Selection rules of topological solitons from non-invertible symmetries in axion electrodynamics

横倉諒 (慶應義塾大学)

2025. 9. 2

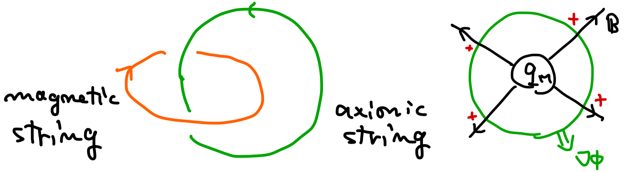
素粒子物理学の進展 2025

Based on Y. Hidaka, M. Nitta, RY [2411.05434] (to be published in JHEP)

メッセージ

非可逆対称性はソリトンの可能な配位に関する選択則を与えることができる

概要



アクシオン電磁気学におけるソリトンの可能な配位に対する選択則を非可逆対称性を用いて導いた

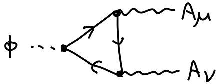
- 磁束渦やアクシオンドメインウォール (分域壁) を低エネルギー極限で非可逆対称性の生成子に同定した
- ソリトンがアクシオン渦や磁気単極子とリンクした配位の相関関数が消えうることを示した
- 磁束渦とアクシオン渦のリンクした配位への制限 → 新しい結果
- アクシオン分域壁と磁気単極子のリンクした配位への制限 → 先行研究と整合 [Sato, Takahashi, Yamada '18]

今回は磁束渦とアクシオン渦のリンクに注目してお話しします (アクシオン分域壁と磁気単極子についても同じ論理)

もくじ

アクシオン電磁気学: アクシオン ϕ + 光子 A_μ + トポロジカル結合 [Wilczek '87]

$$\mathcal{L} \ni \frac{N}{32\pi^2}\phi\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$$



- アクシオン: カイラル量子異常を持ちうる $U(1)$ 対称性の擬スカラー NG ボソン (ALP だと思ってください)

特徴

1. 素粒子、宇宙、ハドロン物理、物性系、弦理論などに遍在する:

   QCD アクシオン、インフラトン、ダークマター、π^0 中間子、トポロジカル物質、モジュライ場、...

2. 光子とのトポロジカル結合をもつ (時空の計量によらない)

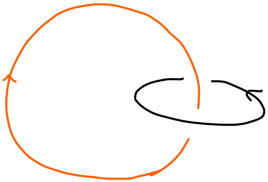
   係数がカイラル量子異常によって量子化される $N \in \mathbb{Z}$. 高次の量子補正を受けない。

3. アクシオンと光子の質量の有無で様々な相がある
   - 有質量アクシオンの相: QCD アクシオンなど
   - ヒッグス相: トポロジカル超伝導体、宇宙ひもなど [Kogan '93; Qi, Witten, Zhang '12]

4. 相に応じて空間的・時間的に広がった物体が存在し、非自明な現象を示す

例えばヒッグス相での広がった物体は...

磁束渦 (magnetic string, magnetic vortex など) [Abrikosov '56; Nielsen & Olesen '73]



$B \propto \frac{2\pi n}{k}$ $\quad$ $\oint A \cdot dx = \frac{2\pi n}{k}$

局在した磁場 $\boldsymbol{B} \sim \frac{2\pi n}{k}$ を持つ $(1+1)$ 次元の物体

- トポロジカルソリトン: 光子の運動方程式の解
- $k \in \mathbb{Z}$: ヒッグス場の $U(1)$ 電荷 (超伝導体だと $k = 2$)
- 磁束はトポロジカル電荷 (巻きつき数) n で量子化
- 分数 $\mathbb{Z}_k$ アハラノフ・ボーム (AB) 位相を持つ。

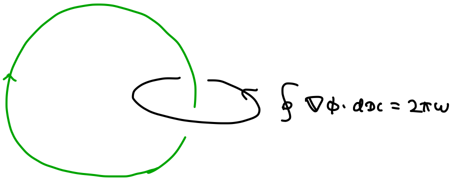
  磁束渦がある元でのウィルソン・ループ $\exp(i \oint \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{x})$ の値は

  $\exp(i \oint \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{x}) = \exp(i \iint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}) = \exp(\frac{2\pi i n}{k})$

もうひとつ $(1+1)$ 次元の物体がある

アクシオン渦 (axionic vortex, string など呼ばれる)

e.g., 宇宙ひもと分域壁の複合系 [Kogan '93], トポロジカル超伝導体 [Qi, Witten, Zhang '12]

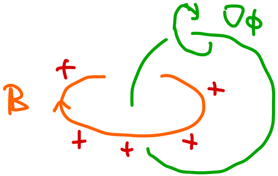


$(1+1)$ 次元に広がった物体

- アクシオンが巻きつき数を持つ $\oint \nabla\phi \cdot d\boldsymbol{x} = 2\pi w \in 2\pi\mathbb{Z}$ [e.g., Naculich '87]
- アクシオンの周期性によって巻きつき数が量子化されている

トポロジカル結合があるとこれら2つの渦に非自明な相関がある

磁束渦とアクシオン渦がリンクした配位 [e.g., Eto, et al., '24]



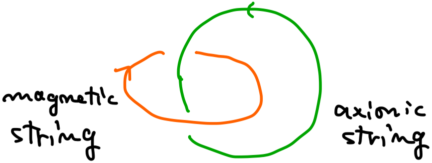
- 共にトポロジカル電荷を持つので、この配位は安定に思える
- しかし、このような配位ができるかどうかは非自明

磁束渦上に分数電荷が誘起しうる

- アクシオン・光子結合 $\phi F\tilde{F}$ がある元での電気的ガウスの法則: $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{N}{4\pi^2}\nabla\phi \cdot \boldsymbol{B}$
- 誘導電荷 $\int \frac{N}{4\pi^2}\nabla\phi \cdot \boldsymbol{B} dV = \frac{N}{4\pi^2} \cdot 2\pi w \cdot \frac{2\pi n}{k} = \frac{nNw}{k}$
- 誘導電荷がディラックの量子化条件を破りうる $\frac{nN}{k} w \notin \mathbb{Z}$

このような配位は可能なのか？

問: アクシオン電磁気学におけるトポロジカルソリトンの可能な配位は？



トポロジカルソリトンが他の物体とリンクする配位の可能性は非自明そうだ

- ダイナミクスの問題？分数電荷が現れるソリトンは崩壊するか？
- それともダイナミクスの詳細によらない普遍的な性質があるか？

可能な配位 or 禁止された配位を系統的に調べることはできるか？

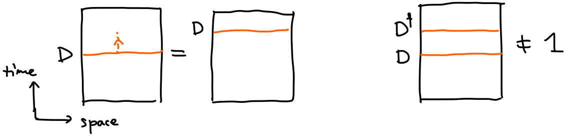
- リンクした配位の厳密解を求めたいが、アクシオン・光子結合 $\phi F\tilde{F}$ の非線形性で難しそう

なにか非摂動的な方法を使えないか？

候補: 非可逆対称性と1次対称性

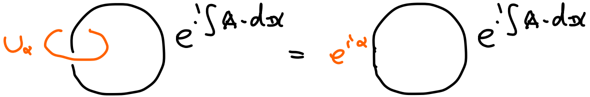
このトークでは断りのない限り対称性は大域的対称性を指すことにします

1. 非可逆対称性とは？ [e.g., Bhardwaj & Tachikawa '17]



   - 対称性の生成子 D は保存量でハミルトニアンと可換 $\frac{\partial D}{\partial t} \propto [D, H] = 0$
   - しかし D は逆元を持たない。特に D はユニタリーでない $D^\dagger D \neq 1$

2. 1次対称性とは？ [Gaiotto, et al., '14]
   - 保存量が面積分である対称性 (通常の対称性は体積積分)
   - 例: 真空中でのウィルソン・ループ $e^{i\int \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{x}}$ に対するAB効果

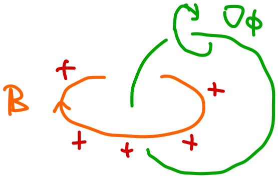


(α: $U(1)$ パラメータ)

対称性の生成子 $=$ AB効果を引き起こす磁力線の世界面 (面積分)

保存則: マクスウェル方程式 $\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$ (磁力線は切れたり分かれたりしない)

このトークの目的



アクシオン電磁気学におけるヒッグス相の低エネルギー極限において、

- 磁束渦を非可逆1次対称性の生成子に同定する
- 非可逆対称性を用いて、磁束渦とアクシオン渦とがリンクした配位の可能性を分類する
- 磁束渦上の誘導電荷が分数のとき、そのような配位が禁止されることを示す
- リンクが禁止された配位を1次対称性を用いた選択則で分類する

以下では、ソリトンのトポロジカルな性質に注目するために、低エネルギー極限を考える

- アクシオンと光子の場のゆらぎは 0
- 磁束渦は無限に細く、長時間存在する世界面で記述できる

もくじ

アクシオン電磁気学のヒッグス相における可逆1次対称性 (review) [6 スライド]

based on Banks & Seiberg '10; Kapustin & Seiberg '14; Hidaka, Nitta, RY, '21

まずアクシオンがいない場合: 可換ヒッグス模型の低エネルギー極限 [e.g., Cremmer & Scherk '73]

BF 作用

$$S = \frac{k}{2\pi\cdot 2!}\int d^4x B_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$$

以降は自明な統計因子 2! などは省略

電荷 k のヒッグス場の作る光子の質量項 $|\partial_\mu\chi - kA_\mu|^2$ と物理的に等価 (ルジャンドル変換で得られる)

- 光子 A_μ: $U(1)$ ゲージ場, 場の強さ $F_{\mu\nu}$,

  ディラック量子化条件 (あとで使う): 電荷と磁荷 $\frac{1}{2\pi}\int_{S^2}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$ は整数 (運動項が $-\frac{1}{4e^2}|F_{\mu\nu}|^2$ になる規格化)
- $B_{\mu\nu}$: 2階反対称テンソル $U(1)$ ゲージ場, ディラック量子化条件あり

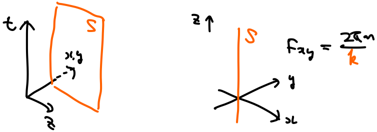
  光子に食べられる NG ボソン χ のルジャンドル変換で得られる

なぜわざわざ BF 理論を使う？ $B_{\mu\nu}$ を使うと磁束渦 (の世界面) を簡単に書けるから

$B_{\mu\nu}$ の面積分 = 磁束渦の世界面

作用に $n\int_{\mathcal{S}} B_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}$ を加えれば OK. ($n \in \mathbb{Z}$ は量子化された磁束の大きさ、$\mathcal{S}$ は磁束の世界面)

- 簡単のため世界面 $\mathcal{S}$ が $x = y = 0$ にある zt 平面の場合を考えると…



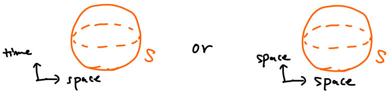
- 磁束渦入りの作用 $\frac{k}{2\pi}\int B_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} d^4x + n\int B_{zt} dz dt$
- $B_{\mu\nu}$ の運動方程式: $\tilde{F}_{zt} = F_{xy} = \frac{2\pi n}{k}\delta(x)\delta(y)$. 確かに $\mathcal{S}$ 上に大きさ $\frac{2\pi n}{k}$ の磁場が局在している
- なぜ係数 $n \in \mathbb{Z}$ か？量子化された磁束を再現するため (技術的には $B_{\mu\nu}$ に関するディラックの量子化条件)

さらに、磁束渦の世界面は1次対称性の生成子となる

1次対称性 [Banks & Seiberg '10; Kapustin & Seiberg '14]

対称性の生成子は磁束渦の世界面そのもの

$$U_1(e^{\frac{2\pi i n}{k}}, \mathcal{S}) = \exp\left(in\int_{\mathcal{S}} B_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}\right)$$



($\mathcal{S}$: 閉じた2次元面, $dS^{\mu\nu}$: 面要素)

- 保存則: 光子の運動方程式 $\partial_\mu \frac{k}{2\pi}\tilde{B}^{\mu\nu} = 0$,　保存カレント: $\frac{k}{2\pi}\tilde{B}^{\mu\nu}$

  磁束渦は突然生成消滅しないということ (低エネルギー極限で)
- 対称性の生成子: パラメータ $e^{\frac{2\pi i n}{k}} \in \mathbb{Z}_k$ をつけて面積分して exp にのせる $\exp\left(\frac{2\pi i n}{k}\int_{\mathcal{S}} \frac{k}{2\pi} B_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}\right)$

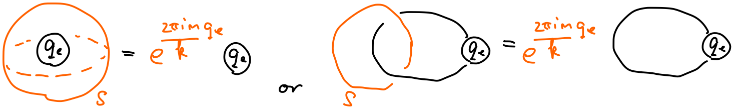
  保存量が面積分なので1次対称性
- なぜパラメータは $e^{\frac{2\pi i n}{k}} \in \mathbb{Z}_k$ か？量子化された磁束との整合性
- 生成子がユニタリーなので対称性は可逆

1次対称性の対称性変換は？

1次対称性の対称性変換

保存則 $=$ 光子の運動方程式なので、変換される物体は電磁場のソースである試験電荷・電流 (の世界線) だろう

1. 電気的ガウスの法則: $\mathcal{S}$ を空間的にとると電荷 q_e の試験電荷から出る電気力線を (mod k で) 検出する
2. アンペールの法則: $\mathcal{S}$ を世界面にとるとウィルソンループ (瞬間的電流) に $\mathbb{Z}_k$ AB効果を与える



- 2つ目の意味においても、 U_1 を $\mathbb{Z}_k$ の分数位相を持つ磁束渦の世界面に同定できる

ざっくりとした導出 (電磁気学でやったことと同じ操作)

- 試験電荷 q_e がある元での積分形ガウス or アンペールの法則 $\frac{k}{2\pi}\int_{\mathcal{S}} B_{\mu\nu}dS^{\mu\nu} = q_e$ を U_1 に代入
- 補足: 相関関数でまじめに書くと $\langle U_1(e^{\frac{2\pi i n}{k}}, \mathcal{S})e^{iq_e\int_{\mathcal{C}} A_\mu dx^\mu}\rangle = e^{\frac{2\pi i n}{k}\cdot q_e}\langle e^{iq_e\int_{\mathcal{C}} A_\mu dx^\mu}\rangle$ ($\mathcal{C}$: ループ)

アクシオンもいる場合は...

アクシオンもいる場合 [e.g., Kogan '93]

BF 作用 + アクシオン・光子結合

$$S = \int d^4x \left(\frac{k}{2\pi} B_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} + \frac{N}{16\pi^2} \phi F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - \frac{v^2}{2} |\partial_\mu \phi|^2 \right)$$

v: アクシオン崩壊定数

- アクシオン: $\phi \to \phi + 2\pi$ の元で不変な擬スカラー場 ($U(1)$ 対称性の NG ボソン $e^{i\phi}$)
- アクシオン・光子結合の係数はカイラルアノマリーで量子化 $N \in \mathbb{Z}$

(UV理論でアクシオンと光子に結合しているディラックフェルミオンの数)

1次対称性がアクシオン・光子結合で変形を受け、AB位相が制限を受ける

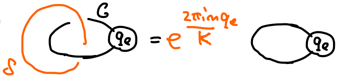
AB位相への制限 [Hidaka, Nitta, RY, '21]

- 保存則: 光子の運動方程式 $\partial_\mu(\frac{k}{2\pi}\tilde{B}^{\mu\nu} + \frac{N}{4\pi^2}\phi\tilde{F}^{\mu\nu}) = 0$,　保存カレント: $\frac{k}{2\pi}\tilde{B}^{\mu\nu} + \frac{N}{4\pi^2}\phi\tilde{F}^{\mu\nu}$
- 素朴な保存量

$$\exp\left(in\int_{\mathcal{S}} B_{\mu\nu}dS^{\mu\nu}\right) \times \exp\left(\frac{inN}{2\pi k}\int_{\mathcal{S}}\phi F_{\mu\nu}dS^{\mu\nu}\right)$$

はアクシオンの周期性 $\phi \to \phi + 2\pi$ を守るべし

- パラメータ n は $e^{\frac{2\pi i n}{K}} \in \mathbb{Z}_K = \mathbb{Z}_k \cap \mathbb{Z}_N$ の元であるべし ($K = \mathrm{gcd}(k, N)$)
- U_1 で生成されるAB位相も $\mathbb{Z}_K$ に制限される



物理的意味: アクシオン物質中の磁化 $\frac{N}{4\pi^2}\phi\boldsymbol{E}$ が磁束の保存則を変えている

- 磁化が磁束の数を N だけ変えるので、 AB位相が $\mathbb{Z}_k$ の磁力線の本数を N で割った余りのみ保存

Q. しかし磁束渦は $\phi = 0$ での古典解なので、どうにか元の $\mathbb{Z}_k$ AB位相を持つ対称性生成子を作れないか？

A. 1次対称性の可逆性を捨てればこのAB位相への制限を取り除くことができる

もくじ

アクシオン電磁気学のヒッグス相における非可逆1次対称性 [2 スライド]

Hidaka, Nitta, RY [2411.05434]

2次元トポロジカル場の量子論 (TQFT) を用いる [Choi, Lam, Shao, '22; RY '22]

アクシオン・光子結合を TQFT の分配関数へ変形する

$$\exp\left(\frac{inN}{2\pi k}\int_{\mathcal{S}}\phi F_{\mu\nu}dS^{\mu\nu}\right)\to Z[p]^q=\left[\int\mathcal{D}\chi\mathcal{D}u_\mu\exp\left(\frac{i}{2\pi}\int_{\mathcal{S}}(-p\chi w_{\mu\nu}+\chi F_{\mu\nu}+\phi w_{\mu\nu})\right)dS^{\mu\nu}\right]^q$$

- ざっくりとした導出: 2次式の変形
  1. パラメータを既約分数で表す $\frac{nN}{k}=\frac{q}{p}$. 分母 $p>1$ だとアクシオンの周期性に問題があった
  2. 分母の p をむりやり分子に持っていく2次式の変形をする $\frac{1}{p}xy\to -pab+ax+by$.
  この変形に必要な変数を補助場として加えると、TQFT の分配関数が得られる
     - χ: 2π 周期性を持つ擬スカラー
     - u_μ: $U(1)$ ゲージ場, 場の強さ $w_{\mu\nu}=\partial_{[\mu}u_{\nu]}$, ディラックの量子化条件 $\int_{\mathcal{S}}w_{\mu\nu}dS^{\mu\nu}\in 2\pi\mathbb{Z}$
- TQFT の分配関数においては p は分子にある: 2π 周期性が明白にある
- 元の表式: ディラックの量子化条件が自明な場合に補助場を積分して得られるナイーブなもの
- この変形でユニタリティがなくなる。TQFT の分配関数は位相因子の和

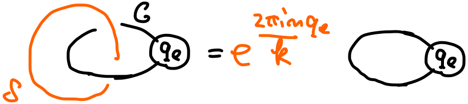
(コサイン $\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ がユニタリーでないことと同じ)

非可逆1次対称性の生成子 $= \mathbb{Z}_k$ AB 位相を持つ磁束渦 [Hidaka, Nitta, RY '24]

対称性の生成子

$$D_1(e^{\frac{2\pi i n}{k}}, \mathcal{S}) = \exp\left(in\int_{\mathcal{S}} B_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}\right) \times Z[p]^q$$

- アクシオンの 2π 周期性が守られている
- TQFT の分配関数 $Z[p]$ があるため非可逆になっている
- ウィルソン・ループ $e^{i\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{x}}$ への作用



- D_1 は $\mathbb{Z}_k$ AB 位相を持つ磁束渦とみなせる！

D_1 を用いてアクシオン渦とのリンクを調べてみよう

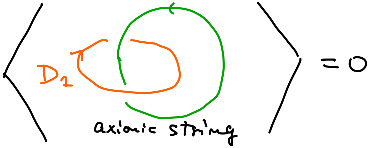
もくじ

磁束渦とアクシオン渦のリンクの選択則 [5 スライド]

Hidaka, Nitta, RY [2411.05434]

非可逆1次対称性の生成子とアクシオン渦のリンク [Hidaka, Nitta, RY '24]

アクシオンの巻きつき数 w が $\frac{nN}{k}w \in \mathbb{Z}$ を満たさない限り相関関数が消える

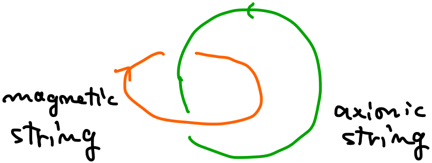


- D_1 はアクシオン渦に非可逆に作用する [Choi, et al., '22]
- 物理的には、磁束渦とアクシオン渦がリンクした世界面の配位が
  低エネルギー極限 (= 長時間極限) で禁じられているということ
- 技術的にはアクシオンの巻きつき数 $\oint \partial_\mu \phi dx^\mu = 2\pi w$ が存在する元で TQFT の分配関数 $Z[p]$ を計算する

$$Z[p] = \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}u_\mu \exp\left(-\frac{i}{2\pi}\int_{\mathcal{S}} dS^{\mu\nu}(p\chi w_{\mu\nu} - \chi F_{\mu\nu} - u_\mu \partial_\nu \phi)\right)$$

条件 $\frac{nN}{k}w \in \mathbb{Z}$ の物理的な意味は？

磁束渦に関する選択則？



- $\frac{nN}{k}w$ は磁束渦上に生じる誘導電荷と一致する $\frac{N}{4\pi^2}\int \nabla\phi \cdot \boldsymbol{B} dV = \frac{N}{4\pi^2} \cdot 2\pi w \cdot \frac{2\pi n}{k} = \frac{nN}{k}w$
- 誘導電荷が分数だと相関関数が消えるということ

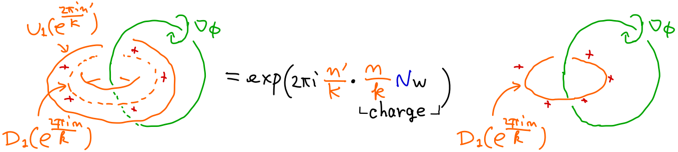
  $\rightarrow$ この配位はディラックの量子化条件で禁じられているかも

- このようなソリトンの配位を対称性の言葉で制限できないか？ $=$ ソリトンに関する選択則？

わかったこと: リンクした磁束渦とアクシオン渦の禁止された配位を可逆な1次対称性を用いて分類できる

リンクした磁束渦とアクシオン渦の配位に関する選択則 (その1) [Hidaka, Nitta, RY '24]

可逆1次対称性で磁束渦上の誘導電荷を検出する



方針: 磁束渦上の誘導電荷に対して電気的ガウスの法則を用いる

- 磁束渦 $D_1(e^{\frac{2\pi i n}{k}})$ から出てくる電気力線を検出できるように可逆1次対称性の生成子 $U_1(e^{\frac{2\pi i n'}{K}})$ を置く
- ガウスの法則で U_1 が位相 $\exp\left(\frac{2\pi i n'}{K} \cdot \frac{nN}{k} w\right)$ を生成する

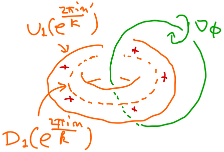
生成された位相に不定性がありうる

ざっくりとした導出

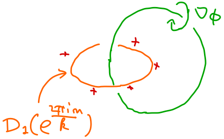
- U_1 を D_1 から外して潰す変形において巻きつき数 $\int \partial_\mu \phi dx^\mu$ が現れる $U_1 \to U_1 \exp(\frac{2\pi i n'}{K} \cdot \frac{2\pi n}{k} \cdot \frac{N}{4\pi^2} \oint \partial_\mu \phi dx^\mu)$
- $\int \partial_\mu \phi dx^\mu = 2\pi w$ なので位相 $\exp(\frac{2\pi i n'}{K} \cdot \frac{nN}{k} w)$ が生成される

リンクした磁束渦とアクシオン渦の配位に関する選択則 (その2) [Hidaka, Nitta, RY '24]

分数誘導電荷があると可逆な1次対称性変換に不定性が生じる



$$= \exp\left(2\pi i \frac{n'}{k}\cdot \underbrace{\frac{m}{k} N w}_{\text{charge}}\right)$$



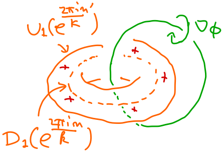
- U_1 のパラメータは $e^{\frac{2\pi i n'}{K}} \in \mathbb{Z}_K$ $(= \mathbb{Z}_k \cap \mathbb{Z}_N)$ なので

  生成された位相はパラメータのシフト $n' \to n' + K$ で不変であるべし。
- このシフトでの位相のずれ分は $\exp\left(2\pi i \frac{nN}{k} w\right)$ なので $\frac{nN}{k} w \in \mathbb{Z}$ の時のみ位相の不定性がない
- もし生成された位相にこのシフトに関する不定性があるならば、

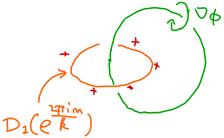
  その不定性を消すために相関関数自体が消えるべし

トポロジカルソリトンの選択則

可逆 & 非可逆対称性を用いて、トポロジカルソリトンに対する選択則を見出した

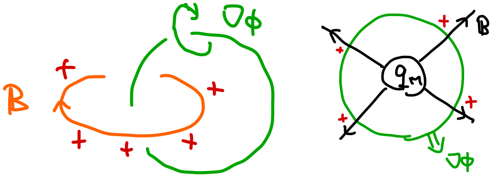


$$= \exp\left(2\pi i \frac{n'}{k}\cdot \underbrace{\frac{m}{k} N_w}_{\text{charge}}\right)$$



- 大事だったこと: ソリトン上に生じる誘導電荷がディラックの量子化条件を満たすかどうか
- この誘導電荷に関する条件を大域的対称性の選択則として理解できた
- 対称性を用いた利点: 模型の詳細によらない対称性で決まる普遍的な性質として、ソリトンの可能な配位を分類できた点
- コメント: アクシオン分域壁と磁気単極子についても誘導電荷に基づく選択則が得られ、可能なアクシオン分域壁の配位が制限される

まとめ



アクシオン電磁気学におけるヒッグス相の低エネルギー極限において、

- 磁束渦を非可逆1次対称性の生成子に同定した
- 非可逆対称性を用いて、磁束渦とアクシオン渦とがリンクした配位の可能性を分類した
- リンクが禁止された配位はソリトン上にディラックの量子化条件を満たさない分数電荷が生じること、

  そのような配位は 1次対称性を用いた選択則で分類できることを示した
- アクシオン分域壁と磁気単極子のリンクに関しても、分数電荷が生じる配位は選択則で禁止される
- 展望: 安定なリンクを持つ or 持たない UV 模型の作り方？有限時間でのシミュレーション？