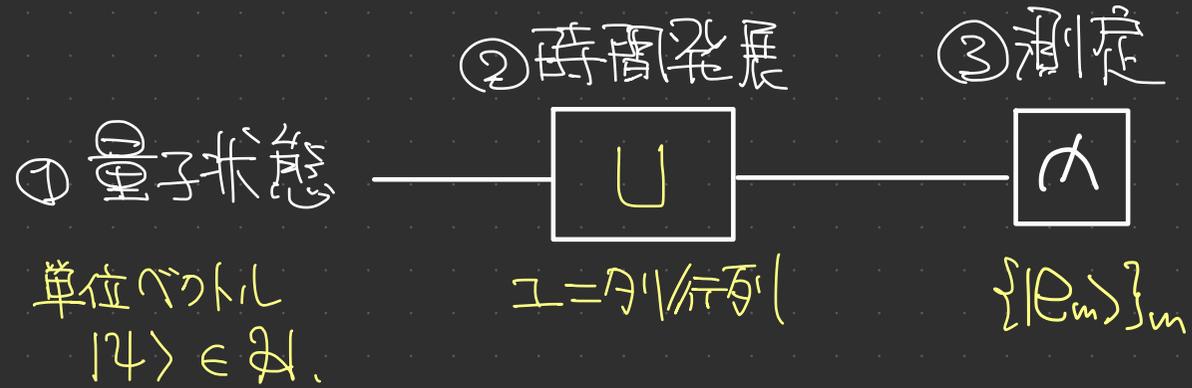
解釈 1.  $\Leftrightarrow$  カノニカル・アンサンブル (標準的)

熱浴が干渉して  
振るっている!!

解釈 2.  $\Leftrightarrow$  カノニカル 典型性 (ここは 20 年くらい)

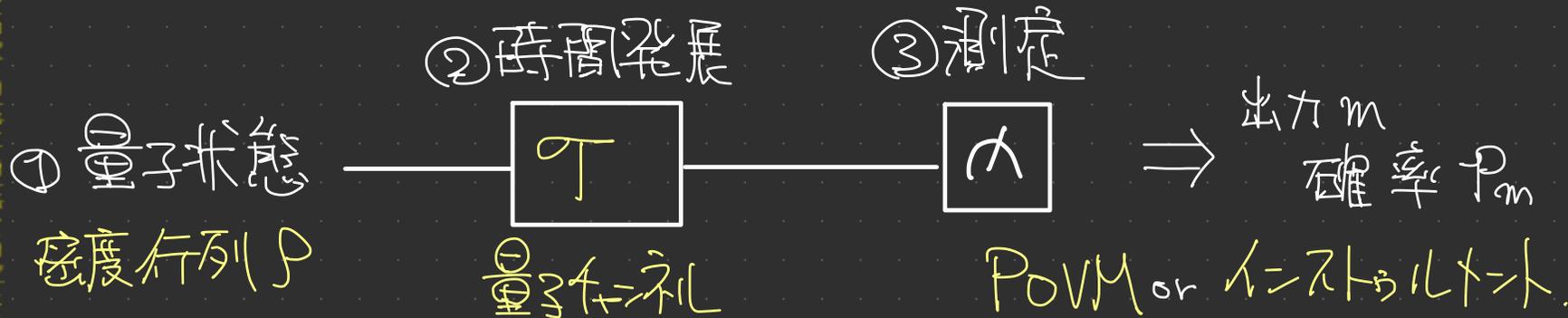
熱浴も含めれば、  
純粋状態

標準:



④ 複合量子系のヒルベルト空間はテンソル積

「部分トレース」を公理系に陽に組み込んだだけ。



拡張

④ 複合量子系のヒルベルト空間はテンソル積

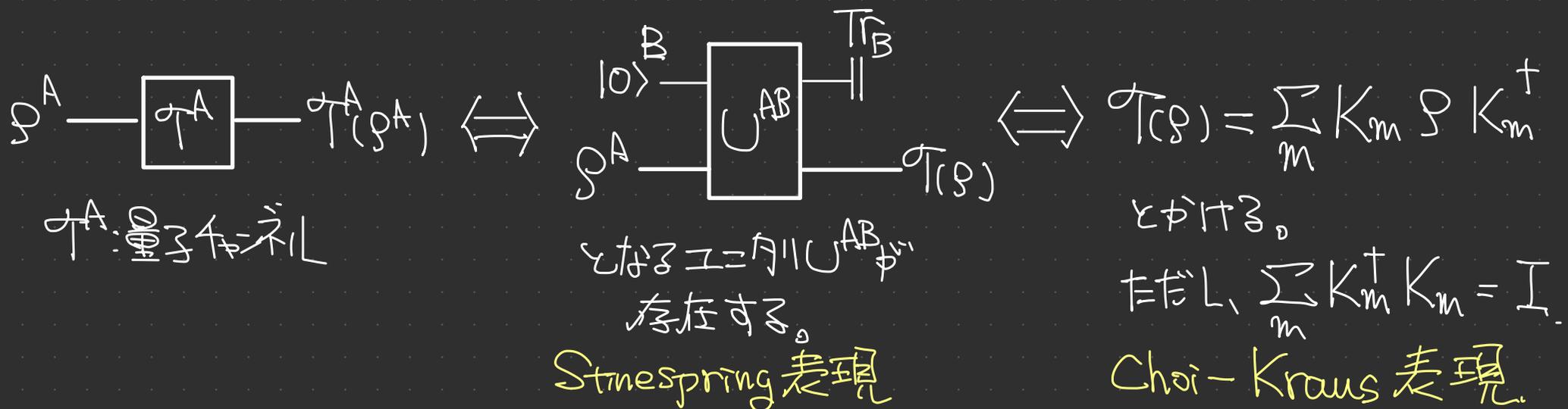
## 2-2-2. 時間発展 : ユニタリ v.s. 量子チャネル

復習 : 量子チャネル  $\mathcal{T}$  :  $\rho$  状態  $\rho$  を 状態  $\mathcal{T}(\rho)$  に写す写.

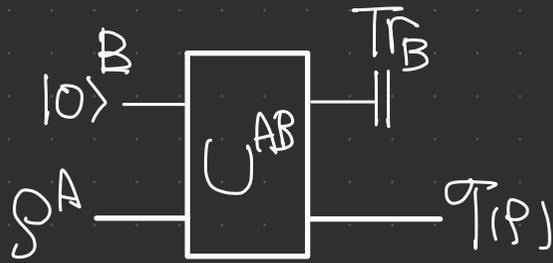
1. トレース保存 :  $\text{Tr}[\mathcal{T}(\rho)] = \text{Tr}[\rho]$

2. 完全正値性 :  $(\mathcal{T}^A \otimes \text{id}^B)(\rho^{AB}) \geq 0 \iff \rho^{AB} \geq 0$

### 量子チャネルの等価な表現



ここは①~③を説明。



なぜか  $U^{AB}$  が存在する。

Stinespring表現

①



$$\mathcal{T}(\rho) = \sum_m K_m \rho K_m^\dagger$$

とかける。

$$\text{ただし、} \sum_m K_m^\dagger K_m = I$$

Choi-Kraus表現



②

③

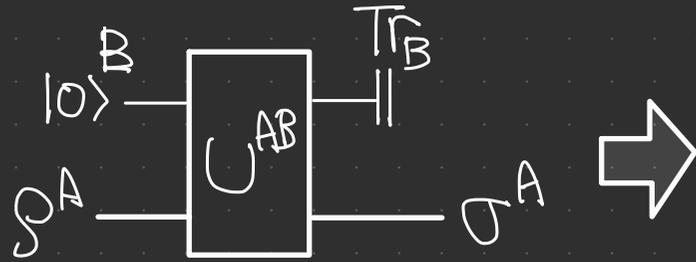


$T^A$ : 量子チャネル



「量子チャネル-状態双対」  
を用いると楽

① の証明



ユニタリ  $U^{AB}$  が存在する。

Stinespring 表現

$$\sigma = \sum_m K_m \rho K_m^\dagger$$

とかける。

$$\text{ただし、} \sum_m K_m^\dagger K_m = I$$

Choi-Kraus 表現

• 初期状態:  $\rho^A \otimes |0\rangle\langle 0|^B$

• ユニタリ後:  $U^{AB} (\rho^A \otimes |0\rangle\langle 0|^B) U^{AB\dagger}$

• 部分トレース:

$$\sum_m (I^A \otimes \langle e_m|^B) U^{AB} (\rho^A \otimes |0\rangle\langle 0|^B) U^{AB\dagger} (I^A \otimes |e_m\rangle^B)$$

$$=: K_m^A \text{ とおく。}$$

$$K_m^A := (I^A \otimes \langle e_m |^B) \cup^{AB} (I^A \otimes |0\rangle^B)$$

• 終状態:  $\sum_m K_m \rho (K_m)^\dagger$

$$\begin{aligned} \text{また, } \sum_m K_m^\dagger K_m &= \sum_m \langle 0|^B \cup^{AB\dagger} |e_m\rangle^B \langle e_m|^B \cup^{AB} |0\rangle^B \\ &= \langle 0|^B \cup^{AB\dagger} \cup^{AB} |0\rangle^B \\ &= \langle 0|^B I^{AB} |0\rangle^B = I^A \times \langle 0|^B I^B |0\rangle^B \\ &= I^A \end{aligned}$$

Stinespring 表現の B を測定した  $\implies$  Choi-Kraus 表現

(ただし、測定結果は知らない)

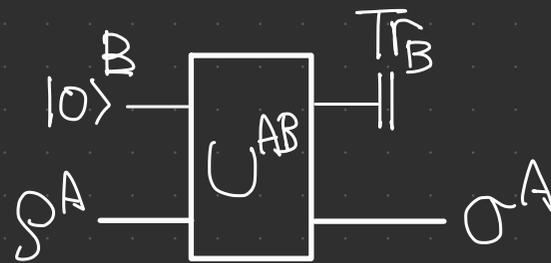
## ②の証明

$$\sigma = \sum_m K_m \rho K_m^\dagger$$

とかける。

$$\text{ただし、} \sum_m K_m^\dagger K_m = I.$$

Choi-Kraus表現



となるユニタリ  $U^{AB}$  が存在する。

Stinespring表現

唐突だが、

$$|\varphi\rangle^A \otimes |0\rangle^B \longrightarrow \sum_m K_m^A |\varphi\rangle^A \otimes |e_m\rangle^B$$

と...変換はユニタリ!! なぜなら、内積を保存するから。

$$\text{(右辺の内積)} = \left( \sum_{m'} \langle \psi |^A K_{m'}^{A\dagger} \otimes \langle e_{m'} |^B \right) \left( \sum_m K_m^A |\varphi\rangle^A \otimes |e_m\rangle^B \right)$$

$$= \sum_m \langle \psi |^A K_m^{A\dagger} K_m^A |\varphi\rangle^A$$

$$= \langle \psi | \varphi \rangle$$

$$= (\langle \psi |^A \otimes \langle 0 |^B) (|\varphi\rangle^A \otimes |0\rangle^B)$$

$$= (\text{左辺の共役})$$

この  $\Gamma = A$  を  $\cup^{AB}$  とおく。

$$\cup^{AB} (\rho^A \otimes |0\rangle\langle 0|^B) \cup^{AB\dagger} \quad \Rightarrow \quad \rho^A = \sum_j \rho_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|^A$$

(対角化)

$$= \sum_j \rho_j \left( \cup^{AB} (|\varphi_j\rangle^A \otimes |0\rangle^B) \right) (\text{h.c.})$$

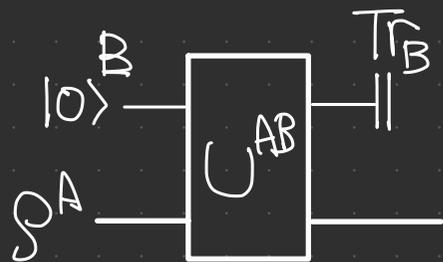
$$= \sum_j \rho_j \left( \sum_m K_m^A |\varphi_j\rangle^A \otimes |e_m\rangle^B \right) \left( \sum_m \langle\varphi_j|^A K_m^{A\dagger} \otimes \langle e_m|^B \right)$$

$$\xrightarrow{\text{Tr}_B} \sum_j \rho_j \sum_m K_m^A |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|^A K_m^{A\dagger}$$

~~~~~ =  $\rho^A$

$$= \sum_m K_m^A \rho^A K_m^{A\dagger}$$

つまり、



$$\sum_m K_m \rho K_m^\dagger$$

となるユニタリを構成できた。

### ③ の証明

$$\mathcal{T}(\rho) = \sum_m K_m \rho K_m^\dagger \text{ とかける。}$$

$$\text{ただし、} \sum_m K_m^\dagger K_m = I$$

Choi-Kraus 表現

③



$\mathcal{T}$  は量子チャンネル



1. トリ-保存
2. 完全正值写像

$$\rho \xrightarrow{\sigma} \sum_m K_m \rho K_m^\dagger \quad \text{ただし、} \sum_m K_m^\dagger K_m = I$$

1. トル-ス保存.

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[ \sum_m K_m \rho K_m^\dagger \right] &= \sum_m \text{Tr} \left[ K_m \rho K_m^\dagger \right] \\ &= \sum_m \text{Tr} \left[ K_m^\dagger K_m \rho \right] \\ &= \text{Tr} \left[ \rho \right] \end{aligned}$$

2. 完全正値性  $\Leftrightarrow (\sigma^A \otimes \text{id}^B)(\rho^{AB}) \geq 0$  ,  $\forall \rho^{AB} \geq 0$

$$(\sigma^A \otimes \text{id}^B)(\rho^{AB}) = \sum_m (K_m^A \otimes I^B) \rho^{AB} (K_m^A \otimes I^B)^\dagger$$

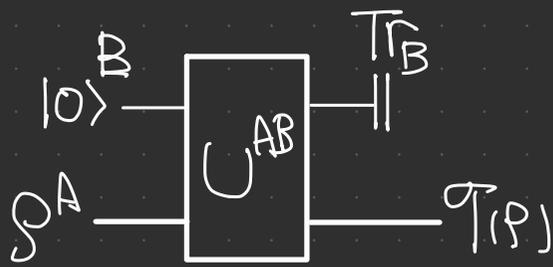
$$\text{対角化} \hookrightarrow = \sum_m \sum_j \rho_j (K_m^A \otimes I^B) |\rho_j\rangle \langle \rho_j|^{AB} (K_m^A \otimes I^B)^\dagger$$

$\uparrow$  = これは  $\mathbb{R}$  上で  $\geq 0$

$\therefore \forall |\psi\rangle^{AB}$

$$\langle \mathcal{U}^{AB} (\text{r.h.s.}) | \mathcal{U}^{AB} \rangle = \sum_m \sum_j p_j | \langle \mathcal{U}^{AB} K_m^A \otimes I^B | \mathcal{U}^{AB} \rangle |^2$$

よって、③  $p_m \frac{1}{j_i} \leq \frac{1}{j_i}$



ユニタリ  $U^{AB}$  が存在する。

Stinespring 表現

①



$$\sigma(\rho) = \sum_m K_m \rho K_m^\dagger$$

とかける。

$$\text{ただし、} \sum_m K_m^\dagger K_m = I$$



②

Choi-Kraus 表現

③



$\sigma^A$ : 量子チャンネル



↑ 4+ネール-状態双対。

学ぶべきこと:

1. 量子チャンネル = ユニタリ時間発展 + 部分トレース。

2. Choi-Kraus 表現 = ユニタリ時間発展

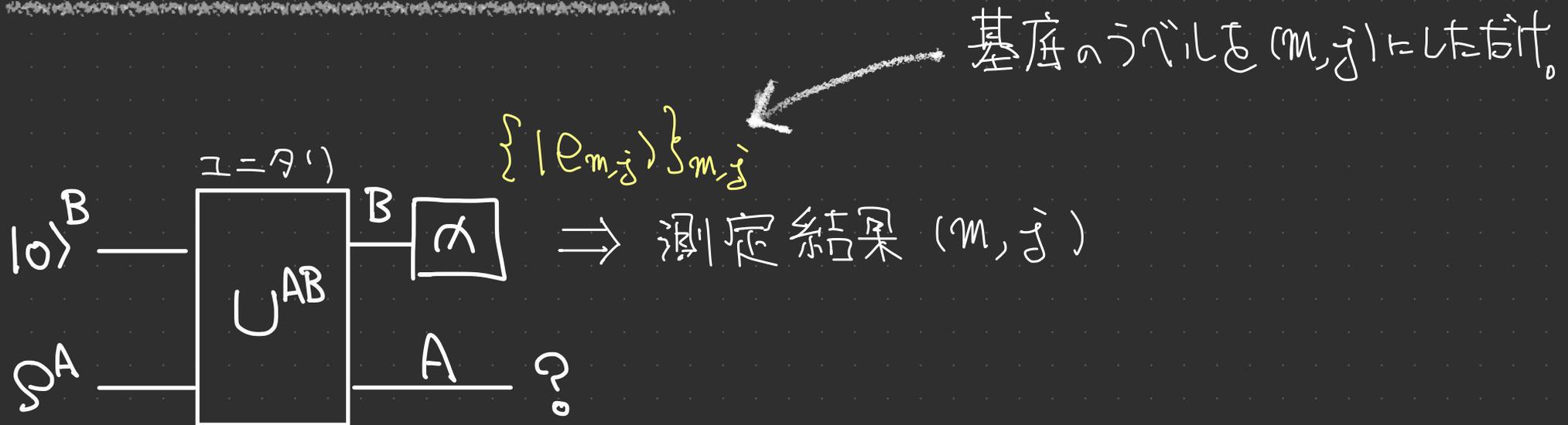
+ 部分系の測定 (ただし結果は  
知らぬ)

## 2-2-3. 量子測定: 基底 v.s. POVM とインストゥルメント

復習: インストゥルメント  $\{C_m\}_m$

- 1.  $C_m$  はトレース非増加 &  $\sum_m C_m$  はトレース保存.
- 2.  $C_m$  は完全正值写像

以下の状況も考えてみる。



- 測定結果  $(m, j)$  を知らない場合.

$$A \text{ の状態} \Rightarrow \sum_{m, j} K_{m, j}^A \rho^A K_{m, j}^{A \dagger} \quad \text{Choi-Kraus 表現}$$

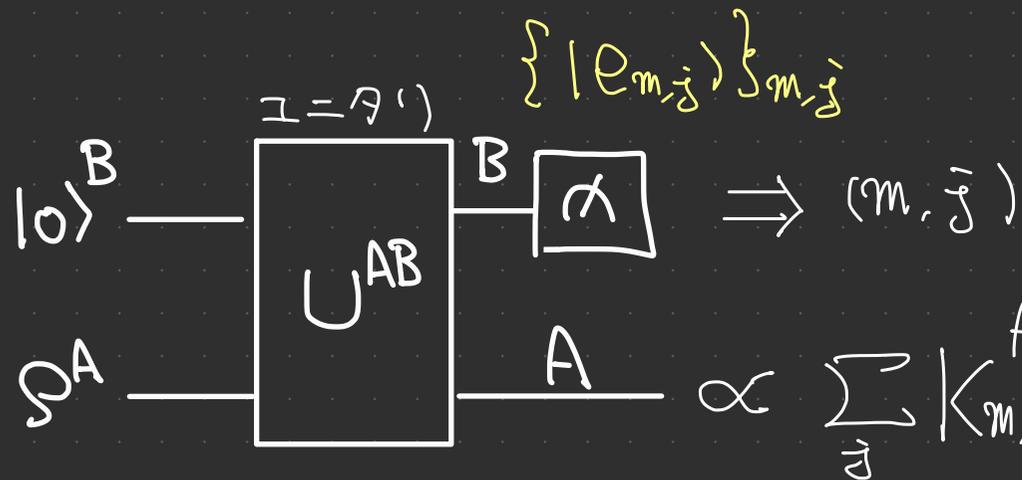
- 測定結果  $(m, j)$  を知っている場合.

$$A \text{ の状態} \Rightarrow \propto K_{m, j}^A \rho^A K_{m, j}^{A \dagger} \quad \text{確率 } P_{m, j} = \text{Tr}[\cdot]$$

- 測定結果のうち、 $m$  を知っている、 $j$  を知らない場合.

$$A \text{ の状態} \Rightarrow \propto \sum_j K_{m, j}^A \rho^A K_{m, j}^{A \dagger}$$

$$\text{確率 } P_m = \text{Tr} \left[ \sum_j K_{m, j}^A \rho^A K_{m, j}^{A \dagger} \right]$$



$m$ は知ってる!!  
 $j$ は知らない。

完全正値かつトレースは1以下。

つまり、 $C_m(\rho) := \sum_j K_{m,j}^A \rho^A K_{m,j}^{A\dagger}$  と定めると、

$\{ C_m \}_m$  は イニストラル X = T になる。

$\left[ \sum_m C_m \text{ は トレース保存} \iff \sum_{m,j} K_{m,j} \rho K_{m,j}^\dagger \text{ が トレース保存} \right]$

確率は？

測定結果  $m$  を得る確率 (今は教える必要ない)

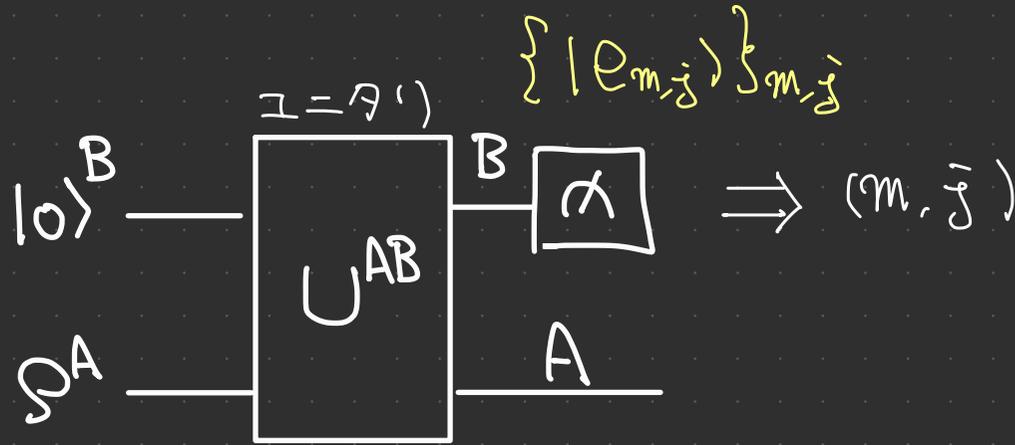
$$\begin{aligned} \text{Tr}[C_m(\rho)] &= \text{Tr}\left[\sum_j K_{m,j} \rho K_{m,j}^\dagger\right] \\ &= \text{Tr}\left[\underbrace{\sum_j K_{m,j}^\dagger K_{m,j}}_{=: P_m} \rho\right] \end{aligned}$$

$\{P_m\}_m$  の性質

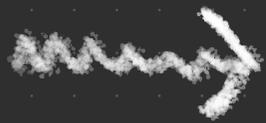
$$P_m \geq 0 \quad \& \quad \sum_m P_m = \sum_m \sum_j K_{m,j}^\dagger K_{m,j} = I$$

つまり、 $\{P_m\}_m$  は、POVM !!

# 測定のみとめ



「 $m$ は知ってる!!  
 $\bar{j}$ は知らない。」



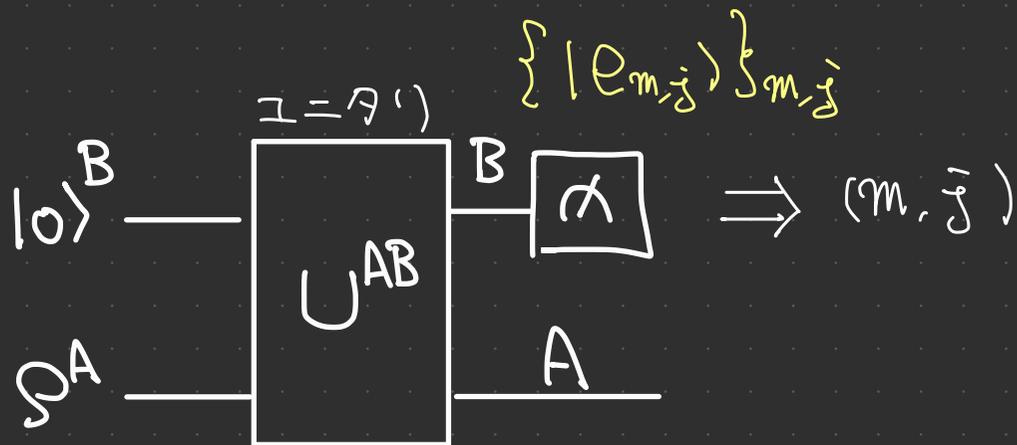
このような測定は、POVM や インストラルメント  
 で記述できる。

逆に、任意の POVM は、この形の測定で実現できる。

= POVM の Naimark 拡張。 □

# 測定のため

# POVM !!



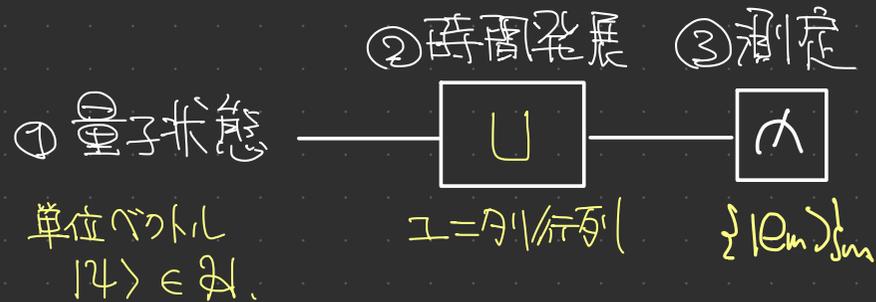
mは知ってる!!  
jは知らない。

イ=スタート + POVMの解釈の一つ。

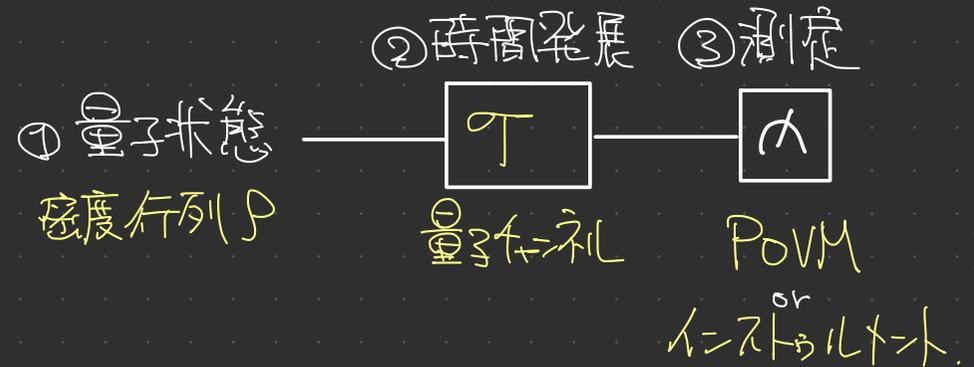
- Aを直接測定せず、Bをくっけて時間発展させ、Bを測定する。  
(間接測定)
- Bの測定結果の一部しか分らなかった。

## 2-2. のまとめ

### 標準的枠組み



### 拡張された枠組み



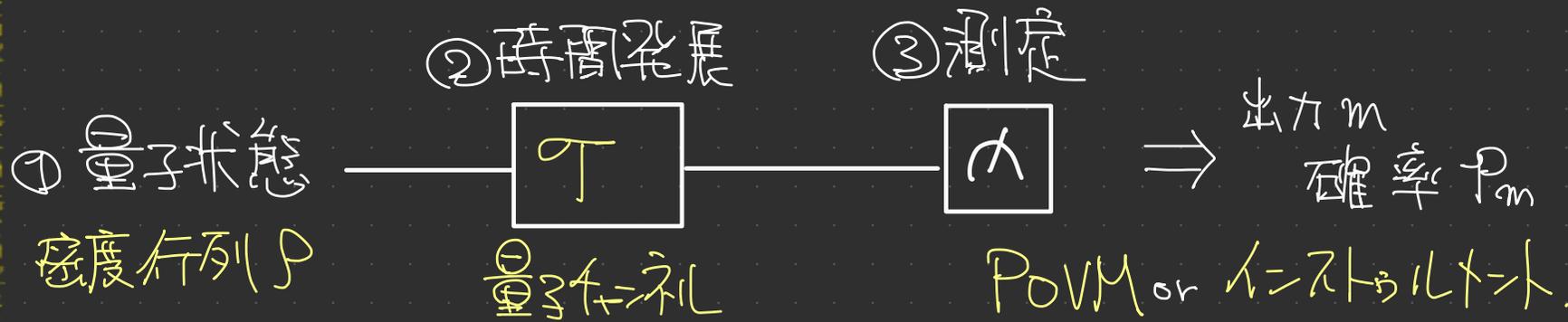
④ 複合量子系のヒルベルト空間はテンソル積

- 「部分トレース」が効いてくるが、等価な枠組み
- 量子情報では 部分系 を取り扱うことが多いので、拡張枠組みが便利

# 3. 量子のより深い理解

3-1. アンサンブル v.s. 密度行列

3-2. 最大エンタングル状態.



④ 複合量子系のヒルベルト空間はテンソル積

量子論の枠組みも (狭い範囲に) 拡張できた。



色々と整理できてるよー。

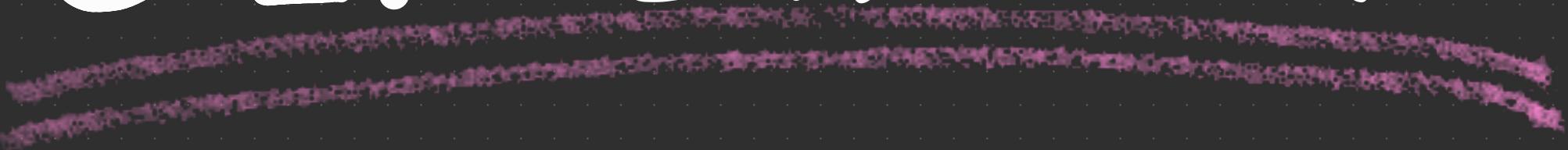
1. エンタングルメントと密度行列
2. 最大エンタングルメント状態

それで、  
何が新しいこと、  
分かったの？



① 量子状態のアンサンブルと

3.1. 密度行列.



確率  $p_j$  で、 $|\psi_j\rangle$  を  
準備したぜ!!!



量子系



むむむ。  
どう記述せぬ?

ナイーブに考えると、この状況は二通りに記述できそう。

1. アンサンブル:  $\{p_j, |\psi_j\rangle\}_j$

2. 密度行列:  $\rho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$

1. と 2. は等価なのか?

claims

1.と2.は等価ではなく、

□  $\mathcal{F}$ -基底表現 □ は物理的に“ダメ”な表現。

より具体的には、

2つの  $\mathcal{F}$ -基底  $\{P_j, |\psi_j\rangle\}_{j=1}^m$  と  $\{Q_\alpha, |\varphi_\alpha\rangle\}_{\alpha=1}^n$  が

$$\sum_{j=1}^m P_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j| = \sum_{\alpha=1}^n Q_\alpha |\varphi_\alpha\rangle \langle \varphi_\alpha|$$

を満たすとき、

この2つの  $\mathcal{F}$ -基底は物理的には区別できない。



つまり、アセンブル表記は、  
区別できないのに、異なるものとして記述してしまっている.....

具体例: 1 qubit (2次元)

ア=π=ゲート1:  $E_1 := \left\{ \left( \frac{1}{2}, |0\rangle \right), \left( \frac{1}{2}, |1\rangle \right) \right\}$

ア=π=ゲート2:

$$E_2 := \left\{ \left( \frac{1}{6}, |0\rangle \right), \left( \frac{1}{4}, \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right), \left( \frac{1}{4}, \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right), \right. \\ \left. \left( \frac{1}{6}, \frac{|0\rangle + \sqrt{3}|1\rangle}{2} \right), \left( \frac{1}{6}, \frac{|0\rangle - \sqrt{3}|1\rangle}{2} \right) \right\}$$

→ どちらも密度行列は  $\frac{I}{2}$  なのに 見分けられない。

証明に使うテクニック:

1. Schmidt分解

2. 純粋化、

1. Schmidt分解

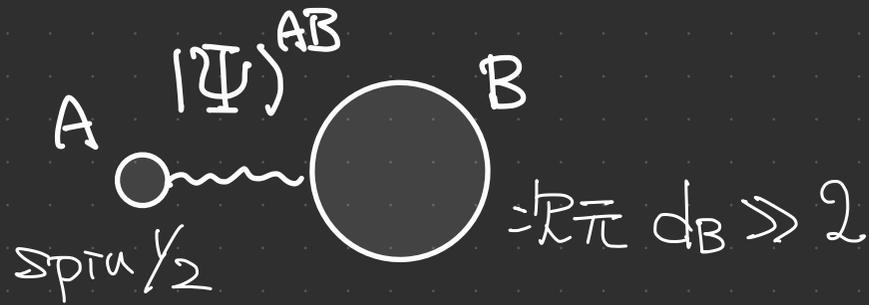
系ABの純粋状態  $|\Psi\rangle^{AB}$  は必ず以下の形で書ける。

$$|\Psi\rangle^{AB} = \sum_{j=1}^{\min\{d_A, d_B\}} \sqrt{p_j} |e_j\rangle^A \otimes |f_j\rangle^B$$

確率  $\swarrow$   $\searrow$  正規直交

\* 和の  $\min\{d_A, d_B\}$  に注意。

## 具体例.



ABの純粋状態は、

$$|\Psi\rangle^{AB} = \sqrt{p} |e_1\rangle^A \otimes |f_1\rangle^B + \sqrt{1-p} |e_2\rangle^A \otimes |f_2\rangle^B$$

と、 $d_A = 2$  の線形和で表される。

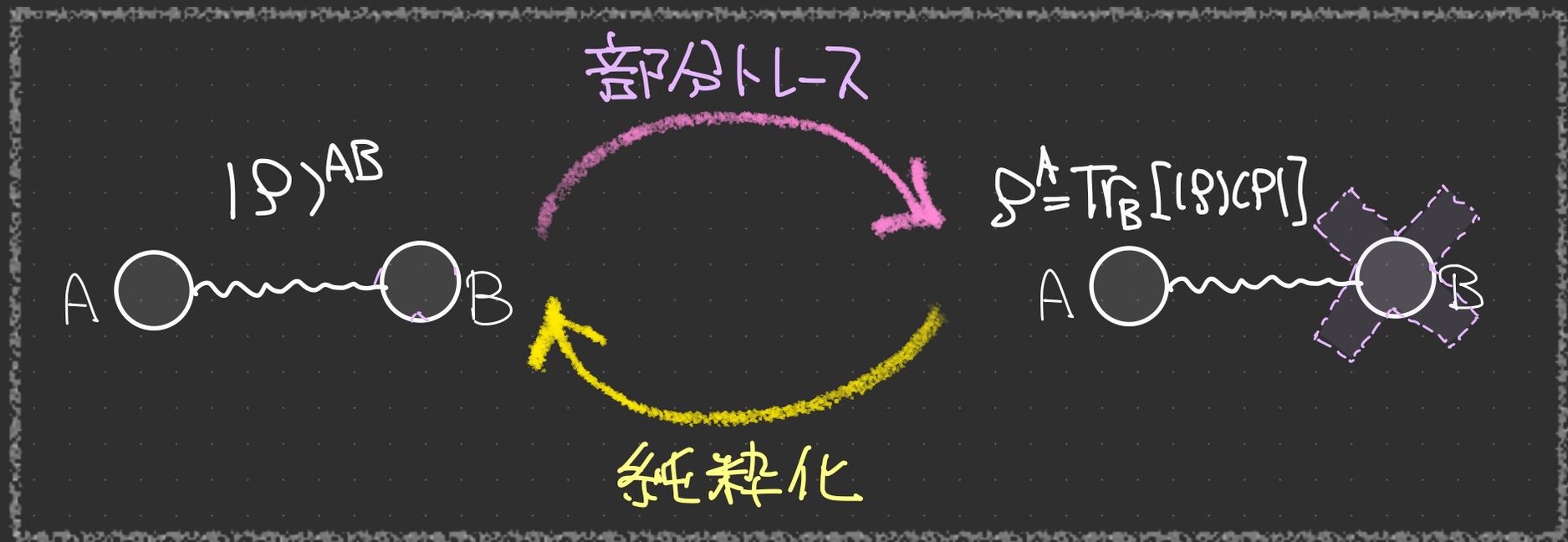
↑ 特異値分解から従う。

## 2. 純粋化

量子状態  $\rho^A$  の純粋化とは、純粋状態  $|\rho\rangle^{AB}$  を、

$$\text{Tr}_B [ |\rho\rangle\langle\rho|^{AB} ] = \rho^A$$

を満たすもの。



具体例:  $\rho^A = \sum_{j=1}^{d_A} \rho_j |\rho_j\rangle\langle\rho_j|^A$  : 対角化.

$|\rho\rangle^{AA'} = \sum_{j=1}^{d_A} \sqrt{\rho_j} |\rho_j\rangle^A |\rho_j\rangle^{A'}$  は、 $\rho^A$  の純粋化.

$\rightarrow \text{Tr}_{A'} [|\rho\rangle\langle\rho|^{AA'}] = \rho^A$  は容易に確かめられる。

注意:

1. 純粋化は 一意ではない。

$(I^A \otimes U^{A'}) |\rho\rangle^{AA'}$  ( $U^{A'}$  は  $U = \mathbb{1}$ ) も純粋化。

2. この例では  $B = A'$  となる、 $\dim B = \dim A$  だが、

一般には  $\dim B \geq \dim A$ .

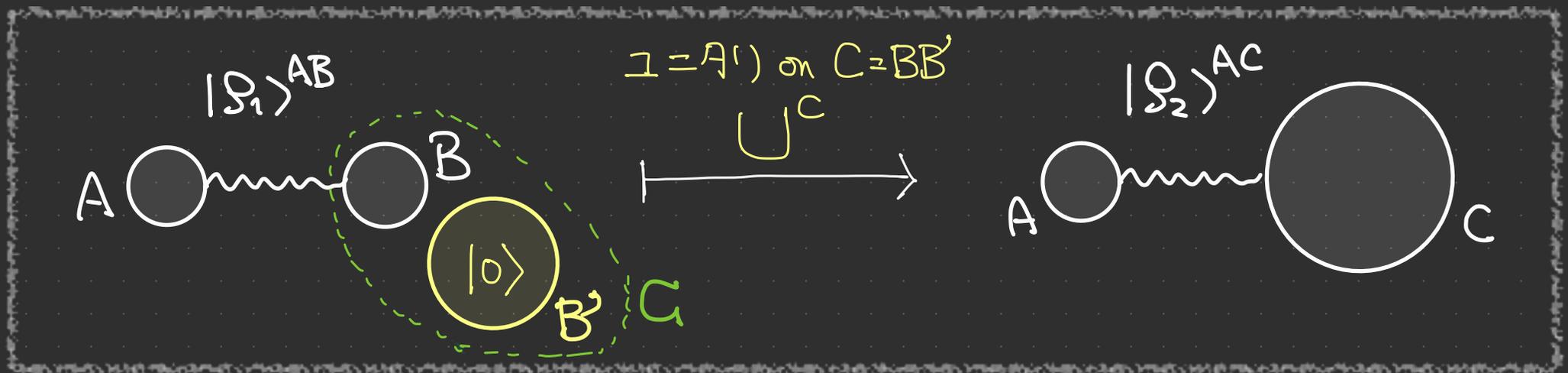
# 純粋化の自由度

$|\rho_1\rangle^{AB}$  と  $|\rho_2\rangle^{AC}$  を  $\mathcal{S}^A$  の純粋化とする ( $\dim B \leq \dim C$ )

このとき、以下を満たす  $C$  上のユニタリ  $U^C$  が存在する。

$$|\rho_2\rangle^{AC} = (I^A \otimes U^C) (|\rho_1\rangle^{AB} \otimes |0\rangle^{B'})$$

ここで、 $B'$  は、 $C = BB'$  とする量子系。



# 証明

$$S^A = \sum_{j=1}^{d_A} S_j |S_j\rangle\langle S_j|^A \text{ を } S^A \text{ の対角化とする。}$$

$|S_1\rangle^{AB}$  と  $|S_2\rangle^{AC}$  の Schmidt 分解を考えると、  
 $d_A \leq d_B \leq d_C$  となる。また、

$$|S_1\rangle^{AB} = \sum_{j=1}^{d_A} \sqrt{S_j} |S_j\rangle^A \otimes |e_j\rangle^B$$

$$|S_2\rangle^{AC} = \sum_{j=1}^{d_A} \sqrt{S_j} |S_j\rangle^A \otimes |f_j\rangle^C$$

← ←  $S^A$  の純粋化なのだ。

$$\Rightarrow \text{“} \left\{ |e_j\rangle^B \otimes |0\rangle^{B'} \right\}_{j=1}^{d_A} \text{ と } \left\{ |f_j\rangle^C \right\}_{j=1}^{d_A} \text{ は}$$

各々、互いに直交し、かつ、個数が同じ。

$\Rightarrow$   $\exists U^C$  が存在して、

$$\forall j=1, \dots, d_A, |f_j\rangle^C = U^C (|e_j\rangle^B \otimes |0\rangle^{B'})$$

$$\therefore |\rho_2\rangle^{AC} = \sum_{j=1}^{d_A} \sqrt{\rho_j} |\rho_j\rangle^A \otimes |f_j\rangle^C$$

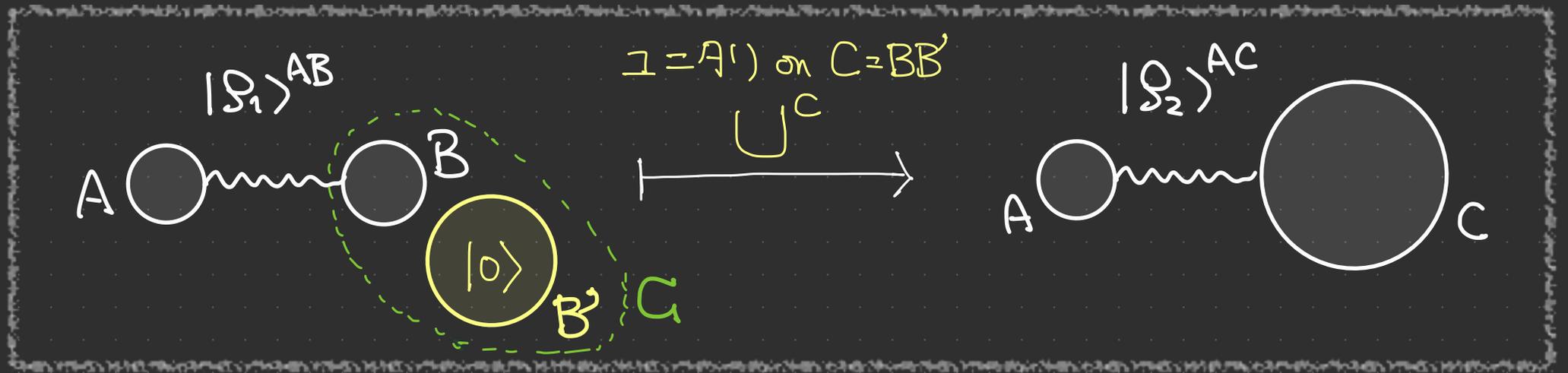
$$= \sum_{j=1}^{d_A} \sqrt{\rho_j} |\rho_j\rangle^A \otimes U^C (|e_j\rangle^B \otimes |0\rangle^{B'})$$

$= |\rho_1\rangle^{AB}$

$$= (I^A \otimes U^C) (|\rho_1\rangle^{AB} \otimes |0\rangle^{B'})$$



つまりここで、 $U$  以下の  $U=U^C$  の存在が示された。



この「純粹化の自由度」に基づいて、

エンタングルメントを見返してみる。

2つの正定値エルミート演算子  $\{P_j, |\psi_j\rangle\}_{j=1}^m$  と  $\{Q_\alpha, |\varphi_\alpha\rangle\}_{\alpha=1}^n$  が

$$\sum_{j=1}^m P_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| = \sum_{\alpha=1}^n Q_\alpha |\varphi_\alpha\rangle\langle\varphi_\alpha|$$

を満たすとき、

この2つの正定値エルミート演算子は物理的に区別できない。

証明 :  $m \leq n$  となる。

$$S^A := \sum_{j=1}^m P_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|^A = \sum_{\alpha=1}^n Q_\alpha |\varphi_\alpha\rangle\langle\varphi_\alpha|^A$$

とおいで、二通りの純粋化を考へる。

$$B \text{ 並 } \dim B = m$$

$$C \text{ 並 } \dim C = n$$

} の量子系とし、各基底を

$$\{ |b_j\rangle \}_{j=1}^m \text{ 並 } \{ |c_\alpha\rangle \}_{\alpha=1}^n \text{ とする。}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |S_1\rangle^{AB} = \sum_{j=1}^m \sqrt{p_j} |\psi_j\rangle^A \otimes |b_j\rangle^B \\ |S_2\rangle^{AC} = \sum_{\alpha=1}^n \sqrt{q_\alpha} |\varphi_\alpha\rangle^A \otimes |c_\alpha\rangle^C \end{array} \right.$$

は、 $S^A$  の純粋化。

この2つの状態の性質

①  $|S_1\rangle^{AB}$  の  $B$  を  $\{ |b_j\rangle \}_{j=1}^m$  で測定

$\Rightarrow A$  では von-Neumann  $\{ p_j, |\psi_j\rangle \}_{j=1}^m$  が実現

$|\Psi_2\rangle^{AC}$  の  $C$  を  $\{|C_\alpha\rangle\}_{\alpha=1}^n$  で測定の

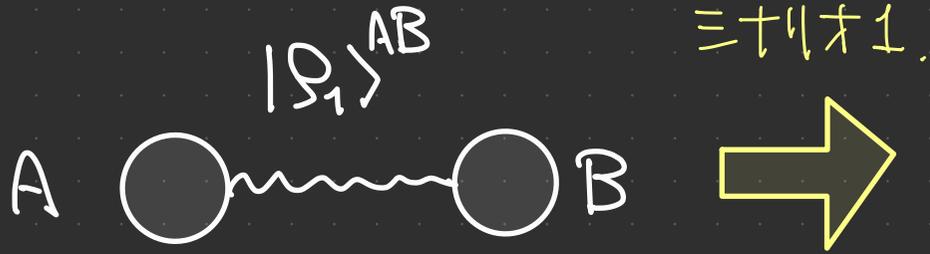
$\Rightarrow A$  は 3-セ-ゲ-ル  $\{|Q_\alpha\rangle, |P_\alpha\rangle\}_{\alpha=1}^n$  が実現.

② 純粋化の自由度から、

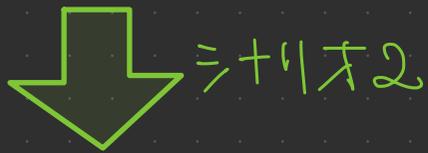
$$|\Psi_2\rangle^{AC} = (I^A \otimes U^C) |\Psi_1\rangle^{AB} \otimes |0\rangle^{B'}$$

となるユニタリ  $U^C$  が存在。

B を  $\{|b_j\rangle\}_{j=1}^m$  で測定

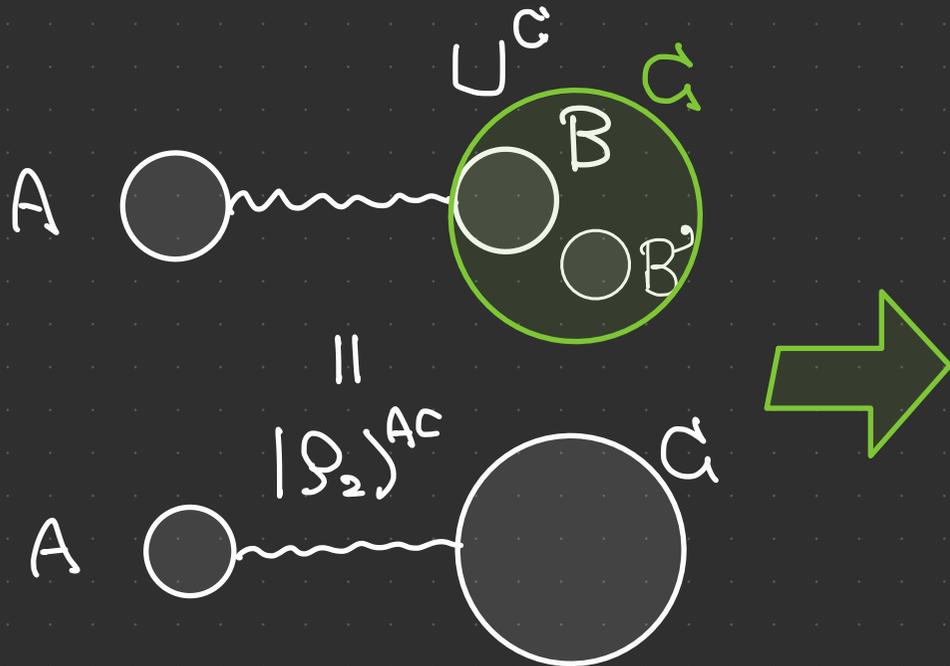


A ○  $\{P_j, |b_j\rangle\}_{j=1}^m$   
 ア=サ=ブル.



$BB' = U^C$  を追加.

C を  $\{|c_\alpha\rangle\}_{\alpha=1}^n$  で測定



A ○  $\{P_\alpha, |c_\alpha\rangle\}_{\alpha=1}^n$   
 ア=サ=ブル.

Aは何の操作もしないのに、エンタングルが変化。



もし、 $\{p_j, |\psi_j\rangle\}_{j=1}^m$  と  $\{q_\alpha, |\varphi_\alpha\rangle\}_{\alpha=1}^n$  を見分けることが

できるなら、通信することがなく、情報を送ってしまふ。

これは様々な物理に矛盾。

$$\sum_{j=1}^m p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| = \sum_{\alpha=1}^n q_\alpha |\varphi_\alpha\rangle\langle\varphi_\alpha|$$

とみえる2つのエンタングル  $\{p_j, |\psi_j\rangle\}_{j=1}^m$  と  $\{q_\alpha, |\varphi_\alpha\rangle\}_{\alpha=1}^n$  を

見分ける物理的な方法は存在しない。

# 3-1のまとめ.

確率  $p_j$  で、 $|\psi_j\rangle$  を  
準備したせい!!



量子系



むむむ。  
どう記述できる?

ナイーブに考えると、この状況は二通りに記述できる。

~~1. 状態列:  $\{p_j, |\psi_j\rangle\}_j$~~

2. 密度行列:  $\rho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$

➔ 物理を正しく反映する記述方法は、

密度行列 によるもの。

実害が出ることは少ないが、熱・統計力学で

カノニカル・アンサンブル  $\left\{ \frac{e^{-E_j/k_B T}}{\mathcal{Z}}, |E_j\rangle \right\}_j$

量子系 A

熱浴 B

と書くときは、頭の方隅で注意が必要

カノニカル・アンサンブル

$$\left\{ \frac{e^{-E_j/k_B T}}{\mathcal{Z}}, |E_j\rangle \right\}_j$$

O.K.



必ずしも

そうとは限らない。

カノニカル状態 (Gibbs 状態)

$$\frac{e^{-\hat{H}/k_B T}}{\text{Tr}[e^{-\hat{H}/k_B T}]}$$

①  
最大

3.2. エンタングル状態



$$d_A := \dim A \leq \dim B =: d_B$$

$|\Phi\rangle^{AB}$  の Schmidt 分解が以下の形するとき、

$|\Phi\rangle^{AB}$  を **最大エンタングル状態** と呼ぶ。

$$|\Phi\rangle^{AB} = \frac{1}{\sqrt{d_A}} \sum_{j=1}^{d_A} |j\rangle^A \otimes |j\rangle^B$$

\*  $d_A \leq d_B$  に注意。



様々な量子情報プロトコルのリソース。

# ① 最大エンタングル状態は何か特殊なの？

例. spin- $\frac{1}{2} \times 2$  のとき

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Phi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle^A \otimes |0\rangle^B \pm |1\rangle^A \otimes |1\rangle^B) \\ |\Psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle^A \otimes |1\rangle^B \pm |1\rangle^A \otimes |0\rangle^B) \end{array} \right.$$

などが「最大エンタングル」。

$|\Phi_{+}\rangle$  のど「が」  
特殊？

①  $A \neq 0$  なら  $B \neq 0$ ,  $A \neq 1$  なら  $B \neq 1$ .

← じゃじゃ,  $C_0 |0\rangle^A \otimes |0\rangle^B + C_1 |1\rangle^A \otimes |1\rangle^B$  也。

② ① に加えて、0/1 が出る確率が等しい。

← じゃじゃ,  $\frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0|^A \otimes |0\rangle\langle 0|^B + |1\rangle\langle 1|^A \otimes |1\rangle\langle 1|^B)$  也。



③ ①と②に加えて、純粋状態!!

← 正しく、全く理解した気にならない...

$|\Phi_+\rangle$  の  $\rho = \rho^T$   
特殊?

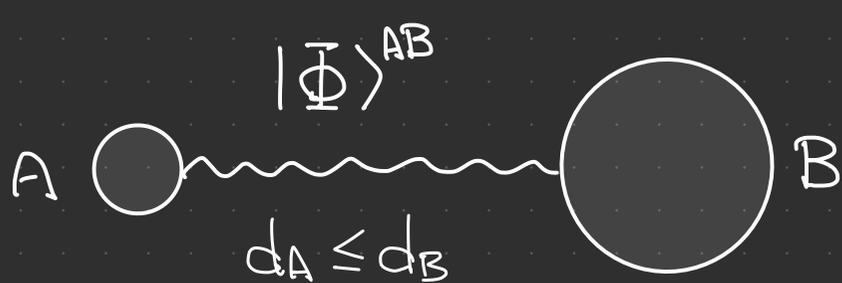


$|\Phi_+\rangle$  は **CHSH 不等式** を  
最大に破る状態!!



← 正しく、“量子情報”のオーストリアのリンク”との  
直接的関係が真んざい。

様々な答が考えられるが、“測定結果”の相関に着目。



$$|\Phi\rangle^{AB} = \frac{1}{\sqrt{d_A}} \sum_{j=1}^{d_A} |j\rangle^A \otimes |j\rangle^B$$

やう事: A と B を別々に測定し、その結果の相関をみる

1. A を  $\{|j\rangle\}_{j=1}^{d_A}$ , B を  $\{|j\rangle\}_{j=1}^{d_B}$  で測定.

↳ 明らかに、A が  $m$  なら、B も  $m$  なのぞ、完全に相関。

たとえば、 $\sum_{j=1}^{d_A} C_j |j\rangle^A \otimes |j\rangle^B$  や  $\frac{1}{d_A} \sum_{j=1}^{d_A} |j\rangle \langle j|^A \otimes |j\rangle \langle j|^B$

とも同様.

2. A を  $\{|e_j\rangle\}_{j=1}^{d_A}$  で測定,

準備:  $|e_m\rangle^A = \left( \sum_{j=1}^{d_A} |j\rangle\langle j|^A \right) |e_m\rangle^A = \sum_{j=1}^{d_A} \langle j|e_m\rangle |j\rangle^A$

測定結果  $m$  を得る確率と、測定後の B の状態

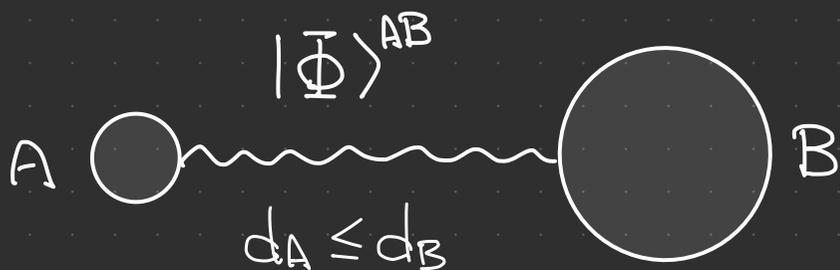
•  $P_m = \text{Tr} \left[ (|e_m\rangle\langle e_m|^A \otimes I^B) |\Phi\rangle\langle\Phi|^{AB} \right] = \frac{1}{d_A}$

•  $|\Phi_m\rangle^B = \left( \langle e_m|^A \otimes I^B \right) |\Phi\rangle^{AB} / \sqrt{P_m}$   
 $= \left( \langle e_m|^A \otimes I^B \right) \sum_{j=1}^{d_A} |j\rangle^A \otimes |j\rangle^B$   
 $= \sum_{j=1}^{d_A} \langle e_m|j\rangle |j\rangle^B$   
 $= \sum_{j=1}^{d_A} \overline{\langle j|e_m\rangle} |j\rangle^B$

$|e_m\rangle^A$  の複素共役が  
測定後の B の状態

$$= |\bar{e}_m\rangle^B$$

よから、たこと



$$|\bar{\Phi}\rangle^{AB} := \frac{1}{\sqrt{d_A}} \sum_{j=1}^{d_A} |j\rangle^A \otimes |j\rangle^B$$

$\{ |e_j\rangle \}_j$

$\Downarrow$

結果

$m$

$(|e_m\rangle^A)$

$\text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow |\bar{e}_m\rangle^B$

$\{ |e_j\rangle^A \}, \{ |\bar{e}_j\rangle^B \}$  とも  
完全相関!!

任意の基底  $\{ |e_j\rangle^A \}_{j=1}^{d_A}$  を用いて、 $|\bar{\Phi}\rangle^{AB}$

$$|\bar{\Phi}\rangle^{AB} = \frac{1}{\sqrt{d_A}} \sum_{j=1}^{d_A} |e_j\rangle^A \otimes |\bar{e}_j\rangle^B \quad \text{と書ける。}$$

こゝから分かること。

$$|\Phi\rangle^{AB} := \frac{1}{\sqrt{d_A}} \sum_{j=1}^{d_A} |j\rangle^A \otimes |j\rangle^B$$

$\{|j\rangle\}$ 基底で  
完全相関

$$= \frac{1}{\sqrt{d_A}} \sum_{j=1}^{d_A} |e_j\rangle^A \otimes |\bar{e}_j\rangle^B$$

$\forall \{|e_j\rangle\}$ 基底でも  
完全相関

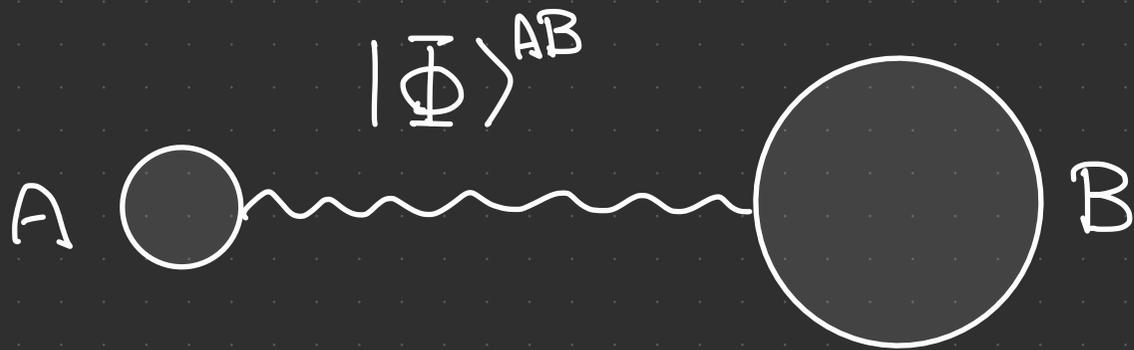
任意の基底で完全相関している量子状態は  
最大エンタングル状態 だけ!!

→ この性質は、量子テレポーテーション etc. で使われる。

数学的にはしばしば、 $U$ - $\bar{U}$ 不変 と言ったりする。

$$\forall U: \text{ユニタリ}, \quad (U^A \otimes \bar{U}^B) |\Phi\rangle^{AB} = |\Phi\rangle^{AB}$$

3-2のまとめ.



最大エンタングル状態  $|\Phi\rangle^{AB} = \frac{1}{\sqrt{d_A}} \sum_{j=1}^{d_A} |j\rangle^A \otimes |j\rangle^B$

この状態が特殊な役に立つ理由の一つ.

任意の基底の下で完全相関しているから.

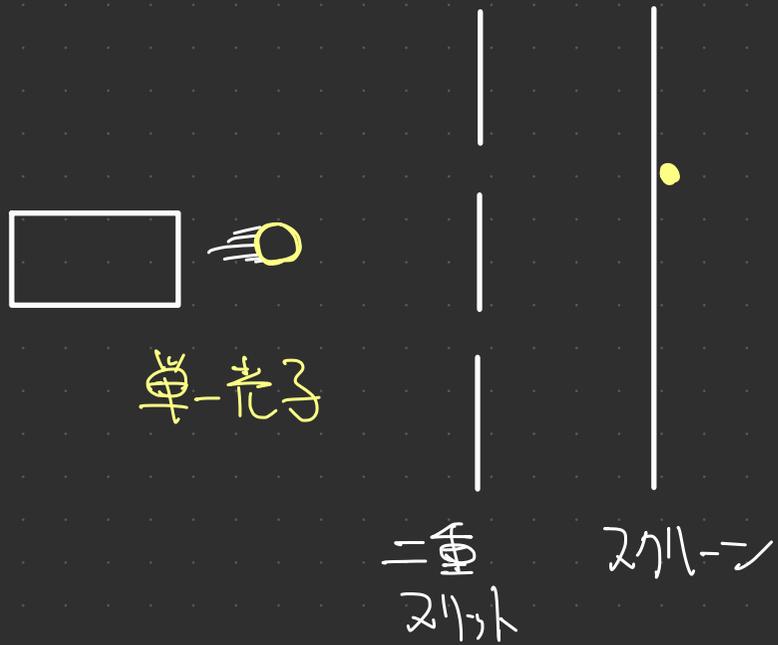
$\Leftrightarrow U \otimes \bar{U}$  不変

大  
奇り道



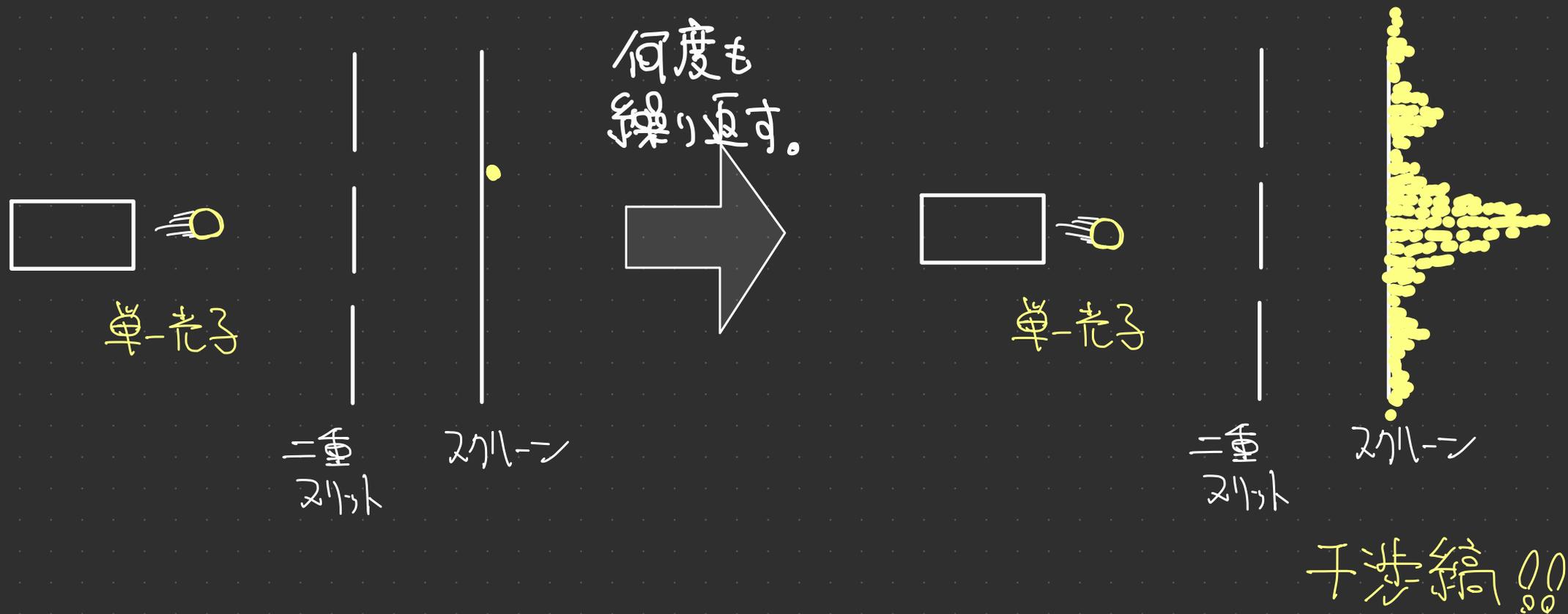
# エネルギーメント × 物理 を単純に楽しむ。

- ヤングの二重スリットの実験



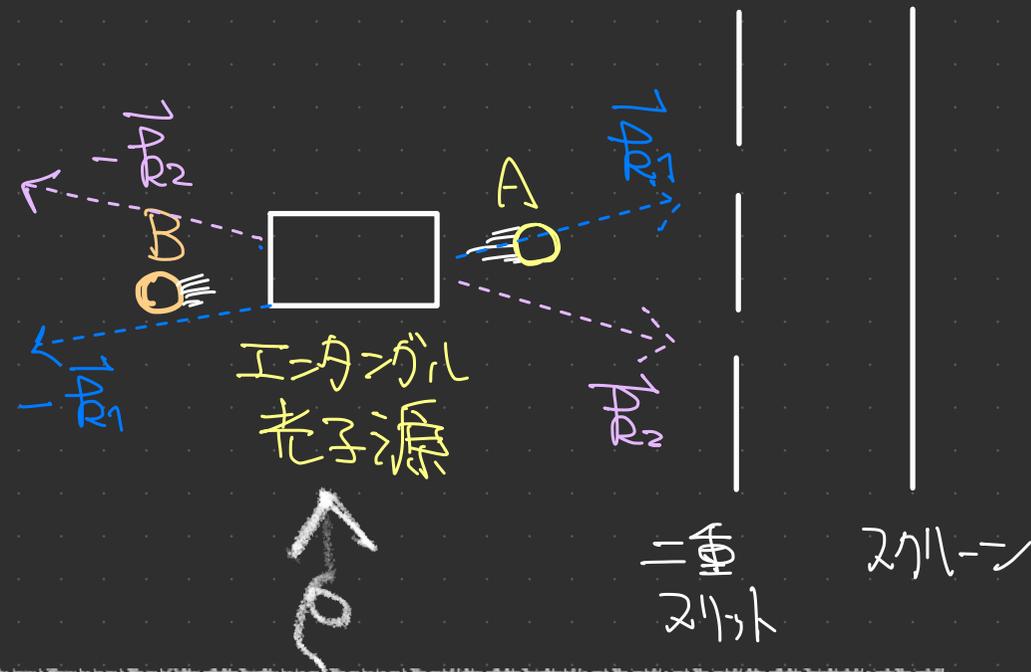
# エネルギーメント × 物理 を単純に楽しむ。

## • ヤングの二重スリットの実験



「単-光子が自分自身と干渉した」  
(波動関数の干渉実験)

# エーカ=ガール光子対 によるヤ=グの実験 : その1.



簡単のため、

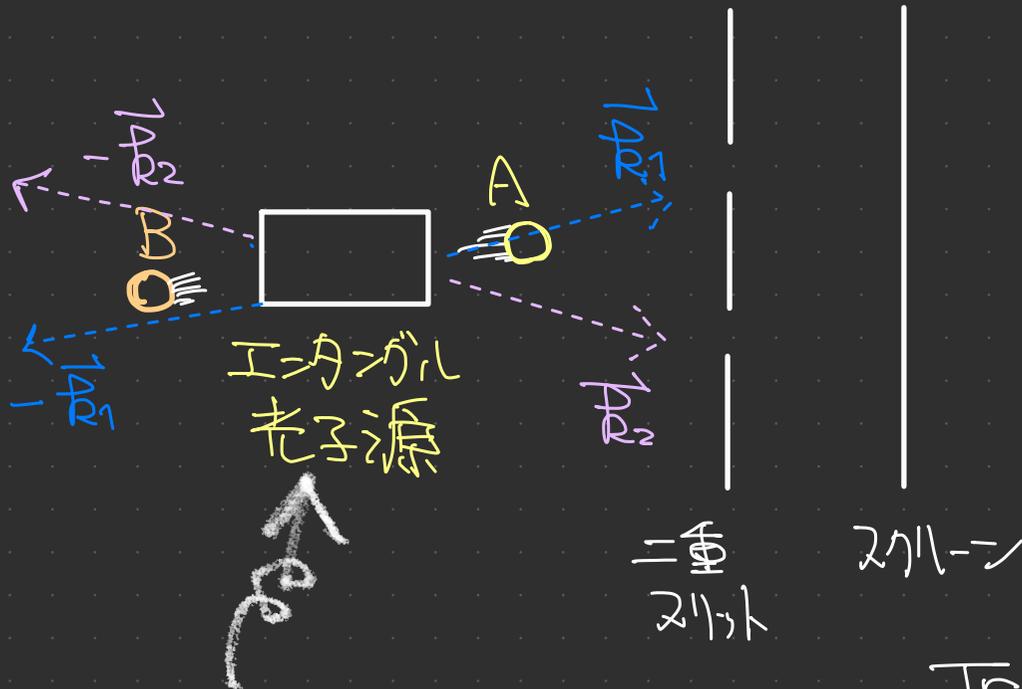
$$\propto |\vec{p}_1\rangle^A \otimes |-\vec{p}_1\rangle^B + |\vec{p}_2\rangle^A \otimes |-\vec{p}_2\rangle^B$$

Q1. 干渉縞はあはれるか?

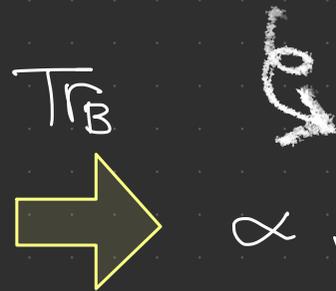
# A. あらわれない

## 理由1

この実験は光子Aだけを見る  $\Rightarrow$  光子Bは合計して



$\frac{I^A}{2}$  : 一様な確率分布  
(スクリーン上の位置に依存ない)



$$\propto |\vec{p}_1\rangle\langle\vec{p}_1|^A + |\vec{p}_2\rangle\langle\vec{p}_2|^A$$

簡単のため

$$\propto |\vec{p}_1\rangle^A \otimes |-\vec{p}_1\rangle^B + |\vec{p}_2\rangle^A \otimes |-\vec{p}_2\rangle^B$$

## 理由2

□ 干渉は、光子が、どちらのスリットを通ったかが  
決まていないときに起こる □

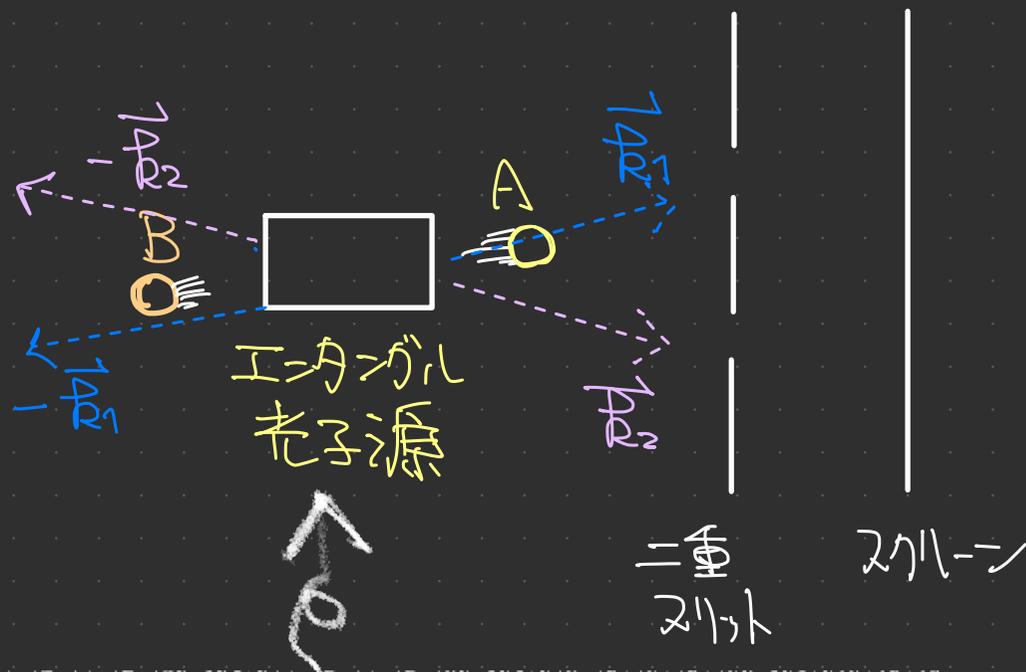
( = どちらのスリットを通ったかを測定すれば、干渉しない )

→ 光子Bを(いつか)測定すれば、エネルギーを同じく、  
光子Aがどちらのスリットを通ったかを決定できる。

実際に測らなくても  
原理的に可能 ⇒ No干渉

⇒ 干渉しない。

# エーカ=ガル光子対 によるヤ=グの実験 : その1

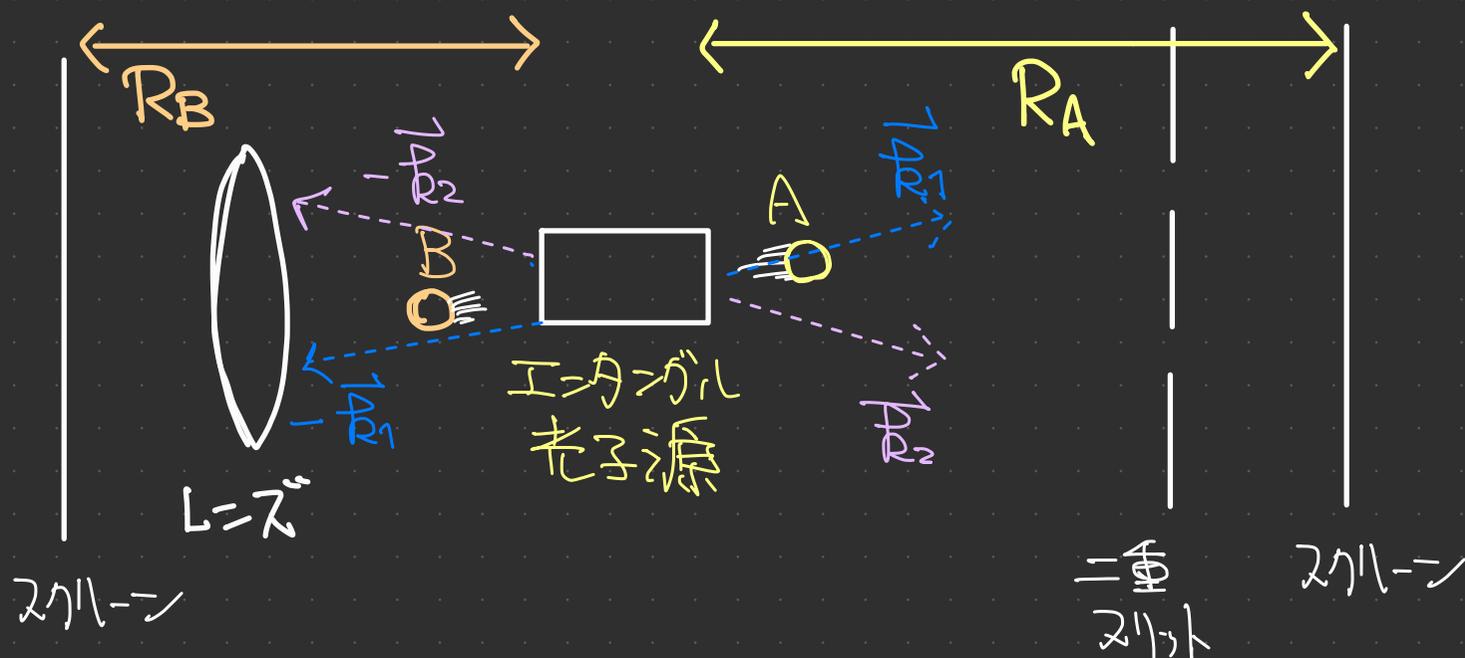


簡単のため、

$$\propto |\vec{p}_1\rangle^A \otimes |-\vec{p}_1\rangle^B + |\vec{p}_2\rangle^A \otimes |-\vec{p}_2\rangle^B$$

Q1. 干渉縞はあはれれるか? **A.** あはれれな

# エンタングル光子対 によるヤングの実験 : その2



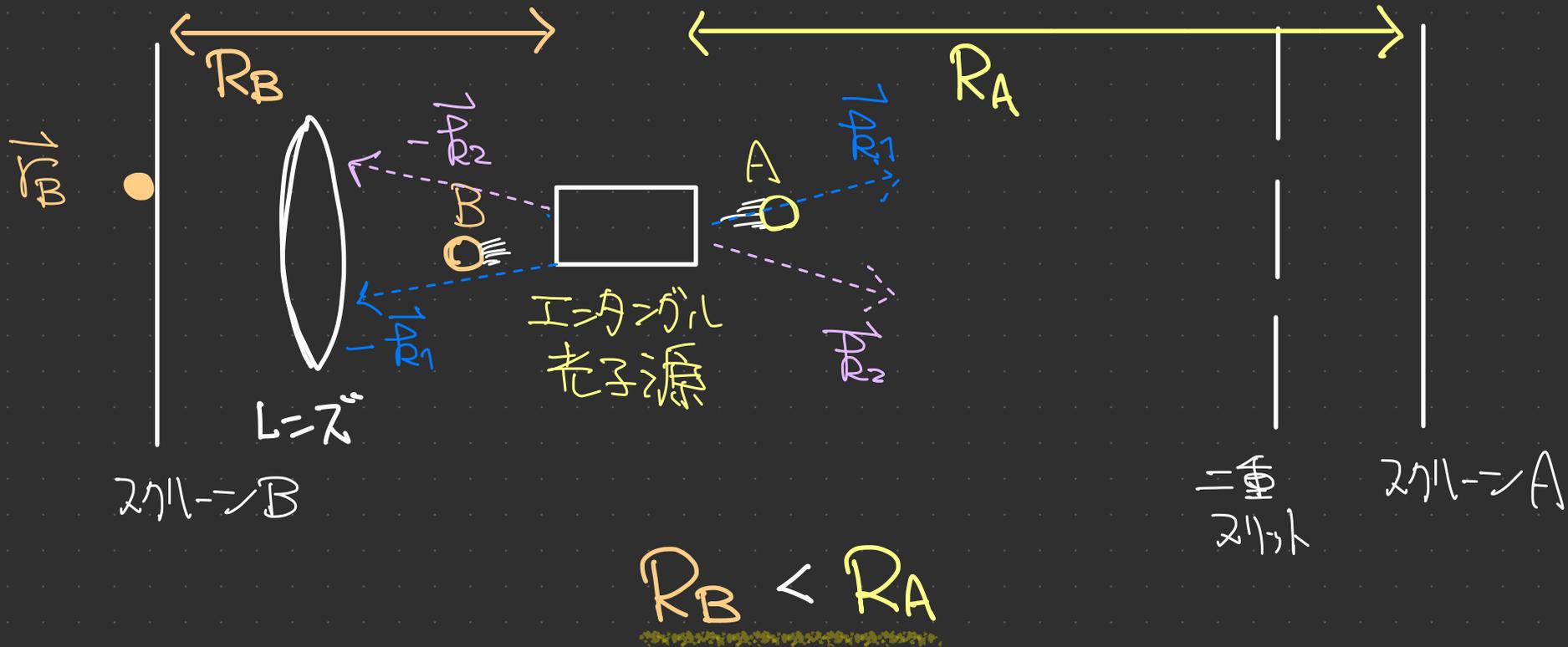
Q2. 干渉縞はあらわれるか?



A. あらわない!! Aだけを見ているから、

(Bが何をしようと) さっきと同じ。

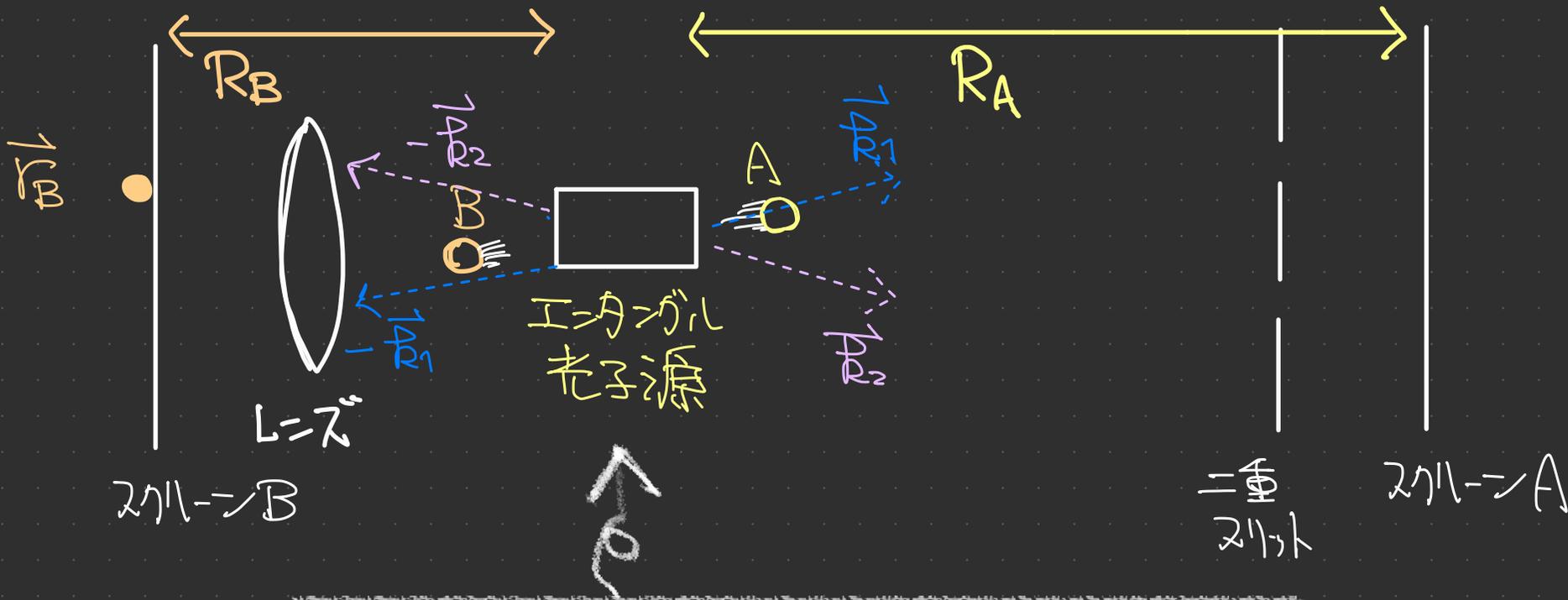
# エーアングルの光子対 によるヤングの実験 : その3



**Q3.** 光子Bが、スクリーン上の位置  $\vec{r}_B$  にあつた場合のみ、  
 スクリーンA上の光子Aをカウントすると、干渉縞は？

# A. あらわれた!!

理論



簡単のため、

$$\propto |\vec{p}_1\rangle^A \otimes |-\vec{p}_1\rangle^B + |\vec{p}_2\rangle^A \otimes |-\vec{p}_2\rangle^B$$

1. 光子Bが先にスクリーンにあたり。

2. L=ズのおかげで、 $|\vec{k}_1\rangle$ と $|\vec{k}_2\rangle$ を見分けられない。  
(量子消去)

$$\Rightarrow \text{光子A} \propto \alpha(\vec{k}_B) |\vec{k}_1\rangle^A + \beta(\vec{k}_B) |\vec{k}_2\rangle^A$$

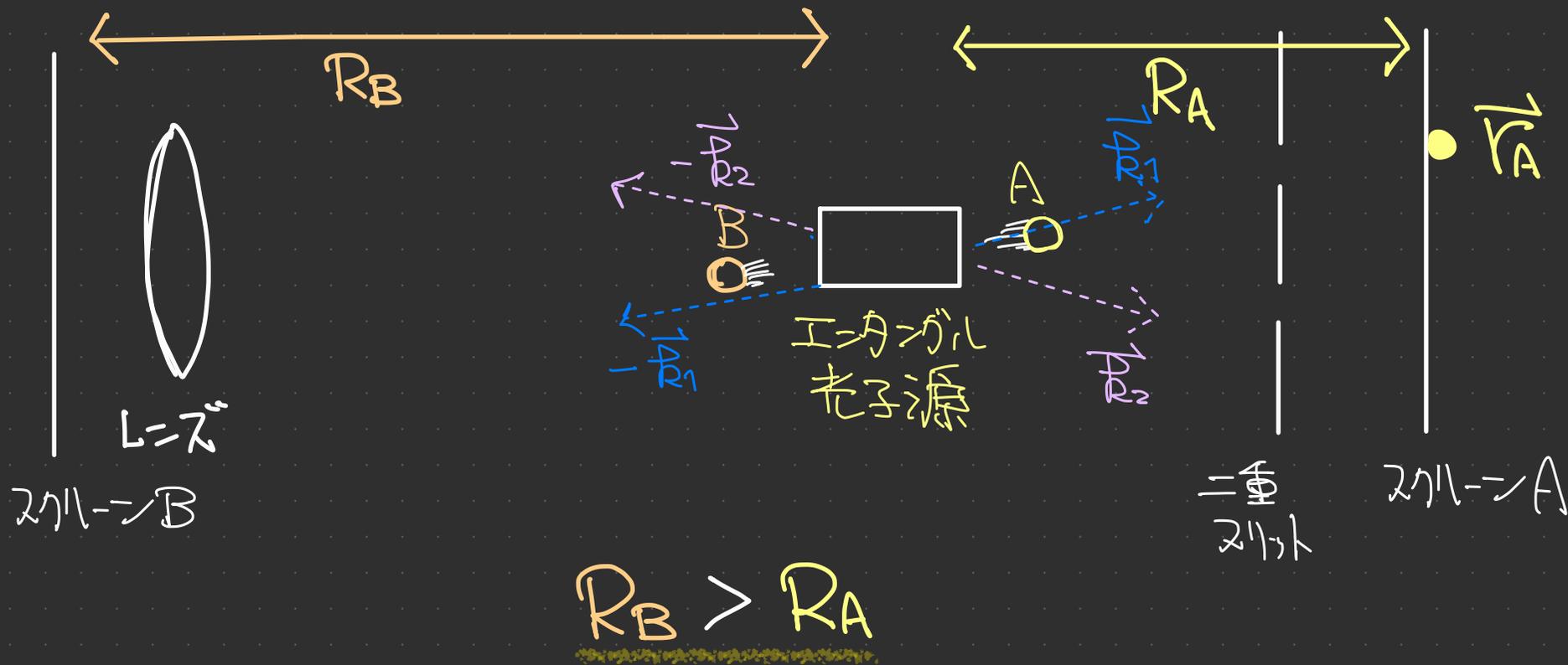
3. 光子Aは干渉する!!

ただし、係数が $\vec{k}_B$ に依存することに注意。

もし、 $\vec{k}_B$ でポスト・セレクトションしなければ、

$\Rightarrow \vec{k}_B$ の分布で平均  $\Rightarrow$  干渉縞が消える□

# エンタングル光子対 によるヤングの実験：最後

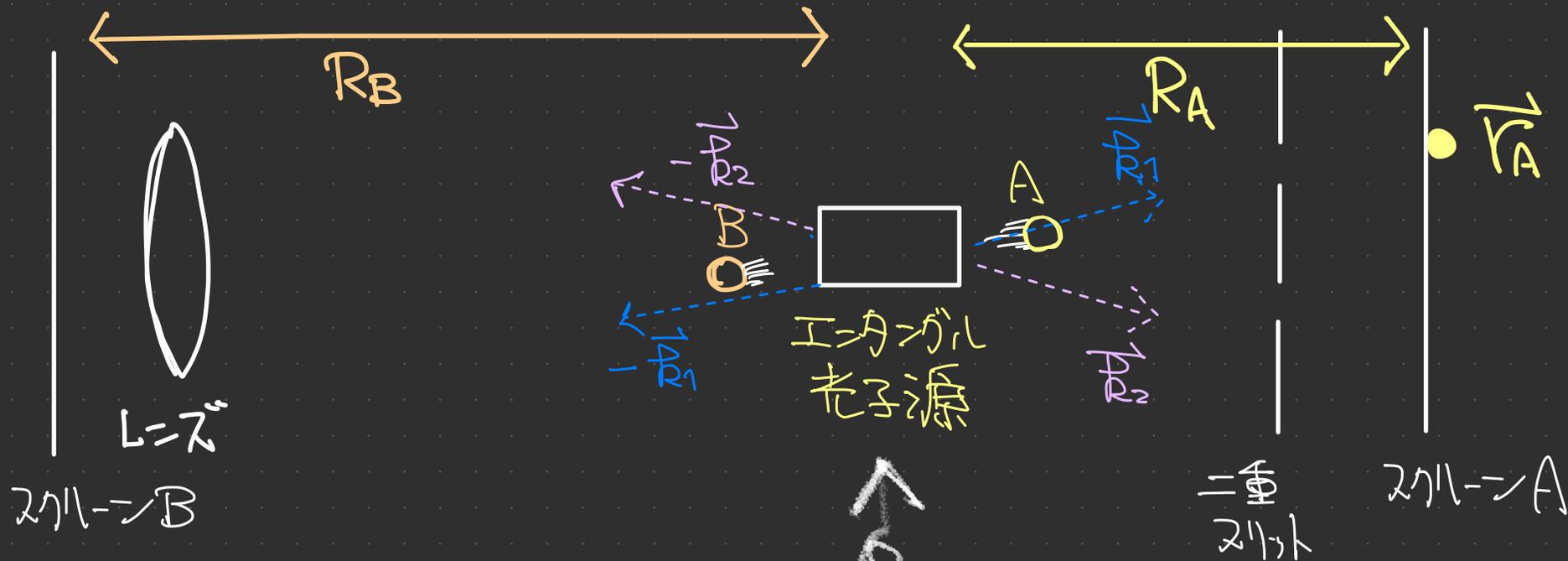


Q4. 光子Aが、スクリーン上の位置 $\vec{r}_A$ にあたった場合のみ、スクリーンA上の光子Bをカウントすると、干渉縞は？



光子Bはスリットを通らない  
⇒干渉する訳ないよ。

A. あらわれる。



$$R_B > R_A$$

簡単のため、

$$\propto |\vec{k}_1\rangle^A \otimes |-\vec{k}_1\rangle^B + |\vec{k}_2\rangle^A \otimes |-\vec{k}_2\rangle^B$$

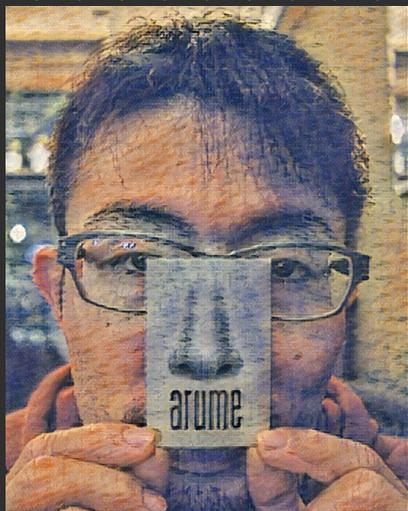
- 光子Aと光子Bは完全に相関
- Aが経験したこと(二重スリットを通る)は、  
Bも経験している!!

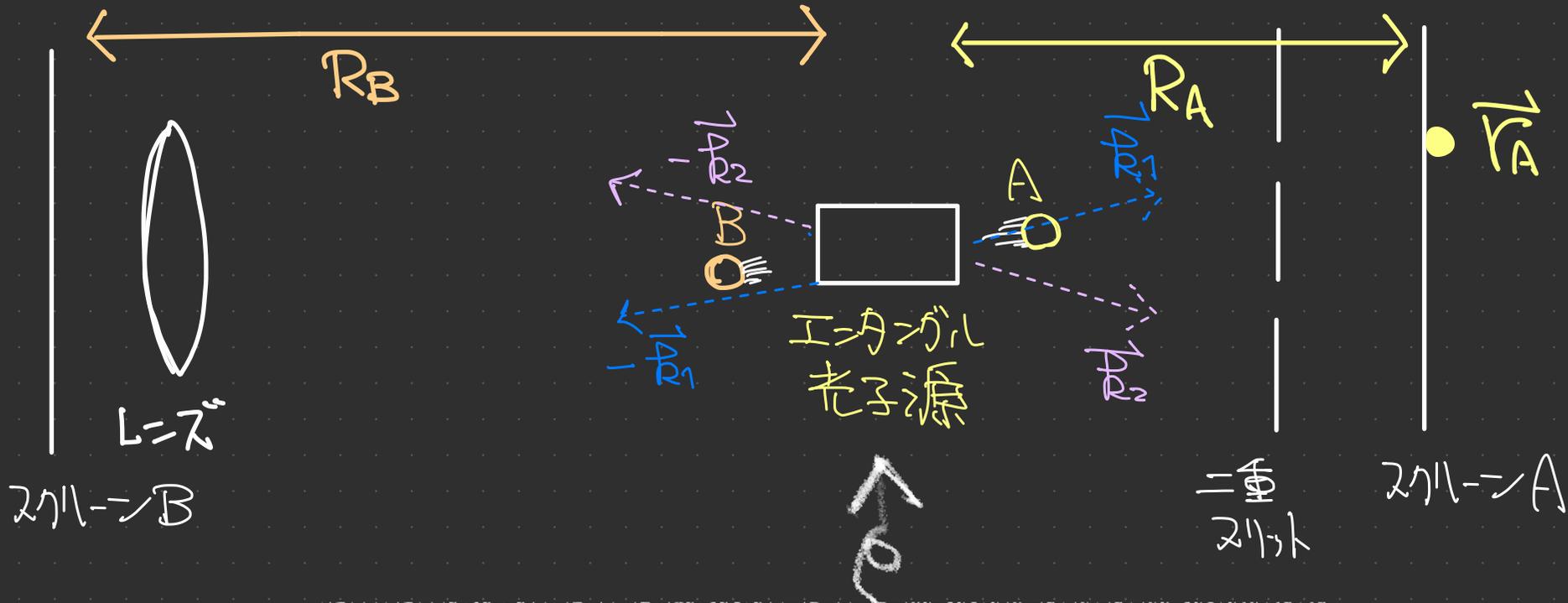
- 光子Aが $\vec{r}_A$ で測定されたとき、

$$\text{光子B} \propto \alpha(\vec{r}_A) |-\vec{k}_1\rangle + \beta(\vec{r}_A) |-\vec{k}_2\rangle$$

□ニ重スリットを通過した□係数.

エンタングルメントに関連した物理、  
わくわくするなー!!





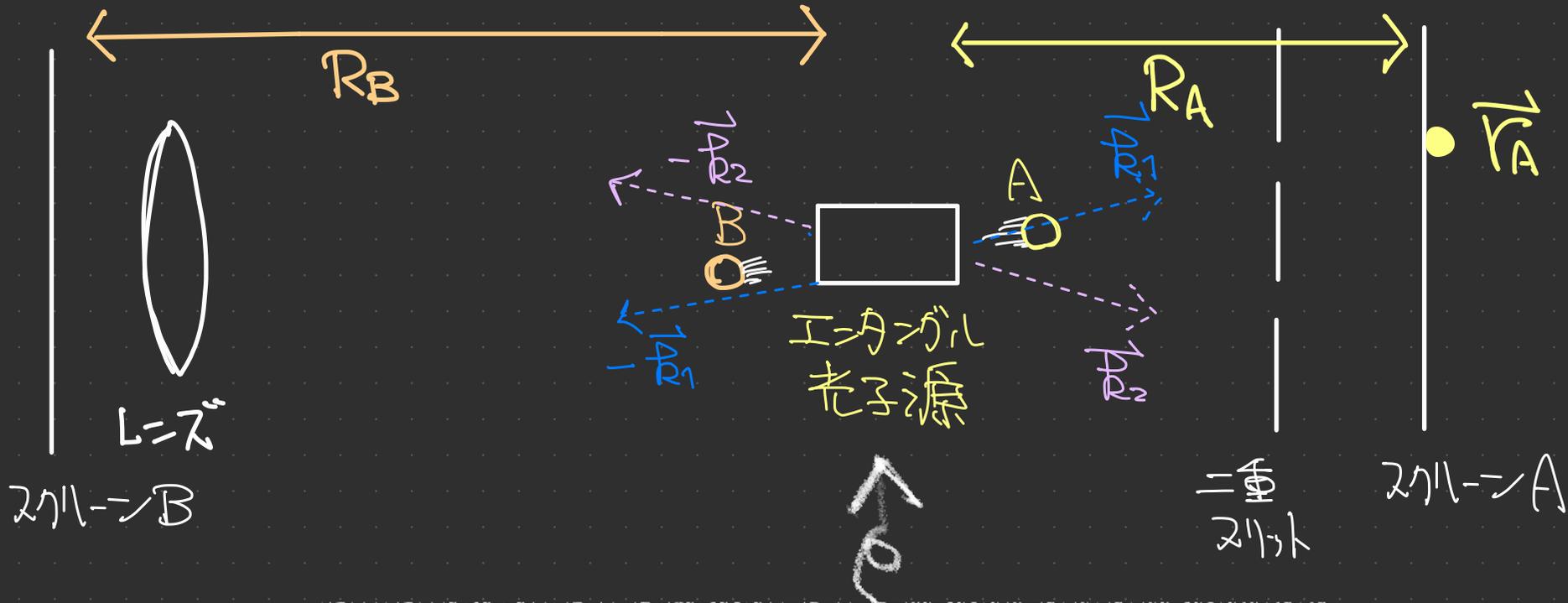
$R_B > R_A$

簡単のため、

$$\propto |\vec{p}_1\rangle^A \otimes |-\vec{p}_1\rangle^B + |\vec{p}_2\rangle^A \otimes |-\vec{p}_2\rangle^B$$

$\Rightarrow$  ① 最大エンタングル状態 + スクリーンA上の測定値  $r_A$  を B に知らせる古典通信





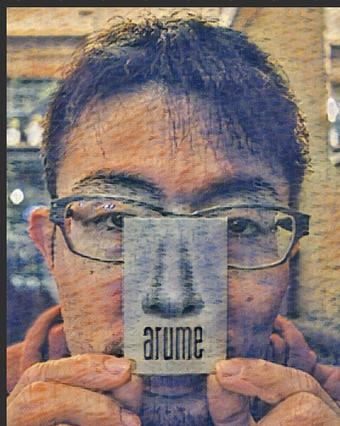
$$R_B > R_A$$

簡単のため、

$$\propto |\vec{r}_1\rangle^A \otimes |-\vec{r}_1\rangle^B + |\vec{r}_2\rangle^A \otimes |-\vec{r}_2\rangle^B$$

$\hookrightarrow$  最大エンタングル状態 + スクリーンA上の測定値  $\vec{r}_A$  を B に知らせる  
 古典通信

(事後選択) = 量子テレポーテーション  $\checkmark$



①量子情報プロトコルに関連した  
非直観的な物理現象を  
見つけた!!

「まだ、かならず」.....