
核子形状因子の巨大体積下における物理点格子QCD計算

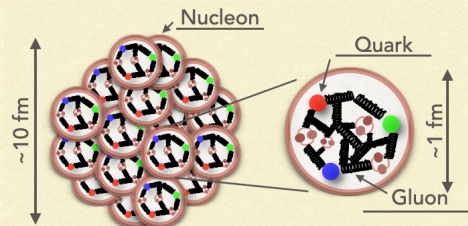
辻 竜太郎 (KEK)

In collaboration with Y.Aoki, K.-I. Ishikawa, Y. Kuramashi, S. Sasaki
K. Sato, E. Shintani, H. Watanabe and T. Yamazaki
for PACS Collaboration

I. 研究の目的

研究の目的

巨大体積下における物理点格子QCD計算で**核子形状因子**の精密計算



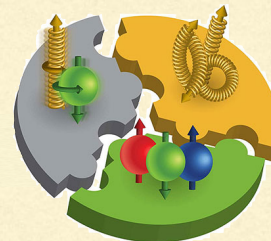
核子：クォーク・グルーオンの動力学に由来する非自明な構造
ハドロンの定量的理解への第一歩
+
素粒子原子核の多様な物理に影響

① 素粒子物理学 (Intensity frontier)

新物理 = 高精度な実験 - 標準模型の高精度計算

- クォーク電気双極子モーメント
- CP対称性の破れ
- 陽子崩壊 Y. Aoki et al., PoS LAT2019, 141 (2020).
R. Tsuji et al., PoS LAT2024, 435 (2025). e.t.c

核子構造



- 陽子半径パズル・核子の軸性構造
- シングルスピン非対称・スピンの危機
- 核子トモグラフィー e.t.c

② 原子核物理学 (Many body problem)

将来の展望：核子構造の高精度計算を通じて新物理の探索にも貢献

ニュートリノ振動と標準模型を超えた物理

なぜ宇宙に私たちが存在できるのか？

→高精度なニュートリノ振動実験で検証

例) 電子ニュートリノの出現確率 $P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e}$

(近くで測定した ν_μ -フラックス) $\times P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e} \simeq$ (遠くで測定した ν_e -フラックス)

観測量：検出器内原子の原子核との相互作用頻度

$$E_{\text{rec}} = E_l + \sum_i T_i^N + \epsilon_n + \sum_j E_j$$

$$\frac{N_f(E_{\text{rec}}, L)}{\text{観測量}} \propto \sum_i \int \frac{\Phi_f(E_\nu, L)}{\text{ニュートリノ-フラックス}} \sigma_i(E_\nu) g_{\sigma_i}(E_\nu, E_{\text{rec}}) dE_\nu$$

大きなモデル不定性 = 改善が急務

原子核・ハドロン物理の宿題



ニュートリノ振動と標準模型を超えた物理

なぜ宇宙に私たちが存在できるのか？

→高精度なニュートリノ振動実験で検証

例) 電子ニュートリノの出現確率 $P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e}$

(近くで測定した ν_μ -フラックス) $\times P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e} \simeq$ (遠くで測定した ν_e -フラックス)

観測量：検出器内原子の原子核との相互作用頻度

$$N_f(E_{\text{rec}}, L) \propto \sum_i \int \Phi_f(E_\nu, L) \sigma_i(E_\nu) g_{\sigma_i}(E_\nu, E_{\text{rec}}) dE_\nu$$

フレーバー f の相互作用頻度
: 観測量

ニュートリノ-フラックス

原子核の多体効果による影響の補正
: 理論モデル計算

ニュートリノ核子散乱断面積
: 第一原理理論計算、理論モデル計算

ハドロン物理
(核子構造物理)



ニュートリノ振動と標準模型を超えた物理

なぜ宇宙に私たちが存在できるのか？

→高精度なニュートリノ振動実験で検証

例) 電子ニュートリノの出現確率 $P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e}$

(近くで測定した ν_μ -フラックス) $\times P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e} \simeq$ (遠くで測定した ν_e -フラックス)

観測量：検出器内原子の原子核との相互作用頻度

$$E_{\text{rec}} = E_l + \sum_i T_i^N + \epsilon_n + \sum_j E_j$$

$$N_f(E_{\text{rec}}, L) \propto \sum_i \int \Phi_f(E_\nu, L) \sigma_i(E_\nu) g_{\sigma_i}(E_\nu, E_{\text{rec}}) dE_\nu$$

フレーバー f の相互作用頻度
: 観測量

ニュートリノ-フラックス

ニュートリノ核子散乱断面積
: 第一原理理論計算、理論モデル計算

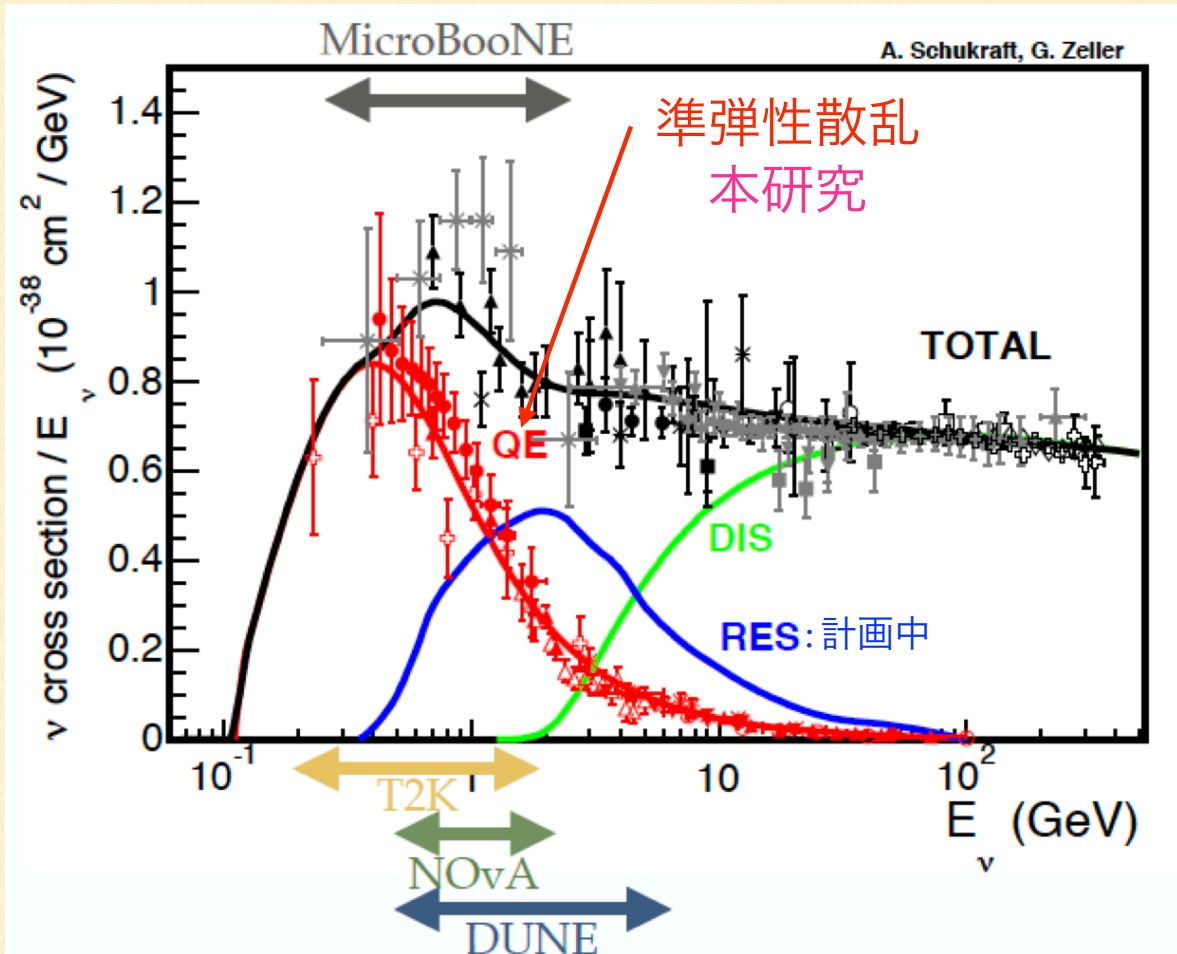
原子核の多体効果による影響の補正
: 理論モデル計算

本研究



ニュートリノ核子散乱

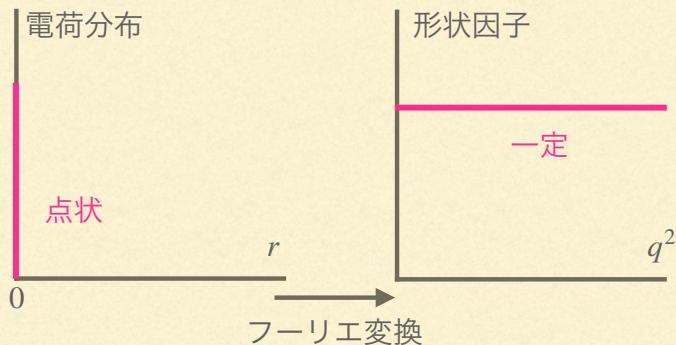
$$N_f(E_{\text{rec}}, L) \propto \sum_i \int \Phi_f(E_\nu, L) \sigma_i(E_\nu) g_{\sigma_i}(E_\nu, E_{\text{rec}}) dE_\nu$$



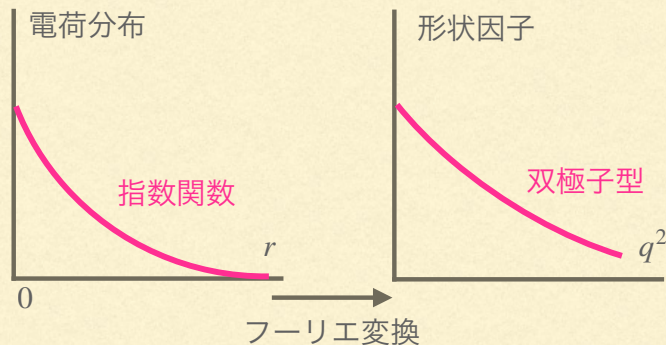
形状因子と構造を持つ粒子の散乱断面積

形状因子 = 粒子のもつ非自明な内部構造を記述

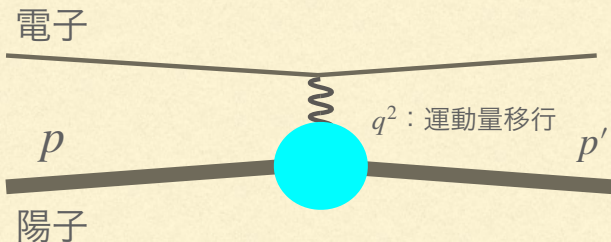
構造を持たない場合



構造を持つ場合



例) 陽子の電子散乱



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\text{Mott}}$$

形状因子

$$\times \frac{G_E^2(q^2) + \frac{\tau}{\epsilon} G_M^2(q^2)}{1 + \tau}$$

構造による補正

ニュートリノ核子準弾性散乱断面積

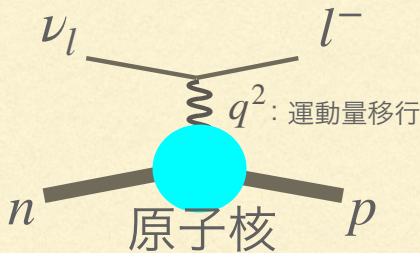
$$\frac{d\sigma}{dq^2}(E_\nu, q^2) = \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2 M_N^2}{2\pi E_\nu^2} \left[(\tau + r_\ell^2) A(\nu, q^2) - \frac{\nu}{M_N^2} B(\nu, q^2) + \frac{\nu^2}{M_N^4} \frac{C(\nu, q^2)}{1 + \tau} \right],$$

$$A = \tau (G_M^v)^2 - (G_E^v)^2 + (1 + \tau) F_A^2 - r_\ell^2 \left[(G_M^v)^2 + F_A^2 + 4F_P (F_A - \tau F_P) \right],$$

$$B = 4\eta\tau G_M^v F_A,$$

$$C = \tau (G_M^v)^2 + (G_E^v)^2 + (1 + \tau) F_A^2,$$

但し、 $\nu = E_\nu/M_N - \tau - r_l^2$, $\tau = q^2/4M_N^2$, $\eta = \pm 1$ and $r_l = m_l/2M_N$ (m_l はレプトン質量).



原子核内核子との
準弾性散乱

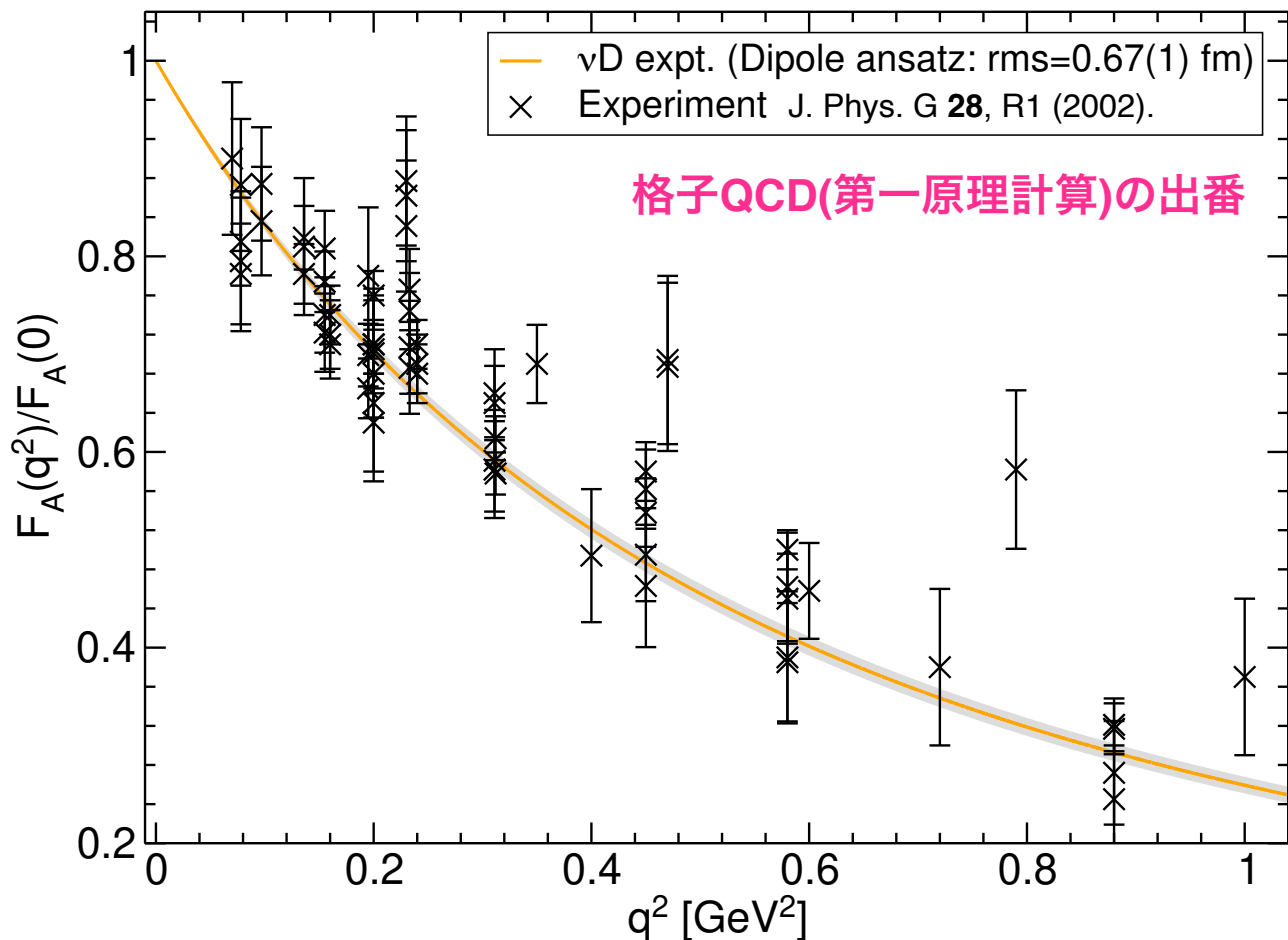
$G_E^v(q^2)$: 電気形状因子 (G_E) 及び 磁気形状因子 (G_M)
 $G_M^v(q^2)$: $\rightarrow eN$ 散乱実験の高精度データ

$F_P(q^2)$: Induced pseudoscalar 形状因子
 $\rightarrow F_A(q^2)$ に比例(モデル)、やや大きな不定性

$F_A(q^2)$: 軸性形状因子 \rightarrow **最も大きな不定性**

軸性形状因子 - 実験

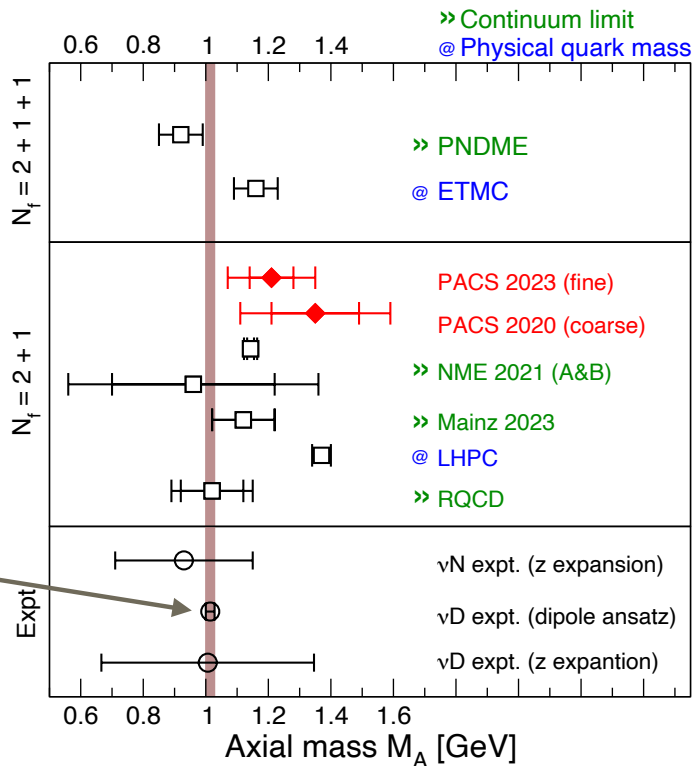
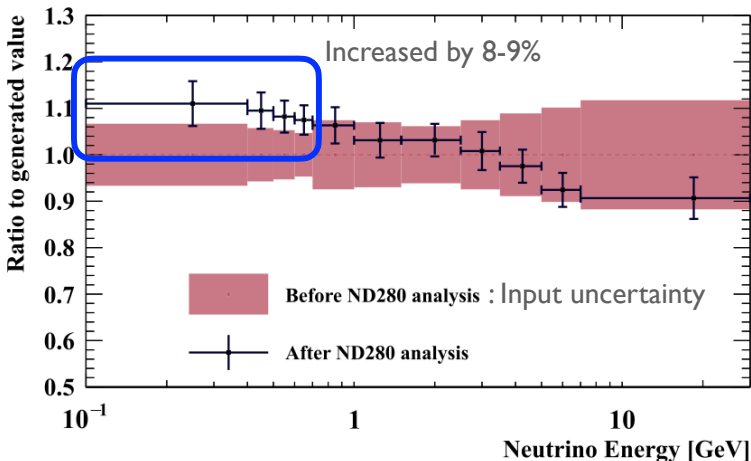
$$\text{Dipole ansatz: } F_A(q^2) = \frac{g_A}{(1 - q^2/M_A^2)^2}$$



T2Kでの問題

格子QCDの結果もまちまち

= 系統誤差が取りきれていない可能性



古代(^{70s})の実験では $M_A = 1.014(14)$

一方 T2K ND 実験では $M_A \sim 1.1$

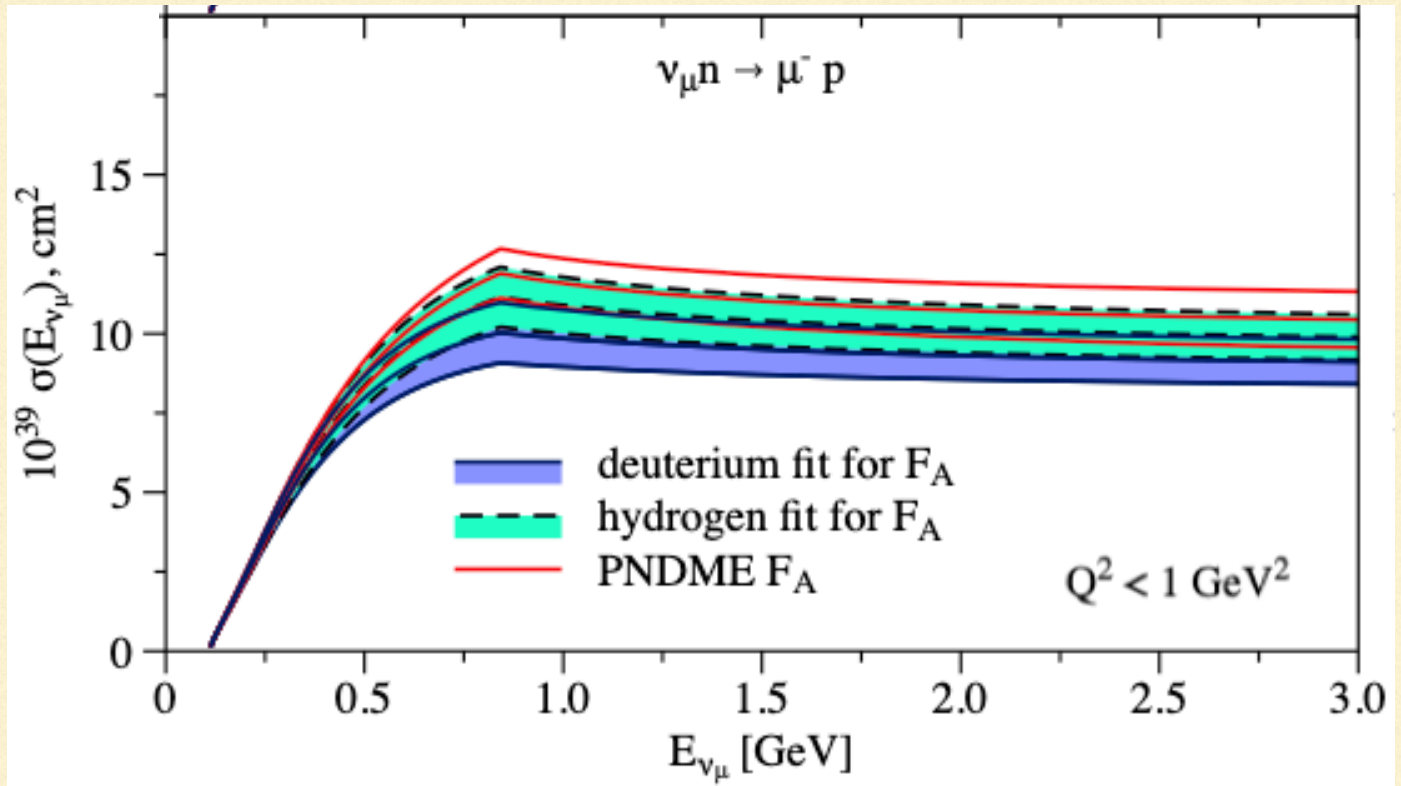
解析には多くの系統誤差の源が。。。

一体何が問題なのかもわからない

$$\text{双極子型: } F_A(q^2) = g_A / (1 - q^2/M_A^2)^2$$

* Old expts. (90s-00s) give larger dipole mass $M_A = 1.1 - 1.2$
But the targets are O or C, while deuteron is used in '70s...

第一原理精密計算の恩恵



格子QCD : 特に低運動量移行 ($q^2 \lesssim 0.2 \text{ GeV}^2$) で高い精度

低運動量移行領域の高精度計算が振動実験を精密化するカギ

II. 核子の軸性構造

-形状因子の満たすべき性質

軸性カレントの核子行列要素

$$\langle p(\mathbf{p}') | A_\alpha(x) | n(\mathbf{p}) \rangle = \bar{u}_p(\mathbf{p}') (\gamma_\alpha \gamma_5 F_A(q^2) + i q_\alpha \gamma_5 F_P(q^2)) u_n(\mathbf{p}) e^{iq \cdot x}$$

$$\langle p(\mathbf{p}') | P(x) | n(\mathbf{p}) \rangle = \bar{u}_p(\mathbf{p}') (\gamma_5 G_P(q^2)) u_n(\mathbf{p}) e^{iq \cdot x}$$

カレント : $A_\alpha(x) = \bar{u}(x) \gamma_5 \gamma_\alpha d(x)$ 、 $P(x) = \bar{u}(x) \gamma_5 d(x)$

形状因子 : 軸性 F_A 、誘導擬スカラー F_P 、擬スカラー G_P

4元運動量 : $P' = (E_p(\mathbf{p}'), \mathbf{p}')$ 、 $P = (E_n(\mathbf{p}), \mathbf{p})$

運動量移行 : $q = P - P'$

3つの形状因子の間に成り立つ関係式

→ 一般化されたゴールドバーガー・トライマン(GGT)関係式

$$2M_N F_A(q^2) - q^2 F_P(q^2) = 2m G_P(q^2)$$

クォーク質量 : m 、核子質量 : M_N

GGT関係式

renormalized up and down quark mass $m = m_u = m$

軸性ウォード高橋恒等式： $\partial_\alpha A_\alpha(x) = 2mP(x)$

$$\longrightarrow \langle p(\mathbf{p}') | \partial_\alpha A_\alpha(x) | n(\mathbf{p}) \rangle$$

$$= \bar{u}_p(\mathbf{p}') (i(p'_\alpha - p_\alpha) \gamma^\alpha F_A(q^2) - q^2 F_P(q^2)) \gamma_5 u_n(\mathbf{p}) e^{iq \cdot x}$$

$$= [2M_N F_A(q^2) - q^2 F_P(q^2)] \bar{u}_p(\mathbf{p}') \gamma_5 u_n(\mathbf{p}) e^{iq \cdot x}$$

ディラック方程式：

$$\bar{u}_p(\mathbf{p}') (i p'_\alpha \gamma^\alpha + M_N) = 0$$

$$(i p_\alpha \gamma^\alpha + M_N) u_n(\mathbf{p}) = 0$$

$$\longrightarrow \langle p(\mathbf{p}') | P(x) | n(\mathbf{p}) \rangle$$

$$= [G_P(q^2)] \bar{u}_p(\mathbf{p}') \gamma_5 u_n(\mathbf{p}) e^{iq \cdot x}$$

3つの形状因子の間に成り立つ関係式（3つは独立でない）

→ 一般化されたゴールドバーガー・トライマン(GGT)関係式

$$2M_N F_A(q^2) - q^2 F_P(q^2) = 2m G_P(q^2)$$

低エネルギー関係式

パイオン極模型 (**Pion-pole dominance**) (カイラル極限でのみ厳密) GGTより

$$F_P^{\text{PPD}}(q^2) = \frac{2M_N F_A(q^2)}{q^2 + M_\pi^2} \quad \& \quad 2mG_P^{\text{PPD}}(q^2) = 2M_N F_A(q^2) \frac{M_\pi^2}{q^2 + M_\pi^2}$$

$$\longrightarrow \frac{G_P^{\text{PPD}}(q^2)}{F_P^{\text{PPD}}(q^2)} = B_0 \quad * \text{Gell-mann-Oakes-Renner relation: } M_\pi^2 = 2B_0 m$$

(※) $2M_N F_A(q^2) - q^2 F_P(q^2) = 2mG_P(q^2)$ について $m \rightarrow 0$ と $q^2 \rightarrow 0$ を考える

$$\lim_{q^2 \rightarrow 0} \left[\lim_{m \rightarrow 0} 2M_N F_A(q^2) \right] = \lim_{q^2 \rightarrow 0} \left[q^2 \lim_{m \rightarrow 0} F_P(q^2) \right] \longrightarrow \lim_{m \rightarrow 0} F_P(q^2) \propto \frac{1}{q^2}$$

$$\lim_{m \rightarrow 0} \left[\lim_{q^2 \rightarrow 0} 2M_N F_A(q^2) \right] = \lim_{m \rightarrow 0} \left[2m \lim_{m \rightarrow 0} G_P(q^2) \right] \longrightarrow \lim_{q^2 \rightarrow 0} G_P(q^2) \propto \frac{1}{m} \sim \frac{1}{m_\pi^2}$$

核子の軸性構造

軸性ウォード高橋恒等式

$$\partial_\alpha A_\alpha(x) = 2mP(x)$$

一般化されたゴールドバーガー・トライマン(GGT)関係式

$$2M_N F_A(q^2) - q^2 F_P(q^2) = 2m G_P(q^2)$$

パイオン極模型 (*Pion-pole dominance*) (カイラル極限でのみ厳密)

$$F_P^{\text{PPD}}(q^2) = \frac{2M_N F_A(q^2)}{q^2 + M_\pi^2} \quad \& \quad \frac{G_P^{\text{PPD}}(q^2)}{F_P^{\text{PPD}}(q^2)} = B_0$$

* Gell-mann-Oakes-Renner relation: $M_\pi^2 = 2B_0 m$

第一原理計算 (格子QCD) で得られる相関関数や形状因子が low- q^2 でこれらをきちんと満たすことを定量的に確認したい

III. 研究の手法（格子QCD）

格子QCD計算の流れ

ある物理量 O の期待値：

$$\langle O \rangle = \int \mathcal{D}[U] O P[U] \quad \text{但し} \quad P[U] = \frac{1}{Z} \prod_f \det(D(U, m^{(f)})) \exp[-J_G^{\text{lat.}}(U)]$$

を数値的に $\langle O \rangle = \frac{1}{N_{\text{conf}}} \sum_i O[U_i] \pm O\left(\frac{1}{\sqrt{N_{\text{conf}}}}\right)$ で評価

誤差は 統計誤差
系統誤差 の2つを持つ

- 例)
- 物理点への外挿
 - クエンチ計算や混合作用
 - 有限体積効果
 - 格子化による離散化誤差 など

連続時空のQCDは以下の2つを保った上で、連続極限 $a \rightarrow 0$ で得られる

- 全ての計算で同一の物理的な体積を維持
- 全ての計算で物理点のパイオン質量を再現

Read off the ground state

Ground state can be read off from a correlation function $C(t)$ in large- t region

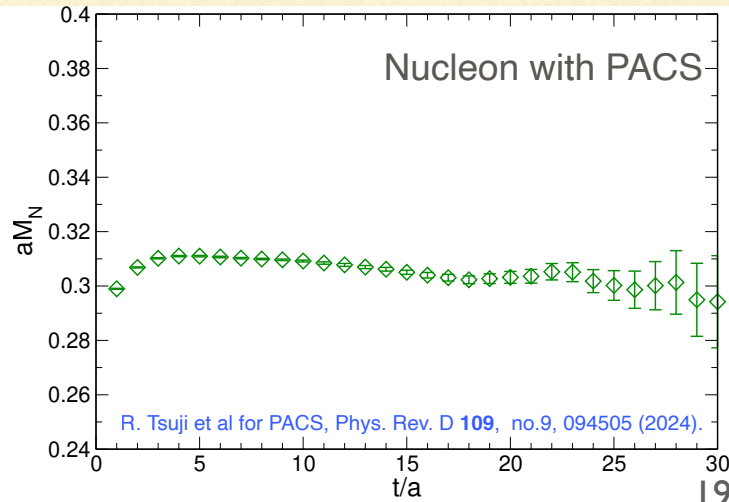
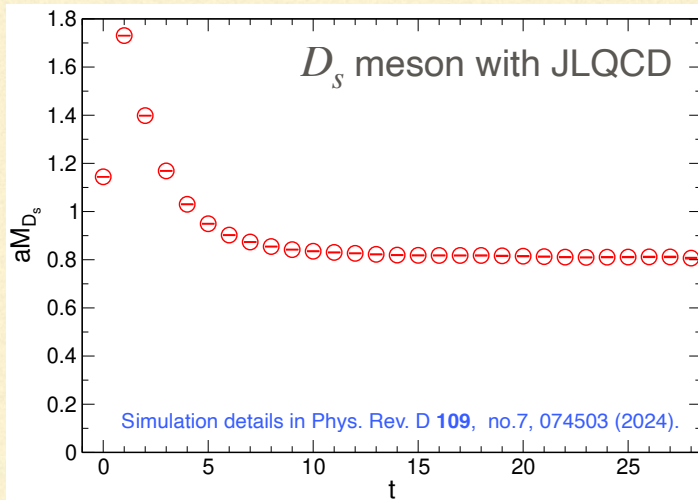
e.g. Hadron mass

$$C(t) = \langle J_H(t) \bar{J}_H(0) \rangle = \sum_i |A_i|^2 e^{-E_i t} = \underbrace{|A_0|^2 e^{-E_0 t}}_{\text{ground state}} + \underbrace{|A_1|^2 e^{-E_1 t} + \dots}_{\text{Excited states}}$$

J_H : interpolating operator of a hadron H
 E_i : Mass of i -th state ($E_0 < E_1 < \dots$)

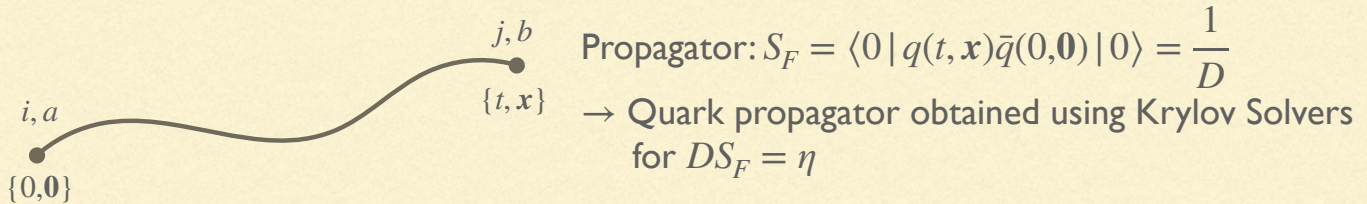
$$m^{\text{eff}}(t, \tau) = \frac{1}{\tau} \ln \left(\frac{C(t)}{C(t+\tau)} \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \ln(e^{M\tau}) = M$$

Mass of the ground state



Nucleon correlation functions

Correlation functions: tie together quark propagators with operators in all possible ways to get quark line diagrams



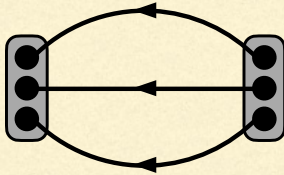
Nucleon two-point correlation function:

$$\begin{aligned} \langle N(t) \bar{N}(0) \rangle &\equiv \langle 0 | \sum_{\mathbf{x}} N(\mathbf{x}, t) \bar{N}(0, \mathbf{0}) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \sum_{\mathbf{x}} \left[\epsilon^{abc} \underbrace{\left\{ u^{aT} C \gamma_5 d^b \right\}}_{\text{Wick contraction}} u^c \right] (\mathbf{x}, t) \left[\epsilon^{def} \overbrace{\left\{ u^{dT} C \gamma_5 d^e \right\}}_{\text{Wick contraction}} \right] (\mathbf{0}, 0) | 0 \rangle \end{aligned}$$

Wick contraction

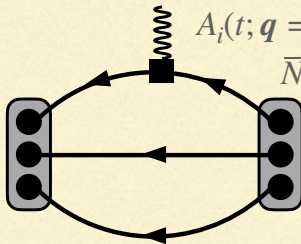
Nucleon correlation functions

Nucleon two-point correlation function



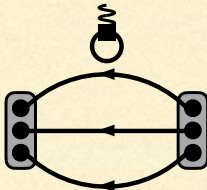
$$\sim_{t \gg 0} \frac{E_N + M_N}{2M_N} Z_S(0) Z_S(p) e^{-E_N t} \equiv \tilde{C}_2(t; p)$$

Nucleon (connected) three-point correlation function



$$\sim_{t_{\text{sep}} \gg t} \tilde{C}_2(t; q) e^{-Mt_s} \left[F_A(q^2) \delta_{i3} - \frac{q_i q_3}{E(p) + M} F_P(q^2) \right]$$

※ disconnected contribution



Very noisy and computationally challenging...
But they are canceled in isovector under the exact isospin sym.

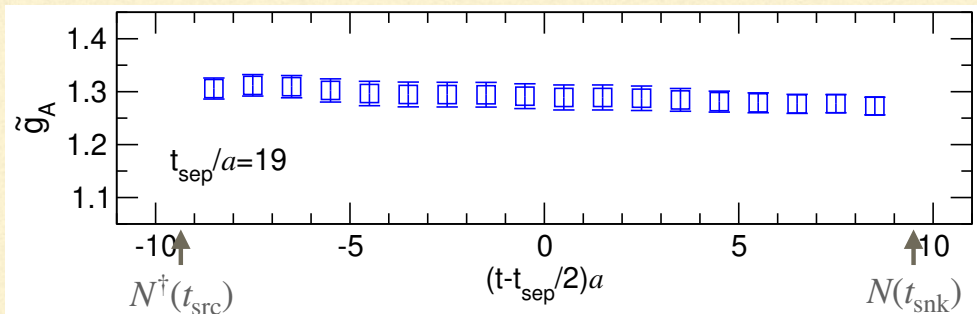
Nucleon matrix element (NME)

Extract NME from a ratio of the nucleon correlation functions

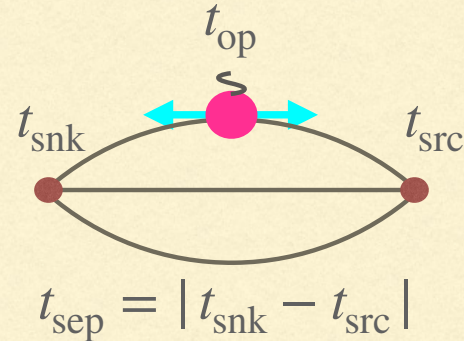
$$\text{e.g. } \frac{\langle N(t_{\text{snk}}) O(t_{\text{op}}) N(t_{\text{src}})^\dagger \rangle}{\langle N(t_{\text{snk}}) N(t_{\text{src}})^\dagger \rangle} = \frac{\sum_{ij} e^{-E_i(t_{\text{snk}}-t_{\text{op}})} \langle 0 | N(0) | i \rangle \langle i | O(0) | j \rangle \langle j | N^\dagger | 0 \rangle e^{-E_j(t_{\text{op}}-t_{\text{src}})}}{\sum_i |\langle 0 | N(0) | i \rangle|^2 e^{-E_i(t_{\text{snk}}-t_{\text{snk}})}}$$

$$t_{\text{sep}} \gg t_{\text{op}} - t_{\text{src}} \gg 0 \rightarrow \underbrace{\langle N | O(0) | N \rangle}_{\text{NME}} + \underbrace{Ae^{-(E_1 - M_N)t_{\text{sep}}} + \dots}_{\text{Excited-states contamination}}$$

e.g. g_A with PACS10/L160



Plateau = Ground state dominance



Nucleon form factors

$$\mathcal{R}_{\mathcal{O}_\alpha}^k(t; \mathbf{p}', \mathbf{p}) = \frac{C_{\mathcal{O}_\alpha}^k(t; \mathbf{p}', \mathbf{p})}{C_{SS}(t_{\text{sink}} - t_{\text{src}}; \mathbf{p}')} \sqrt{\frac{C_{LS}(t_{\text{sink}} - t; \mathbf{p}) C_{SS}(t - t_{\text{src}}; \mathbf{p}') C_{LS}(t_{\text{sink}} - t_{\text{src}}; \mathbf{p}')}{C_{LS}(t_{\text{sink}} - t; \mathbf{p}') C_{SS}(t - t_{\text{src}}; \mathbf{p}) C_{LS}(t_{\text{sink}} - t_{\text{src}}; \mathbf{p})}}$$

For A_i and P currents,

$$\mathcal{R}_{A_i}^{5z}(t; \mathbf{q}) = \sqrt{\frac{E_N + M_N}{2E_N}} \left[\tilde{F}_A(q^2) \delta_{i3} - \frac{q_3 q_i}{E_N + M_N} \tilde{F}_P(q^2) \right] + \dots$$

$$\longrightarrow \mathcal{R}_{A_3}^{5z}(t; \mathbf{q}_0 = (q_1, q_2, 0)) = \sqrt{\frac{E_N + M_N}{2E_N}} [\tilde{F}_A(q^2)] + \dots$$

$$\overline{\mathcal{R}}_{A_i}^{5z}(t, \mathbf{q}) \equiv \mathcal{R}_{A_i}^{5z}(t, \mathbf{q}) - \delta_{i3} \mathcal{R}_{A_3}^{5z}(t, \mathbf{q}_0) = \frac{-q_i q_3}{\sqrt{2E_N(E_N + M_N)}} [\tilde{F}_P(q^2)] + \dots$$

$$\mathcal{R}_P^{5z}(t; \mathbf{q}) = \frac{i q_3}{\sqrt{2E_N(E_N + M_N)}} [\tilde{G}_P(q^2)] + \dots$$

Traditional analysis

\tilde{F}_A, \tilde{F}_P can be obtained by the $\mathcal{R}_{A_i}^{5z}(t; \mathbf{q})$, while \tilde{G}_P can be extracted from $\mathcal{R}_P^{5z}(t; \mathbf{q})$

※ The temporal ratio $\mathcal{R}_{A_4}^{5z}(t; \mathbf{q})$ is not used in the traditional method due to the strong excited-state contamination

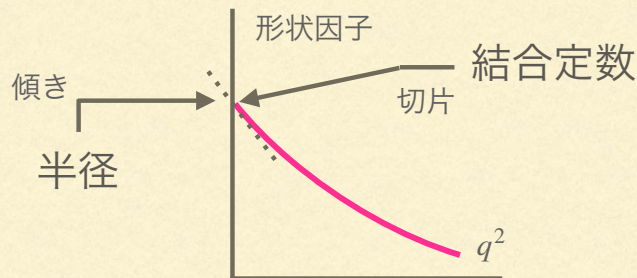
← Recently, some collaborations have proposed new method which utilizes the $\mathcal{R}_{A_4}^{5z}(t; \mathbf{q})$

核子形状因子の計算

目標 : 半径と結合定数

～核子の大きさ和他粒子との間に働く力の大きさ

形状因子を計算機で計算して
半径や結合定数を読み取る



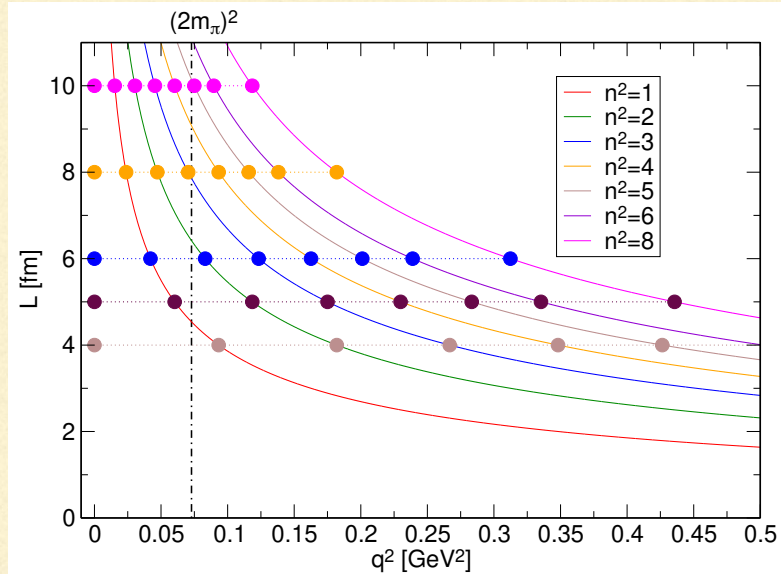
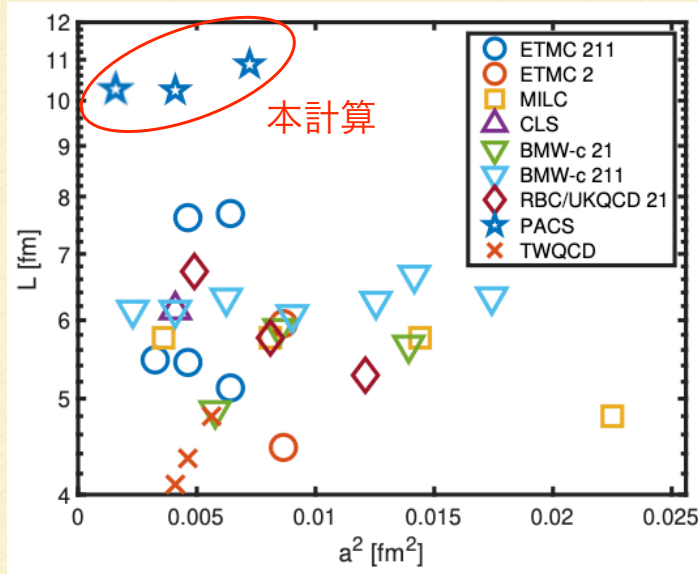
$$\begin{array}{c} \text{wavy line } Q^2 \\ \text{orange circle} \\ \text{two lines } p \text{ and } p' \end{array}
 = \bar{u}(p') \left[\gamma_\mu \gamma_5 F_A(q^2) + i q^\mu \gamma_5 F_P(q^2) \right] u(p) \quad \text{*Local current}$$

$$\langle N(p') | \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 q | N(p) \rangle \rightarrow \langle r_A^2 \rangle, g_A = F_A(0), g_{\pi NN} \equiv \lim_{q^2 \rightarrow -m_\pi^2} \frac{m_\pi^2 + q^2}{2F_\pi} F_P(q^2)$$

q^2 -parametrization : モデルに依存しない解析(z展開)

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad z = (\sqrt{t_{\text{cut}} + q^2} - \sqrt{t_{\text{cut}}}) / (\sqrt{t_{\text{cut}} + q^2} + \sqrt{t_{\text{cut}}}) \quad \text{with} \quad t_{\text{cut}} = 9m_\pi^2$$

正確に計算するために I. 巨大体積



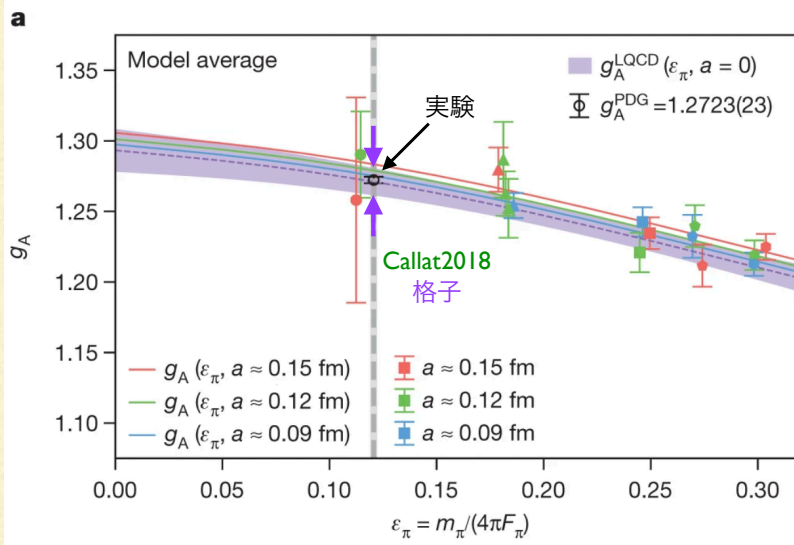
格子化により運動量は $q^2 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \times |n|^2$ で離散化

巨大体積下における格子QCD計算を世界に先駆けて実施

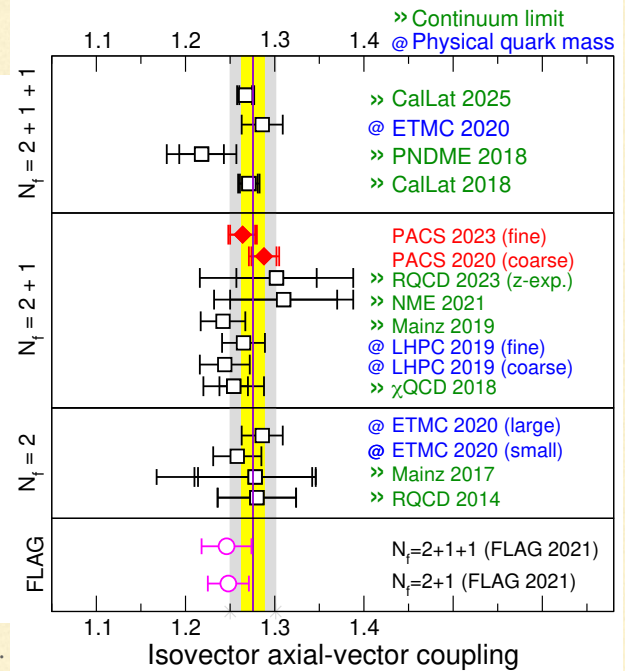
本研究：低運動量領域の高精度計算に最適なセットアップ

正確に計算するために II. 物理点計算

例) 核子軸性電荷の計算=精度保証



e.g. Callat Collaboration: C. C. Chang et al., Nature 558, 91 (2018), 1805.12130.



従来手法：複数の非物理点での計算データを外挿して評価
= 外挿に伴う系統誤差、実験値からの過小評価

→ 本研究：物理点のみで計算、外挿に伴う系統誤差を排除

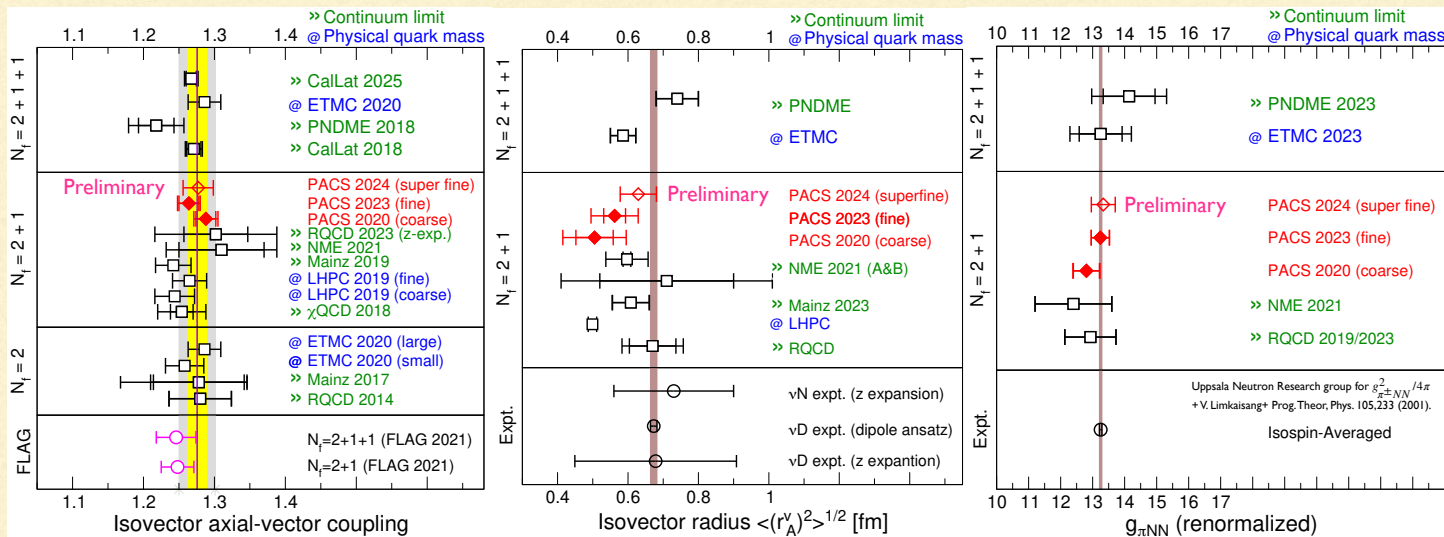
核子の軸性構造の格子QCD計算

形状因子の計算に現れる不定性

- 統計誤差
- 励起状態混合
- 解析のモデル依存性
- 連続極限-無限体積-物理点への外挿

過去PACS2020/2023の計算：

- ✓ All-mode-averagingによる統計の改善
- ✓ 計算パラメータの精査
- ✓ モデルに依存しない解析手法の採用
- 巨大体積下における物理点計算



現在：連続極限に向けて合計3つのカットオフで計算

III. 数值計算結果

-核子軸性電荷

計算のセットアップ -PACS10ゲージ配位

2つの系統誤差を除去

- 有限体積効果
- 物理点への外挿

⊗

低運動量移行領域での計算

$$q^2 = (2\pi/L)^2 \times |n|^2$$

= 本計算

128⁴

160⁴

256⁴

空間体積 ≫ 核子サイズ

~ (10.9 fm)³

~ (10.1 fm)³

~ (10.1 fm)³

パイオン質量 ~ $m_\pi^{\text{exp.}}$

135 MeV

138 MeV

~ 142 MeV

核子質量

~ 0.935 GeV

~ 0.947 GeV

~ 0.952 GeV

格子間隔

coarse

~ 0.085 fm

fine

~ 0.063 fm

Superfine

~ 0.041 fm

Fugaku co-design outcome: [Ishikara et al., CPC(2023)]

QCD Wide SIMD (QWS) Library for Fugaku

Resources: Fugaku in HPCI System Research Project (hp200062, hp200167, hp210112, hp220079, hp230199)

Preliminary

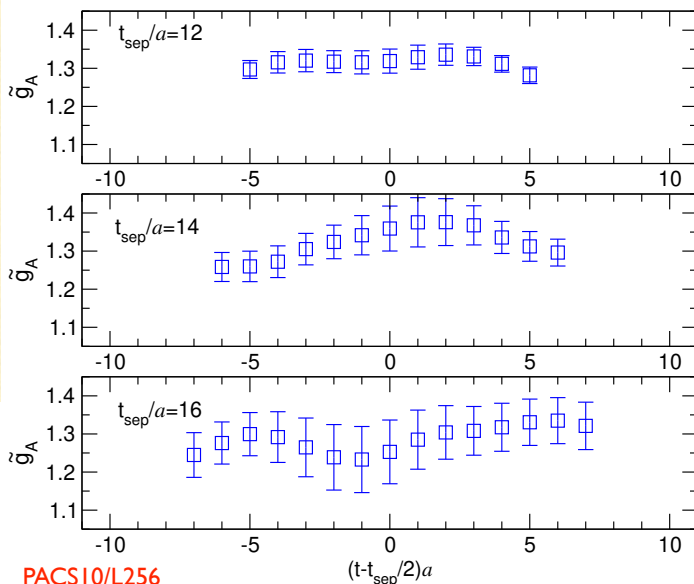
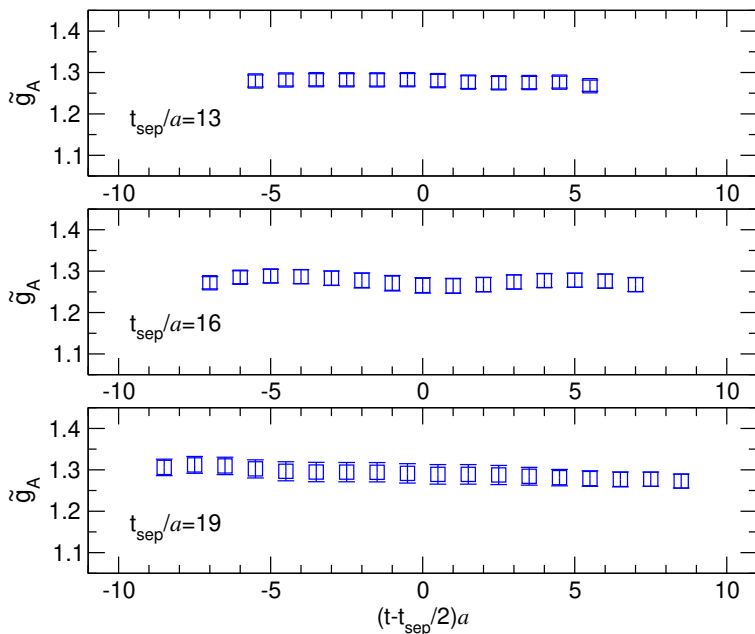
Plateaux

PACSI0/LI28

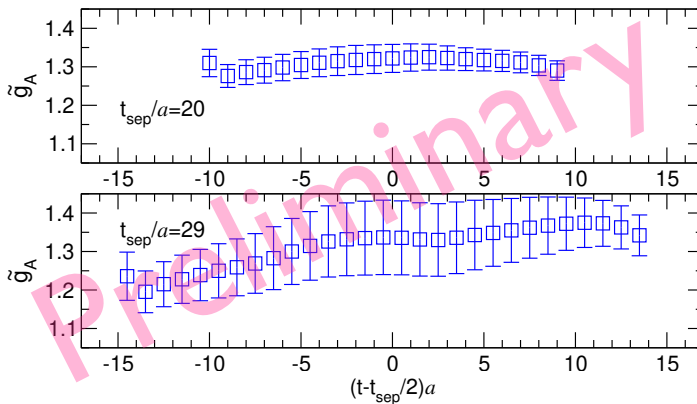
$$\mathcal{R}_{A_3}^{5z}(t; \mathbf{0}) = \tilde{F}_A(0) + \dots = \tilde{g}_A + \dots$$

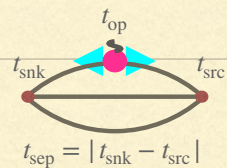
Plateau = Ground state dominance

PACSI0/LI60

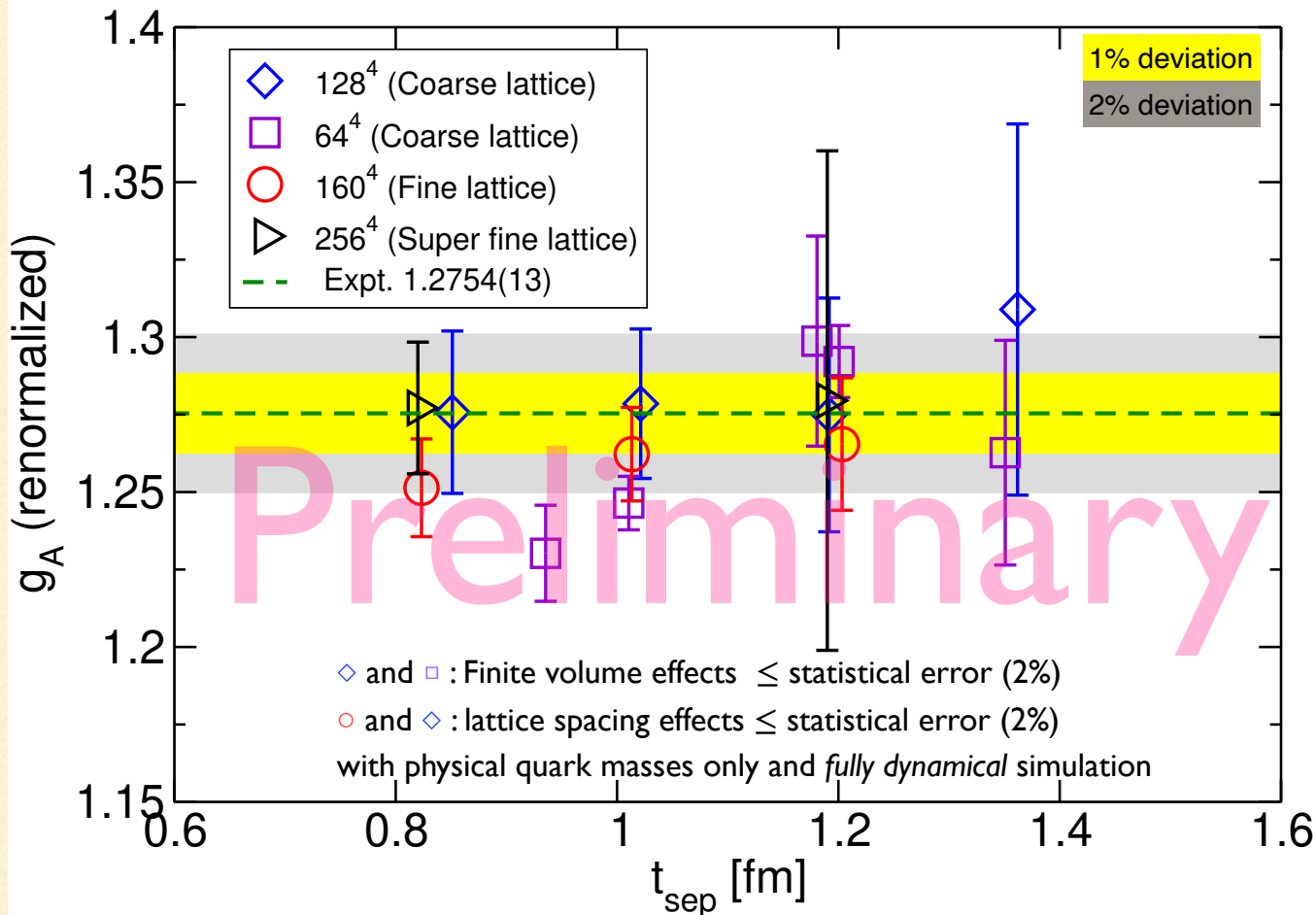


PACSI0/L256

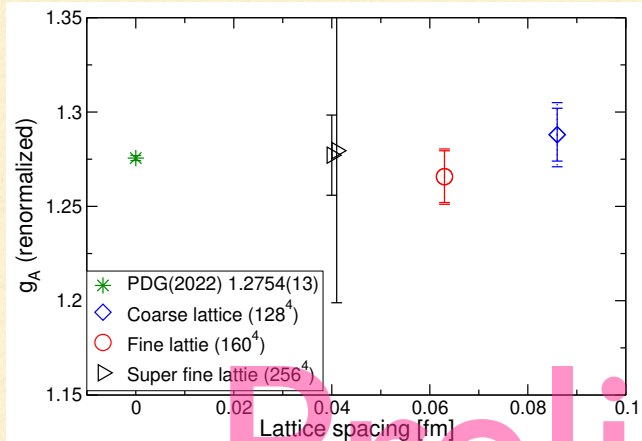




Axial-vector coupling

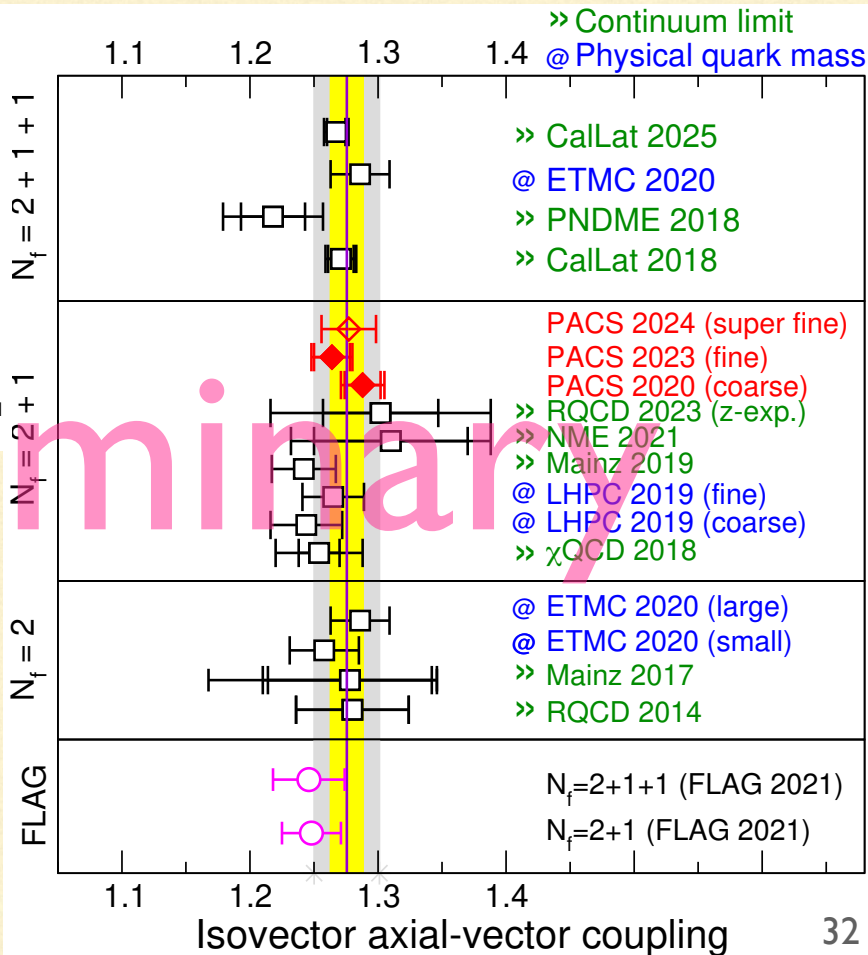


Axial-vector coupling



Reproduce the PDG value within
 the statistical precision for every
 PACS10 ensembles

Further calculation is on-going!



IV. 数值計算結果

- PCAC關係式

PCAC relation on the lattice

Axial Ward-Takahashi identity (exact in the continuum limit) on lattice

$$\partial_\alpha A_\alpha(x) = 2mP(x) + O(a) \quad (\text{Finite lattice spacing effect: } O(a))$$

→ Can we check this identity in the context of the correlation functions?

Introduce a candidate of a PCAC quark mass accompanied with correlators

$$m_{\text{PCAC}}^{\text{pion}} \equiv \frac{m_\pi^2 f_\pi}{2\langle 0 | P^+(0) | \pi \rangle} \longleftrightarrow m_{\text{PCAC}}^{\text{nucl}} \equiv \frac{\langle N_{\text{snk}} \partial_\mu A_\mu(x) \bar{N}_{\text{src}} \rangle}{2\langle N_{\text{snk}} P(x) \bar{N}_{\text{src}} \rangle}$$

- Pion 2-pt function
- Zero momentum

- Nucleon 3-pt function
- Nonzero momentum

In the continuum limit, $m_{\text{PCAC}}^{\text{pion}}$ and $m_{\text{PCAC}}^{\text{nucl}}$ should be identical.

→ a difference can be attributed to lattice spacing effect

PCAC satisfying correlation functions

$$m_{\text{PCAC}}^{\text{nucl}} = \frac{\langle N_{\text{snk}} \partial_{\mu} A_{\mu}(x) \bar{N}_{\text{src}} \rangle}{2 \langle N_{\text{snk}} P(x) \bar{N}_{\text{src}} \rangle} = \frac{\partial_{\mu} C_{A_{\mu}}^{5z}(t; \mathbf{q})}{2 C_P^z(t; \mathbf{q})}.$$

Use finite differences,

$$\partial_t C_{A_4}^{5z}(t; \mathbf{q}) = \frac{1}{2a} \left\{ C_{A_4}^{5z}(t + a; \mathbf{q}) - C_{A_4}^{5z}(t - a; \mathbf{q}) \right\}$$

$$\partial_k C_{A_k}^{5z}(t; \mathbf{q}) = \frac{i}{a} \sin(q_k a) C_{A_k}^{5z}(t; \mathbf{q}) \simeq i q_k C_{A_k}^{5z}(t; \mathbf{q}) ; q_k = \frac{2\pi}{aL} n_k$$

Therefore, the PCAC among the correlation function is

$$m_{\text{PCAC}}^{\text{nucl}} = \frac{\frac{1}{2a} \left\{ C_{A_4}^{5z}(t + a; \mathbf{q}) - C_{A_4}^{5z}(t - a; \mathbf{q}) \right\} - i q_k C_{A_k}^{5z}(t; \mathbf{q})}{2 C_P^z(t; \mathbf{q})}$$

Evaluate $m_{\text{PCAC}}^{\text{nucl}}$ at the all case of the finite momentum conf.

→

TABLE III. Choices for the nonzero spatial momenta: $\mathbf{q} = (2\pi/160a) \times \mathbf{n}$. The bottom row shows the degeneracy of \mathbf{n} due to the permutation symmetry between $\pm x, \pm y, \pm z$ directions.

Label	Q0	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7
\mathbf{n}	(0,0,0)	(1,0,0)	(1,1,0)	(1,1,1)	(2,0,0)	(2,1,0)	(2,1,1)	(2,2,0)
$ \mathbf{n} ^2$	0	1	2	3	4	5	6	8
Degeneracy	1	6	12	8	6	24	24	12

PACSI0/LI28

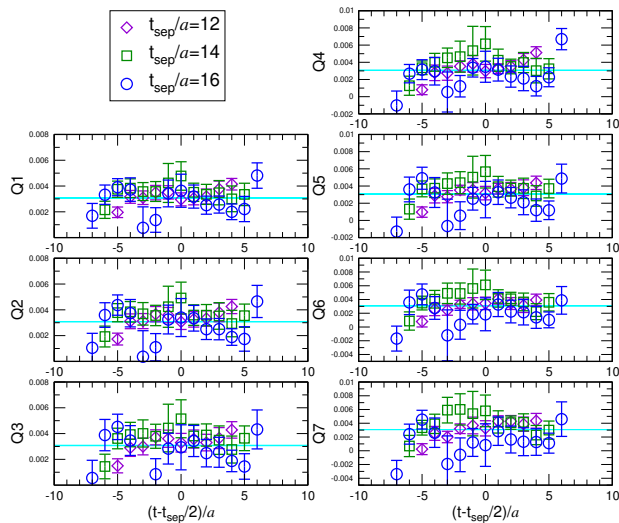
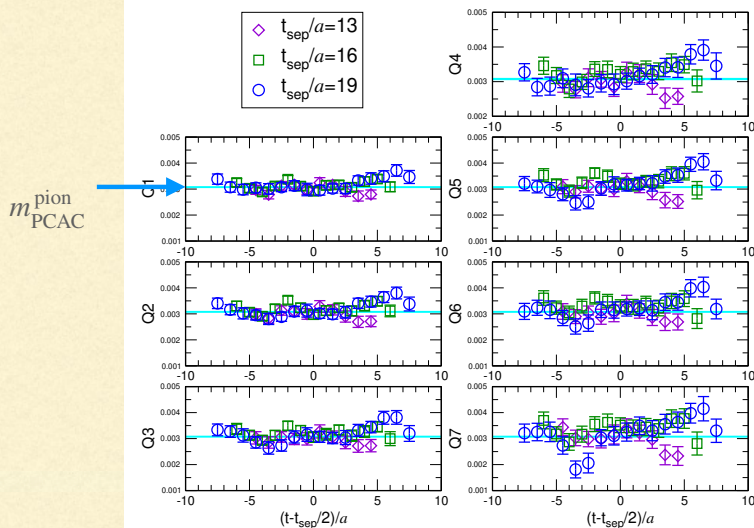
PCAC quark mass

$$1. m_{\text{PCAC}}^{\text{pion}} \equiv \frac{m_{\pi}^2 f_{\pi}}{2\langle 0|P^{+}(0)|\pi\rangle} \simeq \frac{\langle N_{\text{snk}} \partial_{\mu} A_{\mu}(x) \bar{N}_{\text{src}} \rangle}{2\langle N_{\text{snk}} P(x) \bar{N}_{\text{src}} \rangle}$$

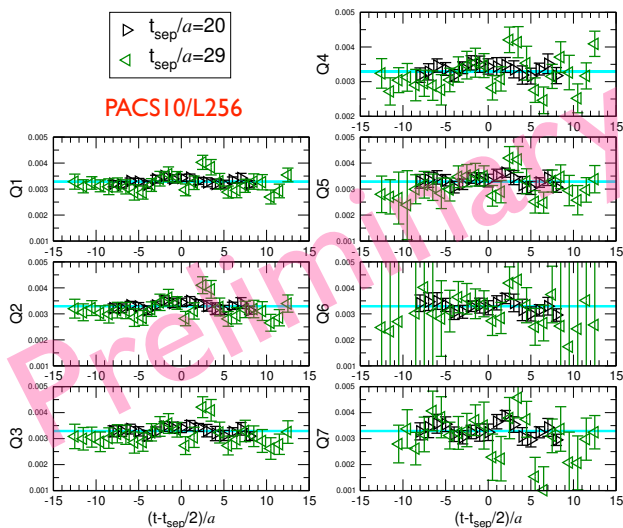
2. Flat t -dependence

for every PACSI0 ensembles

PACSI0/LI60

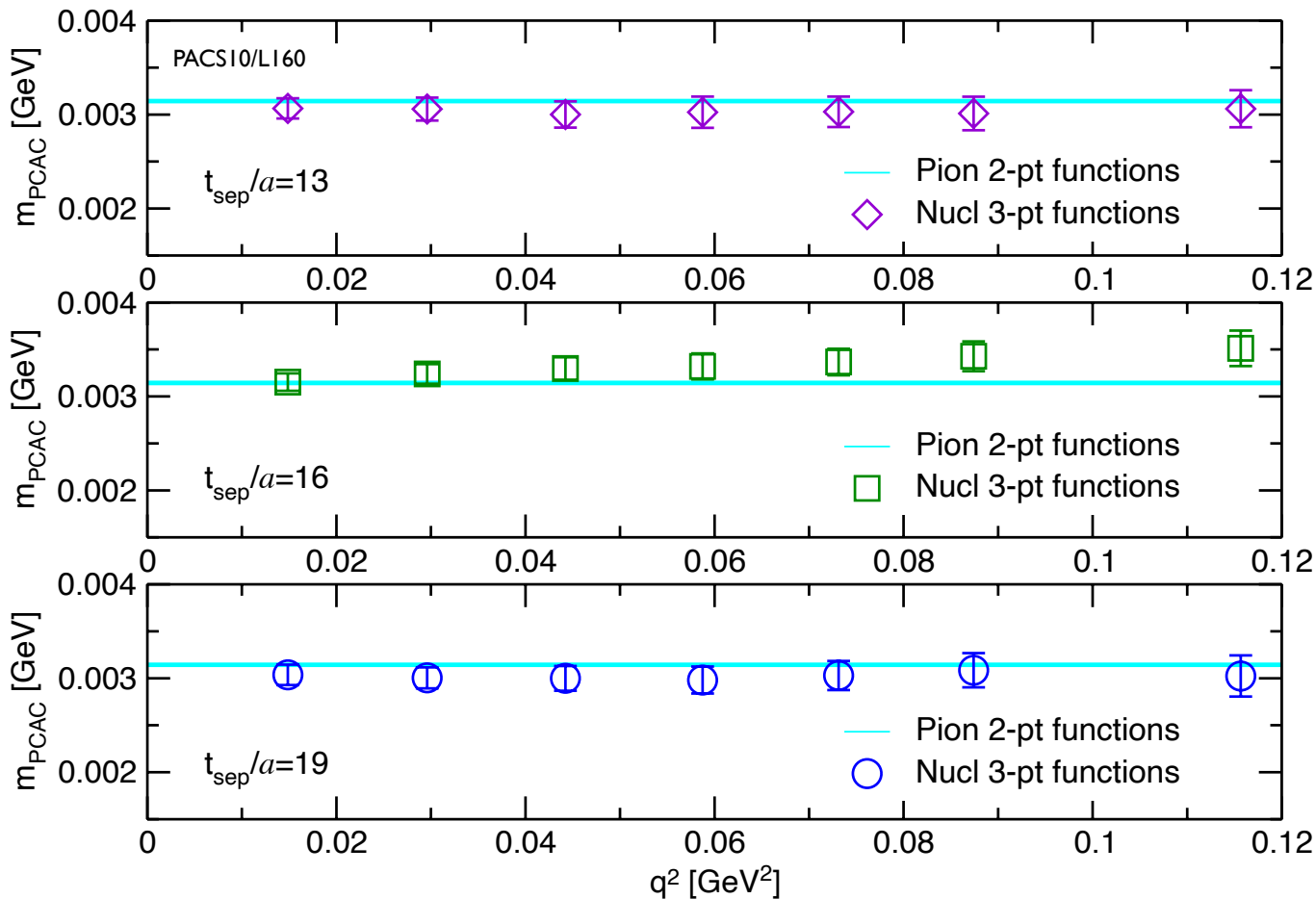


PACSI0/L256



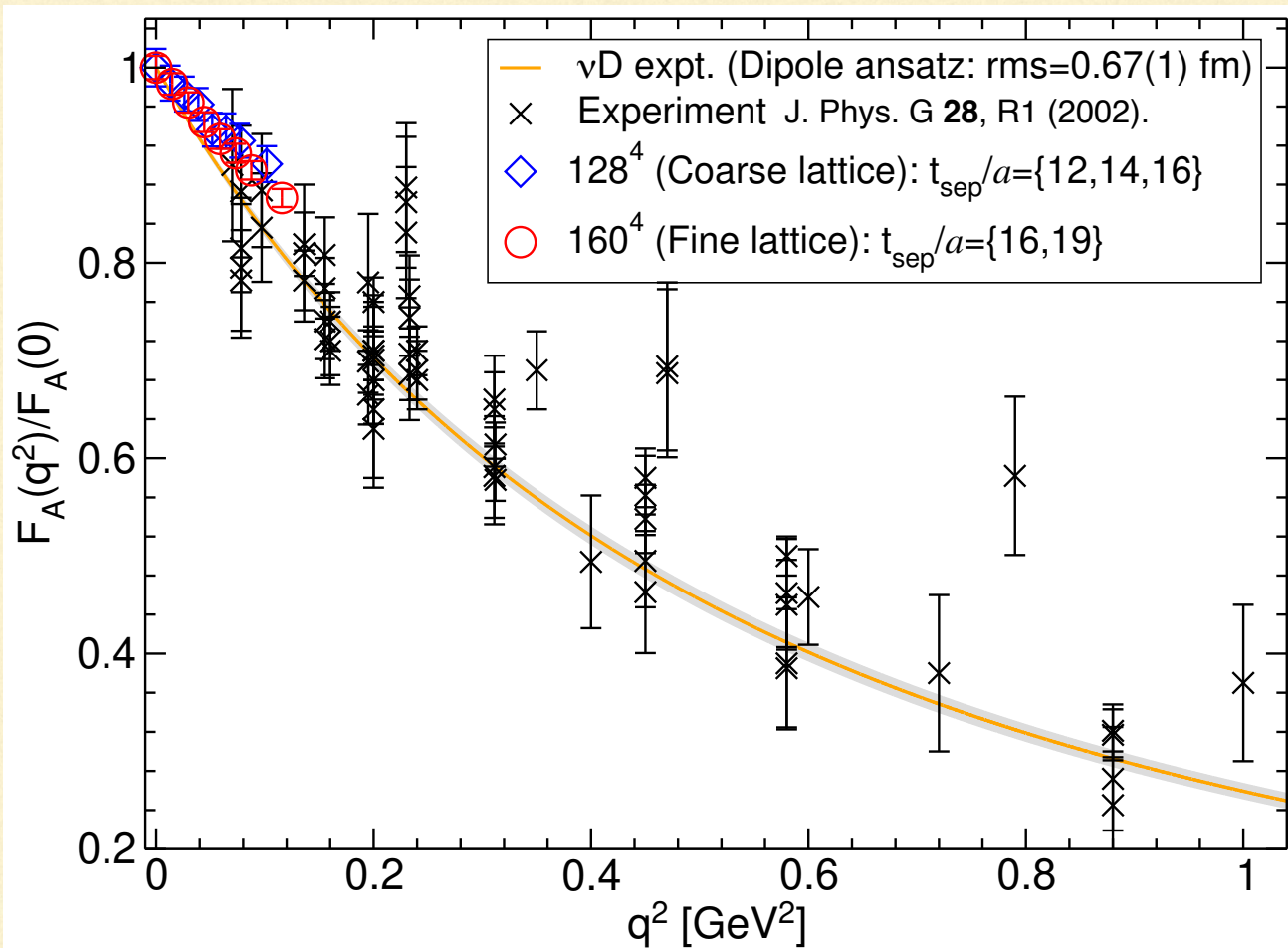
PCAC関係式

$O(a)$ の改善なしに連続極限の物理を誤差内で再現

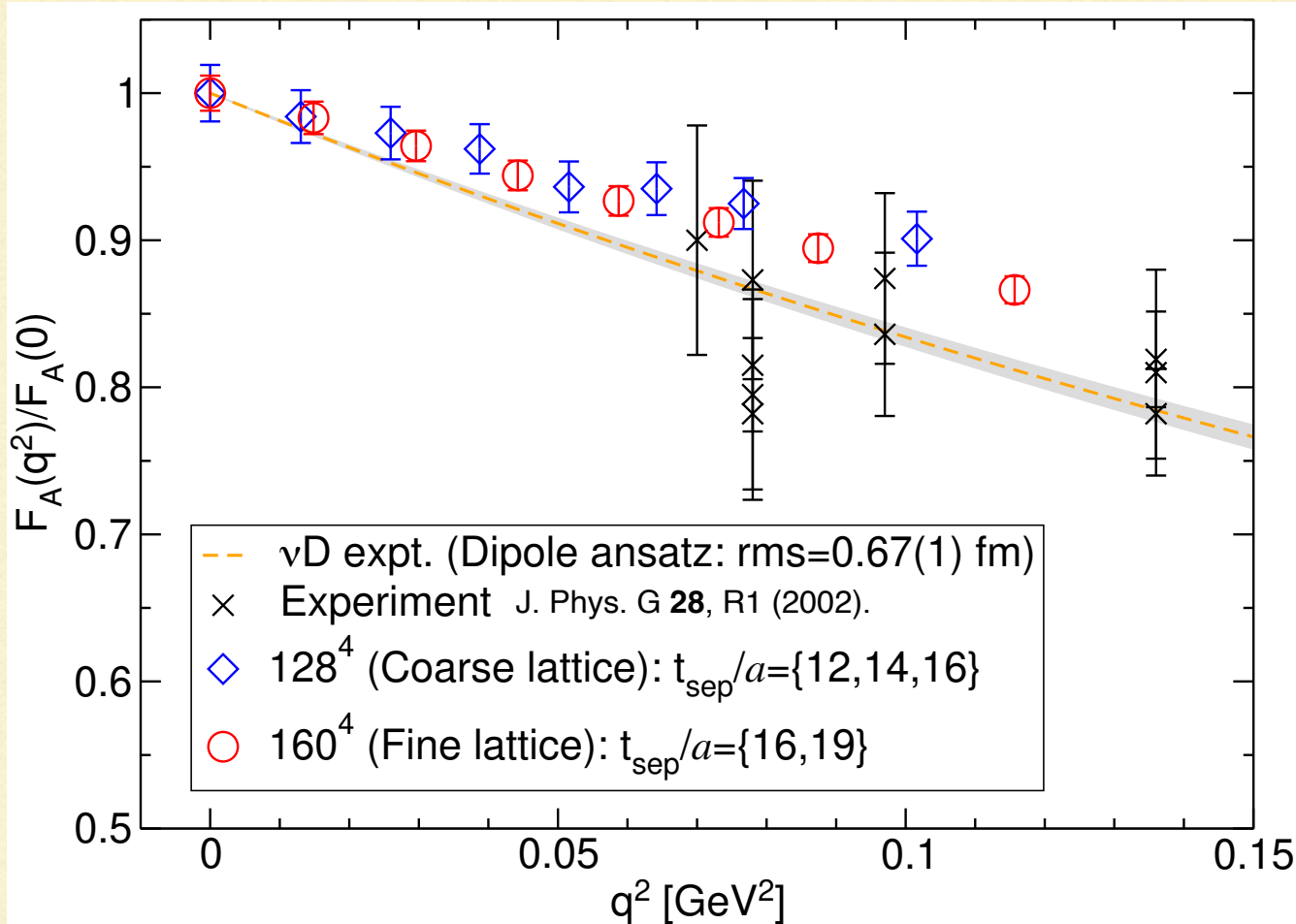


v. 数值計算結果
- 軸性形状因子

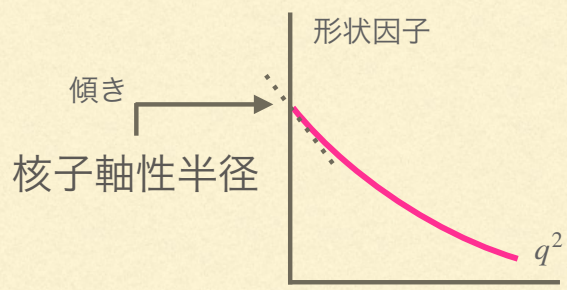
軸性形状因子



軸性形状因子



軸性半径

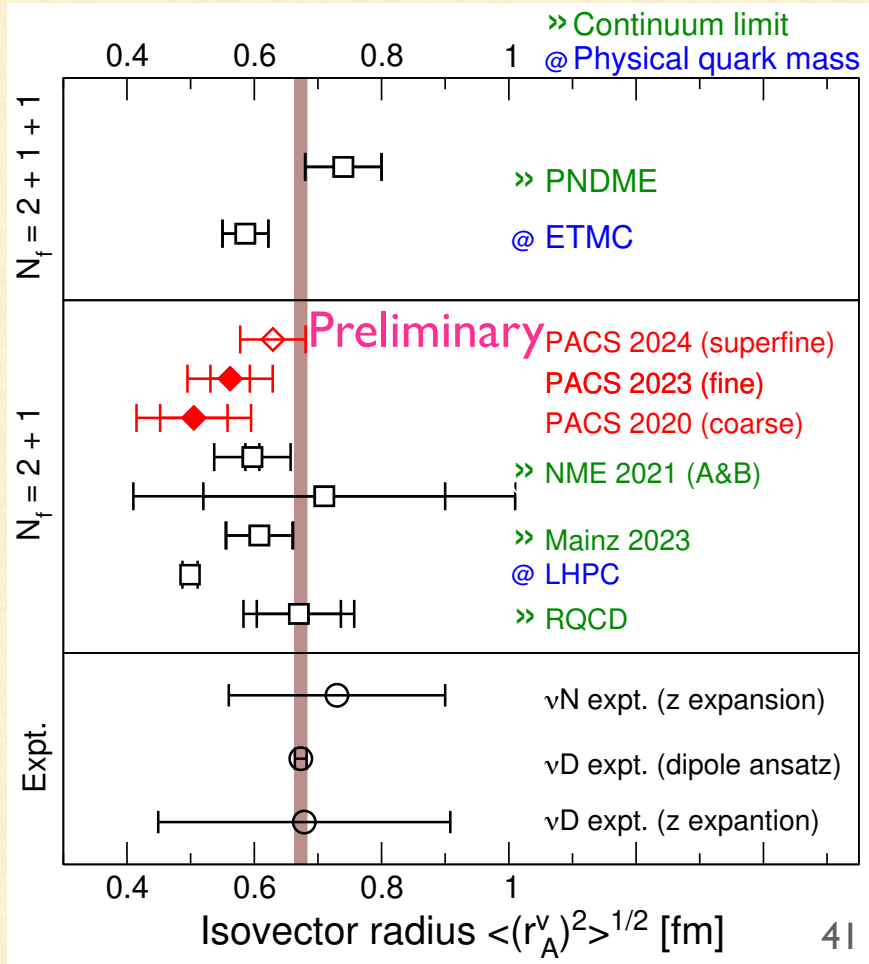


低運動量移行領域の精度指標

$$\langle r_A^2 \rangle = - \frac{6}{F_A(0)} \left. \frac{dF_A}{dq^2} \right|_{q^2=0}$$

高い精度で計算できている
軸性電荷より大きな格子間隔
依存性が確認

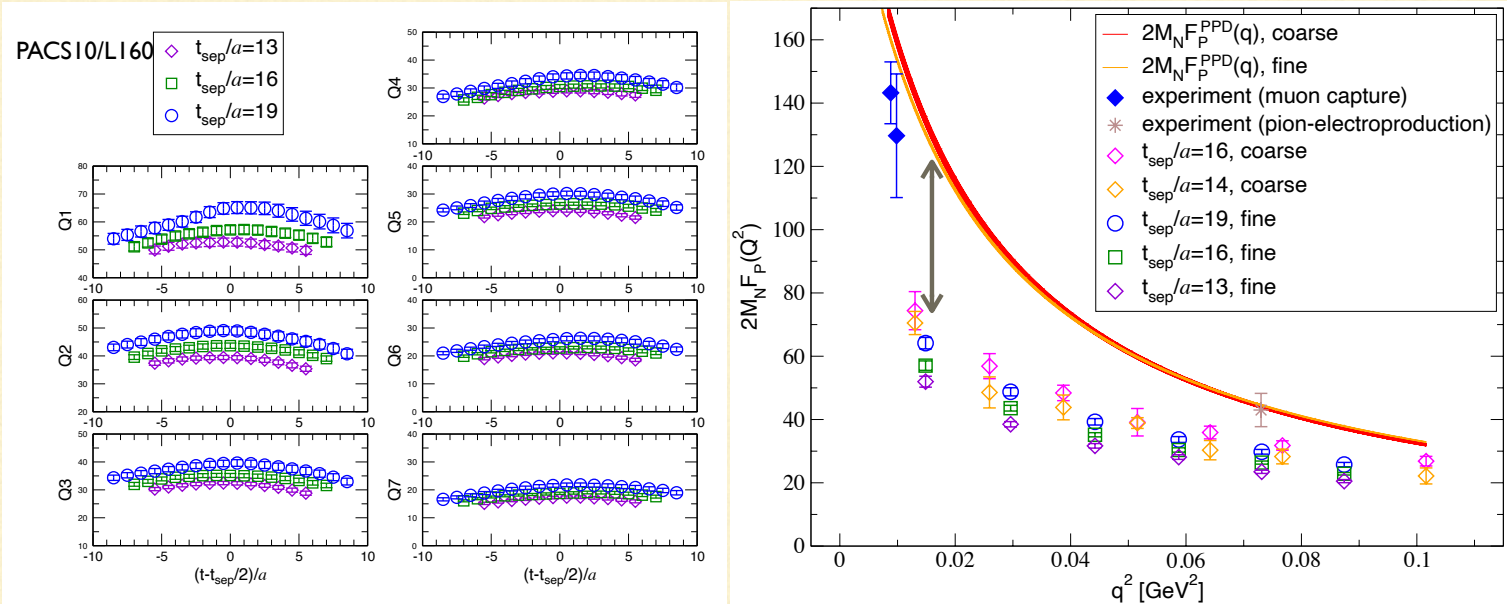
より確実な結果の検証のため
さらなる計算が進行中



VI. 数值計算結果

- **誘導擬スカラー形状因子**

Strong excited-states contamination



t_{sep} -dependences $>$ statistical error

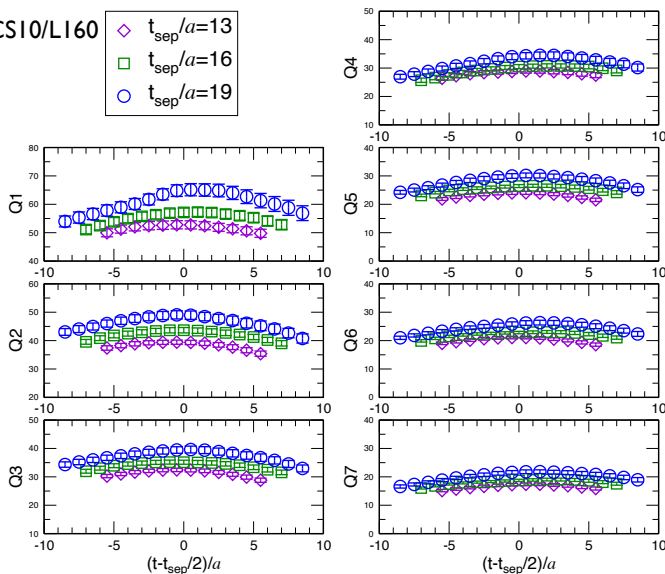
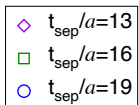
= Large excited-state contamination remains

Temporal current

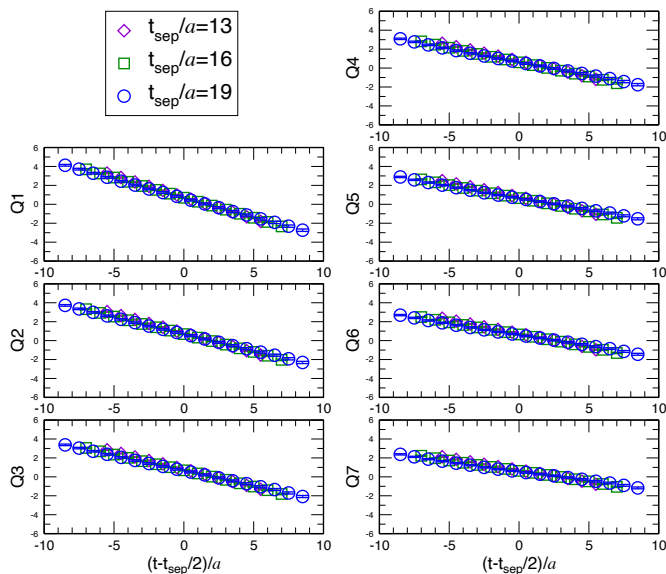
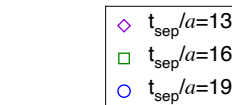
$$2M_N \tilde{F}_P(q^2) \text{ (from the spatial current)}$$

$$\propto \mathcal{R}_{A_4}^{5z}(t; \mathbf{q}) \text{ (from temporal current)}$$

PACSI0/L160



Above convex



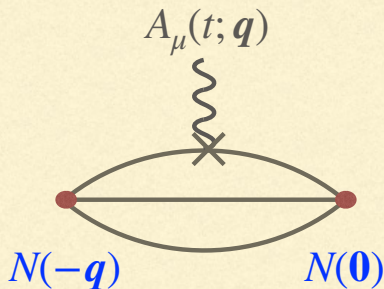
Mostly linear

Indeed, HBChPT and Disp. indicates $\sim \cosh$ and $\sim \sinh$, respectively

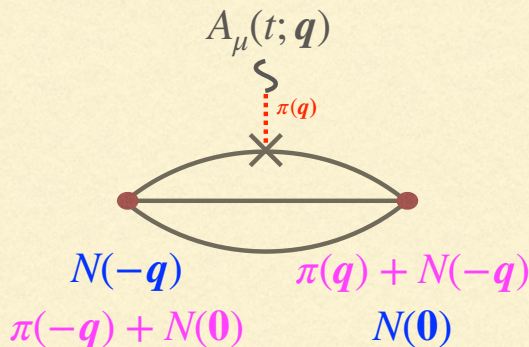
Use the temporal information to reduce the excited-state effects

Leading πN -state contributions

Ground-state contribution



Leading πN -state contributions



Leading contributions when pion goes on-shell

See R. Gupta, PoS LAR2023 124 and references therein for recent reviews.

Suggested by

- ChPT (tree+1loop)

O. Bär, Phys. Rev. D **99**, 054506 (2019).

G. S. Bali et al. (RQCD), JHEP **5**, 126 (2020).

- Pion-pole of F_P

Meyer-Otttnad-Schulz, PoS LAT2018 062.

$$\mathcal{R}_{\mathcal{O}_\alpha}^k(t; \mathbf{p}', \mathbf{p}) = \frac{C_{\mathcal{O}_\alpha}^k(t; \mathbf{p}', \mathbf{p})}{C_{SS}(t_{\text{sink}} - t_{\text{src}}; \mathbf{p}')} \sqrt{\frac{C_{LS}(t_{\text{sink}} - t; \mathbf{p}) C_{SS}(t - t_{\text{src}}; \mathbf{p}') C_{LS}(t_{\text{sink}} - t_{\text{src}}; \mathbf{p}')}{C_{LS}(t_{\text{sink}} - t; \mathbf{p}') C_{SS}(t - t_{\text{src}}; \mathbf{p}) C_{LS}(t_{\text{sink}} - t_{\text{src}}; \mathbf{p})}}$$

Three point function

Two point function

$$\mathcal{R}_{A_i}^{5z}(t; \mathbf{q}) \rightarrow \frac{1}{2E_N(E_N + M_N)} \left[(E_N + M_N) F_A(q^2) \delta_{i3} - q_3 q_i (F_P(q^2) - \Delta_+(t; \mathbf{q})) \right]$$

$$\mathcal{R}_{A_4}^{5z}(t; \mathbf{q}) \rightarrow \frac{iq_3}{2E_N(E_N + M_N)} \left[F_A(q^2) - (E_N - M_N) (F_P(q^2) + E_\pi \Delta_-(t; \mathbf{q})) \right]$$

$$\text{with } \Delta_\pm(t; \mathbf{q}) \equiv B e^{-(E_\pi + M_N - E_N)t} \pm C e^{-(E_\pi + E_N - M_N)(t_{\text{sep}} - t)}$$

Reduce leading πN contributions for F_P

$$\mathcal{R}_{A_i}^{5z}(t; \mathbf{q}) \rightarrow \frac{1}{2E_N(E_N + M_N)} \left[(E_N + M_N)F_A(q^2)\delta_{i3} - q_3q_iF_P(q^2) - \Delta_+(t; \mathbf{q}) \right]$$

$$\mathcal{R}_{A_4}^{5z}(t; \mathbf{q}) \rightarrow \frac{iq_3}{2E_N(E_N + M_N)} \left[F_A(q^2) - (E_N - M_N)F_P(q^2) + E_\pi \Delta_-(t; \mathbf{q}) \right]$$

$$\text{with } \Delta_\pm(t; \mathbf{q}) \equiv Be^{-(E_\pi + M_N - E_N)t} \pm Ce^{-(E_\pi + E_N - M_N)(t_{\text{sep}} - t)}$$

$$\rightarrow \partial_4 \Delta_\pm(t; \mathbf{q}) = -E_\pi \Delta_{\mp}(t; \mathbf{q}) + (E_N - M_N) \Delta_\pm(t; \mathbf{q}): \text{SIGN FLIP!}$$

The leading πN is reduced by linear combination of time-derivative correlator

$$\tilde{F}_P(q^2) = -K \frac{\overline{\mathcal{R}}_{A_i}^{5z}(t, \mathbf{q})}{q_i q_3} + \frac{K}{(\Delta E_N)^2 - E_\pi^2} \left[\Delta E_N \frac{\partial_4 \overline{\mathcal{R}}_{A_i}^{5z}(t, \mathbf{q})}{q_i q_3} + \frac{\partial_4 \mathcal{R}_{A_4}^{5z}(t, \mathbf{q})}{iq_3} \right]$$

Ground-state + Leading πN Terms for reducing the leading πN in the 1st term

← Traditional method ← Our new method

$$\text{with } \overline{\mathcal{R}}_{A_i}^{5z}(t, \mathbf{q}) \equiv \mathcal{R}_{A_i}^{5z}(t, \mathbf{q}) - \delta_{i3} \mathcal{R}_{A_3}^{5z}(t, \mathbf{q}_0), \Delta E_N \equiv E_N - M_N, K = \sqrt{2E_N(E_N + M_N)}$$

and the PCAC relation for the correlation function

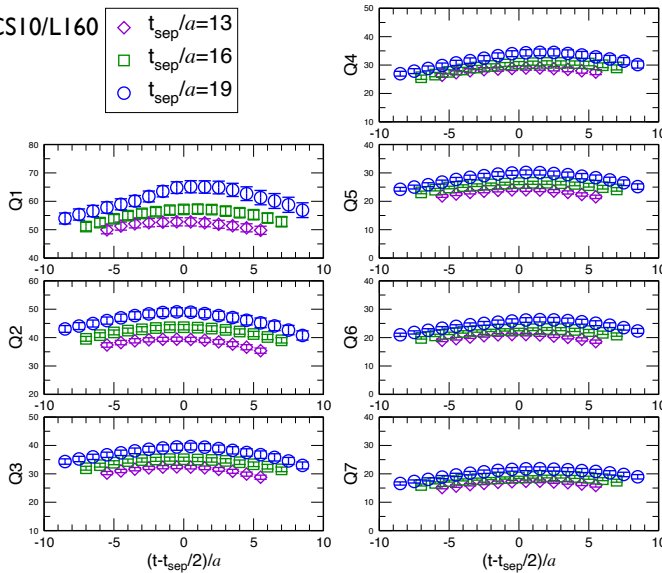
New analysis

Reduce leading πN contributions

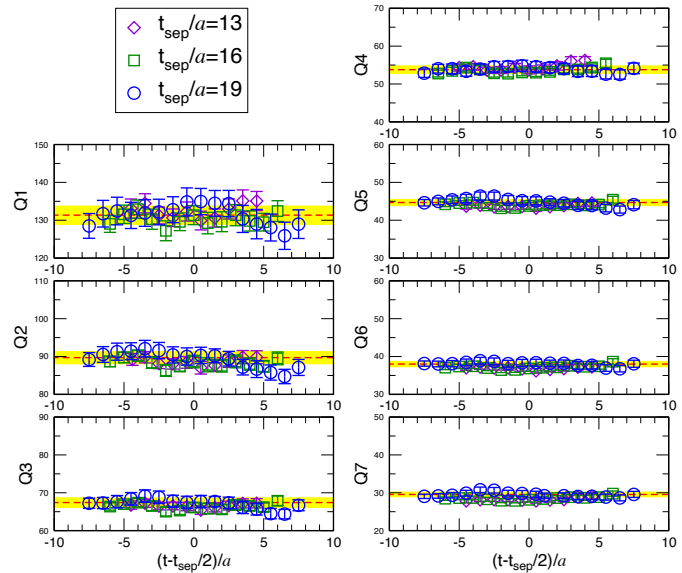
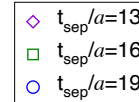
Traditional method

New method

PACS10/L160



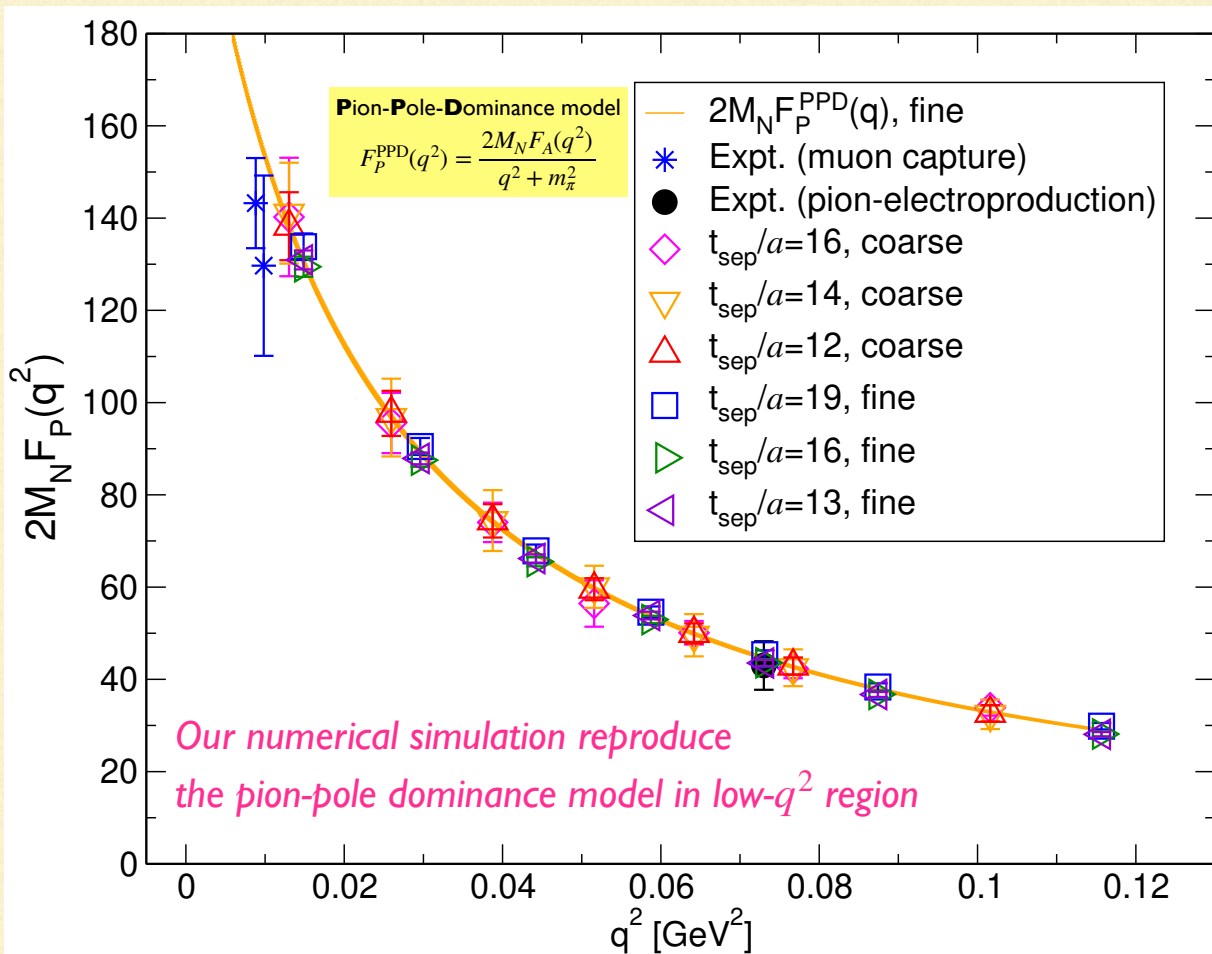
Above convex



Flat dependence

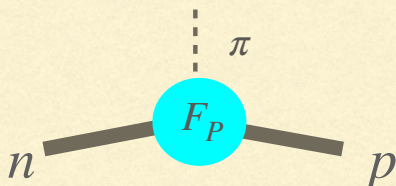
The systematic uncertainties stemming from the excited-state contamination are negligible within the present statistical precision by using our new method

誘導擬スカラー形状因子 (induced pseudoscalar form factor)



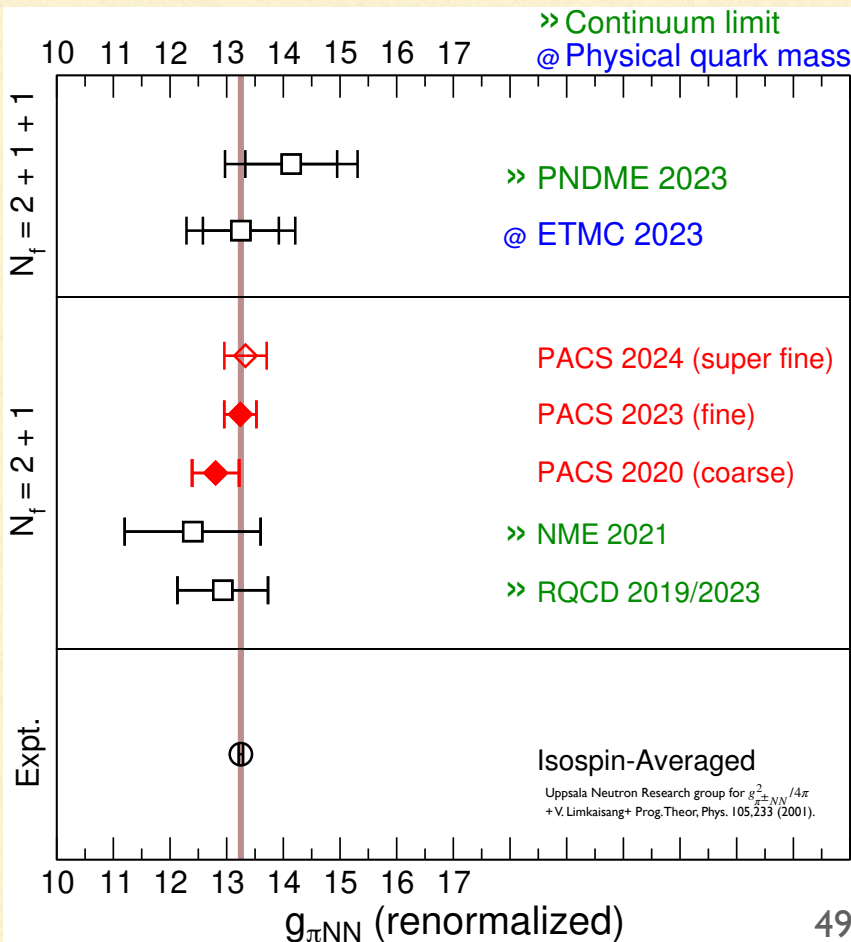
パイオン核子結合 * Isospin-Averaged: $\overline{g_{\pi NN}^2} = (g_{\pi^0 NN}^2 + 2g_{\pi^\pm NN}^2)/3$

パイオンと核子の相互作用



$$g_{\pi NN} \equiv \lim_{q^2 \rightarrow -m_\pi^2} \frac{m_\pi^2 + q^2}{2F_\pi} F_P(q^2)$$

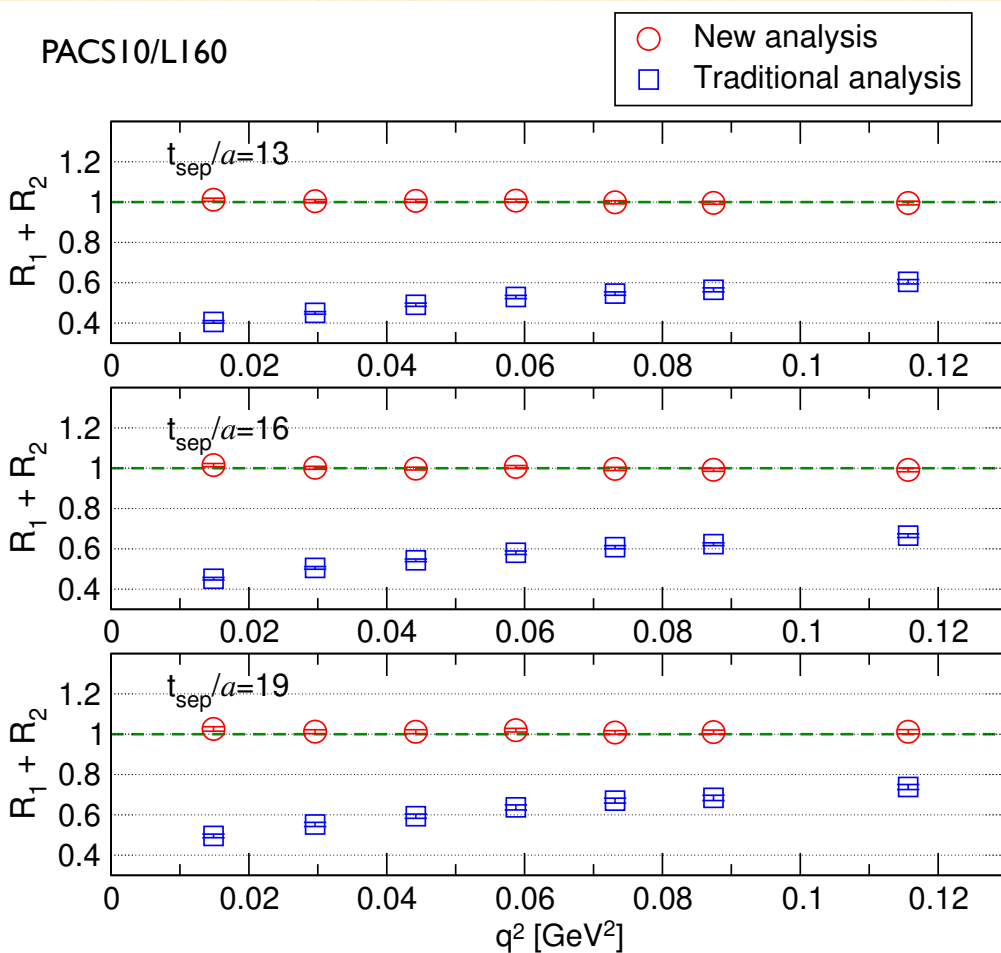
全ての計算で実験値を
統計誤差の範囲内で再現
世界最高水準の精度で計算中
より確実な結果の検証のため
さらなる計算が進行中



VII. 数値計算結果

- 低エネルギー関係式**

GGT relation



$$R_1 \equiv \frac{q^2}{2M_N} \frac{\tilde{F}_P(q^2)}{\tilde{F}_A(q^2)}$$

$$R_2 \equiv \frac{1}{2M_N} \frac{2m_{\text{PCAC}} \tilde{G}_P(q^2)}{Z_A \tilde{F}_A(q^2)}$$

if the GGT is satisfied,

$$R_1 + R_2 = 1$$

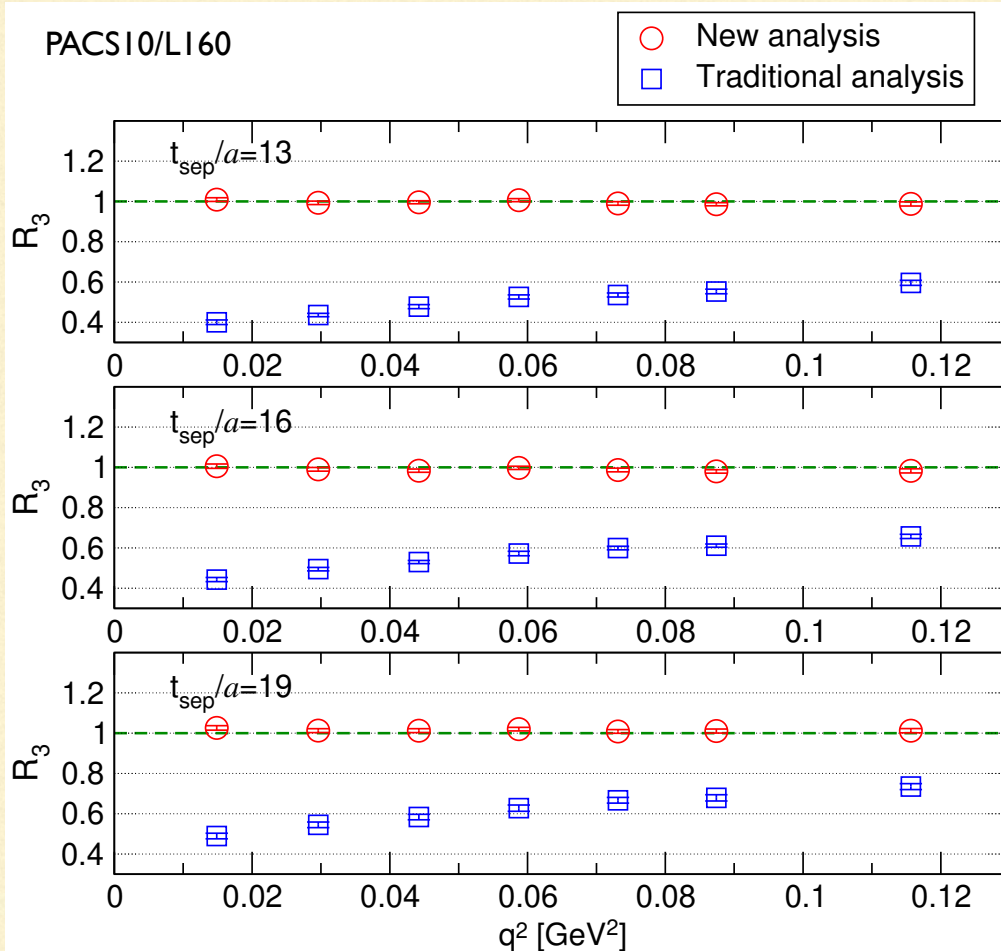
Our results show

- Flat q^2 -dependence
- Reproduce unity

for $q^2 \lesssim 0.1$ [GeV²]

New analysis works!

Pion-pole dominance for F_P



$$R_3 \equiv \frac{q^2 + M_\pi^2}{2M_N} \frac{\tilde{F}_P(q^2)}{\tilde{F}_A(q^2)}$$

if the PPD for F_P works,

$$R_3 = 1$$

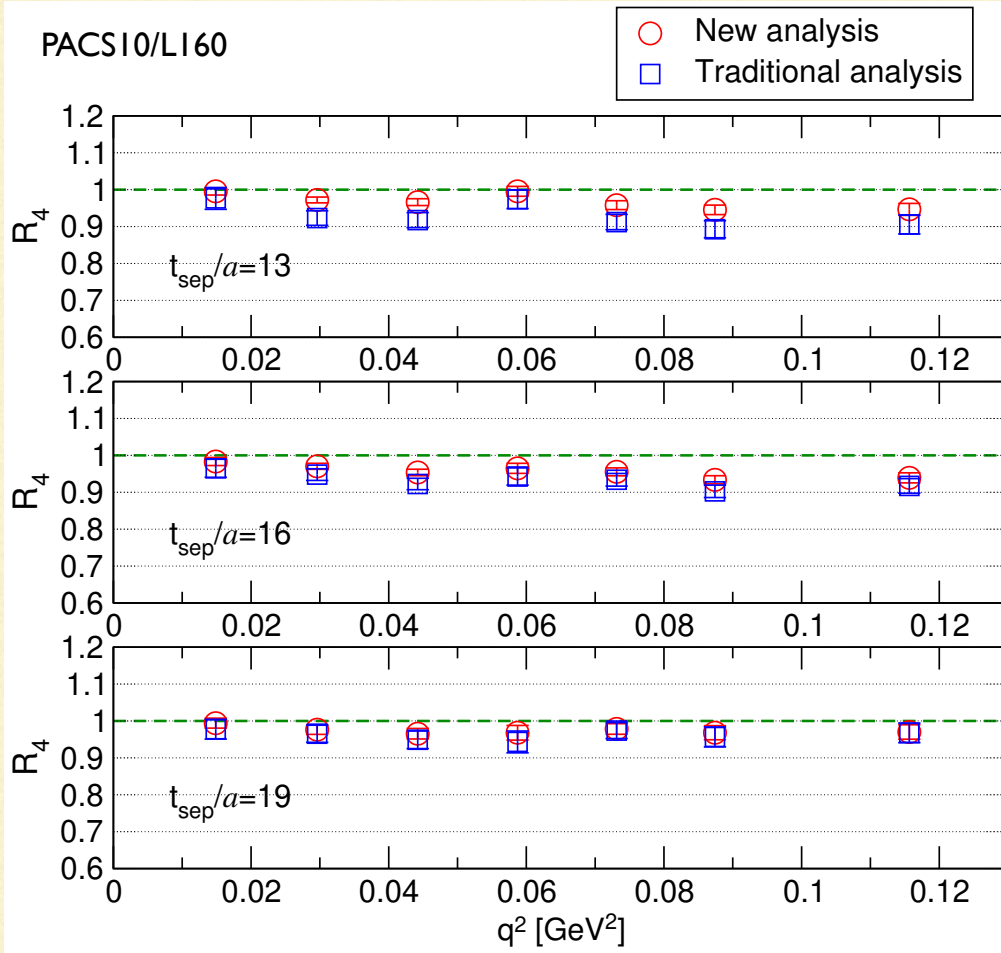
Our results show

- Flat q^2 -dependence
- Reproduce unity

for $q^2 \lesssim 0.1$ [GeV 2]

New analysis works!

Pion-pole dominance for G_P



$$R_4 \equiv M_\pi^2 \frac{Z_A \tilde{F}_P(q^2)}{2m_{\text{PCAC}} \tilde{G}_P(q^2)}$$

if the PPD for G_P works,

$$R_4 = 1$$

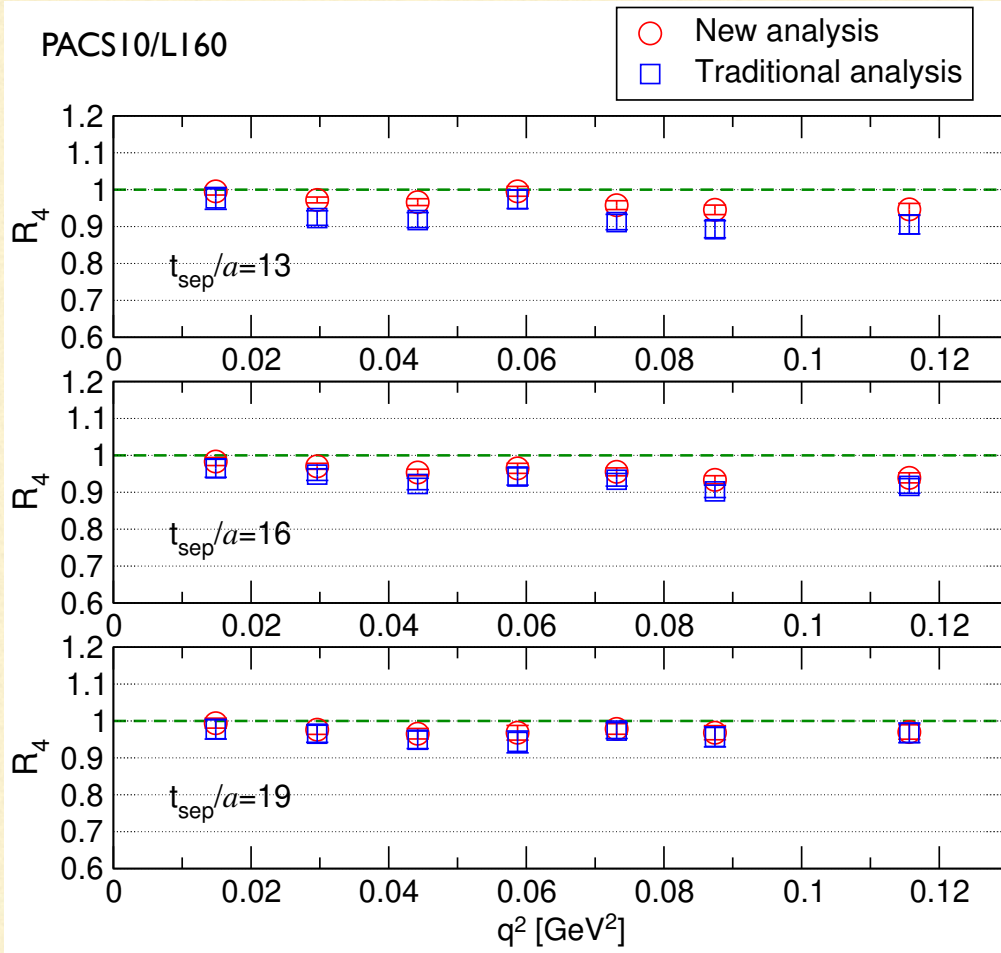
Our results show

- Flat q^2 -dependence
- “Reproduce” unity for $q^2 \lesssim 0.1$ [GeV 2]

Both analyses work!

The excited-state contamination is cancelled by making the ratio

Pion-pole structure



Why both work?

$$\partial_\alpha A_\alpha(x) = 2mP(x)$$

for the πN -state yields

$$\Delta_P(t) = Z_A B_0 \Delta_+(t)$$

This indicates

$$B_0 = \frac{\tilde{G}_P^{\text{New}}(q^2) - \tilde{G}_P^{\text{Trad}}(q^2)}{F_P^{\text{New}}(q^2) - F_P^{\text{Trad}}(q^2)}$$

and finally

$$B_0 = \frac{\tilde{G}_P^{\text{Trad}}(q^2)}{F_P^{\text{Trad}}(q^2)}$$

as long as $R_4 = 1$ for New

VIII. まとめ

まとめ

大きなアドバンテージ

本研究の核子形状因子計算の特徴：**理論的にクリーン**なセットアップ

- 物理点直上の計算 → 物理点の外挿に伴う系統誤差を回避
- 巨大体積下の計算 → 低運動量移行領域の精密計算を実現
- **連続極限**に向けたダイナミカルな格子QCD計算

格子QCD精密計算の限界に迫る挑戦的な課題

本研究の結果：

- 核子軸性電荷は **coarse & fine** 共に **PDG** を統計誤差2%以内で再現
- 核子半径は結合定数に比べ大きな格子間隔依存性を有し得る
- 実験との比較は**連続極限**の結果をまつ必要がある
- 軸性ウォード高橋構成式が核子の相関関数のレベルで成り立っていることを確認し、GGTやPPDなどの低エネルギー関係式も満たすデータ
- **連続極限**に向けて**superfine**での計算が現在進行中

新物理の探索を目指して

ニュートリノの粒子・反粒子の対称性(CP対称性)の破れ測定に貢献
素粒子物理と原子核ハドロン物理の連携が必須

素粒子実験

素粒子理論・実験

ハドロン理論・実験

ニュートリノ核子散乱断面積

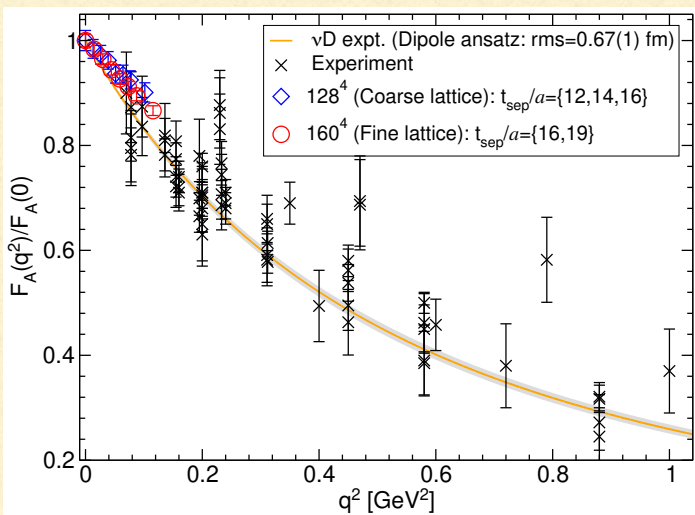
$$N_f(E_{\text{rec}}, L) \propto \sum_i \int \Phi_f(E_\nu, L) \sigma_i(E_\nu) g_{\sigma_i}(E_\nu, E_{\text{rec}}) dE_\nu$$

フレーバー f の相互作用頻度: 観測量

ニュートリノ-フラックス

原子核の多体効果による影響の補正

原子核理論



目下の課題：

巨大体積下物理点格子QCD計算による
 高精度計算で格子QCD業界を牽引する

将来の課題：

ハドロン理論・実験の不定性を削減

Neutrino Interactions for Current and Future Experiments

27–29 Oct 2025
KEK Tsukuba Campus
Asia/Tokyo timezone



Overview

Timetable

International workshop "Neutrino Interactions for Current and Future Experiments" will take place at KEK, Tsukuba, Japan from October 27 to 29. This workshop is intended to provide an opportunity where theorists and experimentalists get together and intensively discuss the neutrino-nucleon and neutrino-nucleus interactions and their applications to current and future neutrino experiments.



Starts 27 Oct 2025, 13:00

Ends 29 Oct 2025, 18:00

Asia/Tokyo



KEK Tsukuba Campus