

2026年8月7日

京大・基礎物理学研究所

量子基礎・量子情報の新展開

量子系の情報幾何学と情報スペクトルを巡って

長岡浩司

§1. 自己紹介

1 自己紹介

東京生まれ

東京大学・工（計数工学科数理工学コース）（修士まで）

大阪大学・基礎工（博士）

東京工科大学・工

北海道大学・工

電気通信大学・情報システム学～情報理工学

退官（名誉教授）

1979秋～1980

- 甘利俊一先生および情報幾何との出会い

1982

- 2月、修論完成（ α -表現、双対接続、双対平坦空間など）
- 4月、阪大へ。情報幾何から離れる。
（→ 有本卓先生の研究室。この人もすごい研究者）

- 10月、 甘利先生執筆のテクニカルレポート

Nagaoka and Amari, Differential Geometry of Smooth Families of Probability Distributions.

cf. 今年 1月に Information Geometry 誌に掲載：

<https://link.springer.com/collections/ecifiihcjd>)

1986

- 東京に戻る。
- 情報幾何に徐々に復帰
- 量子情報に徐々に参入

1993

- 北大から電通大に移動。
韓太舜 (Han Te Sun) 先生 (= カンさん) と同じ講座。情報スペクトルとの出会い。

2000

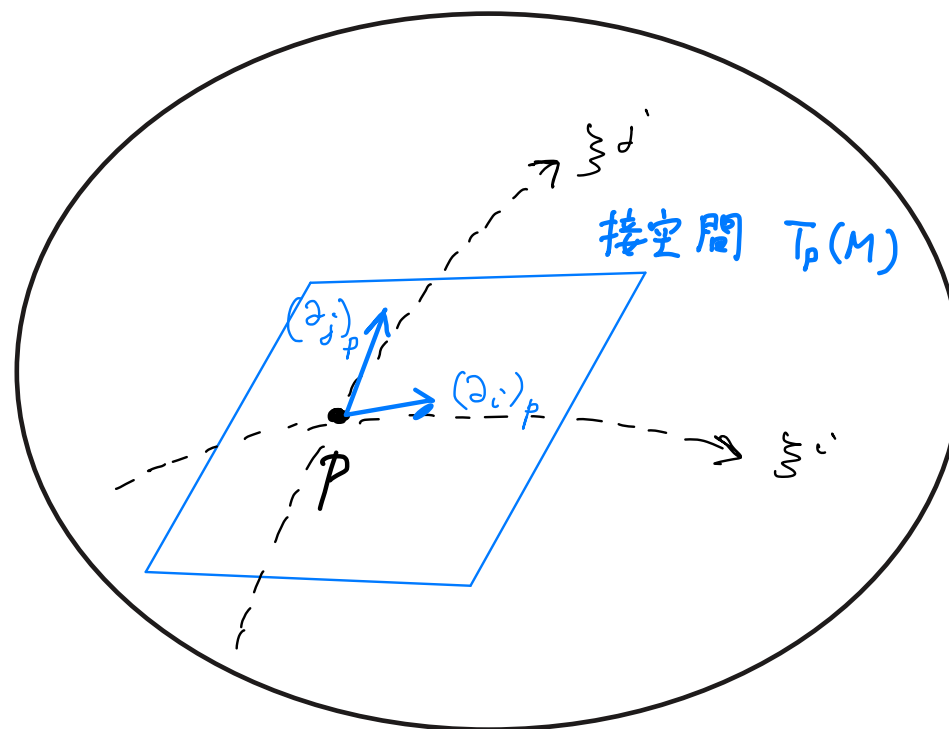
- Amari & Nagaoka, Methods of Information Geometry 刊行

§2. 情報幾何（学）とは

2 情報幾何とは（古典系）

2.1 多様体、リーマン計量、接続

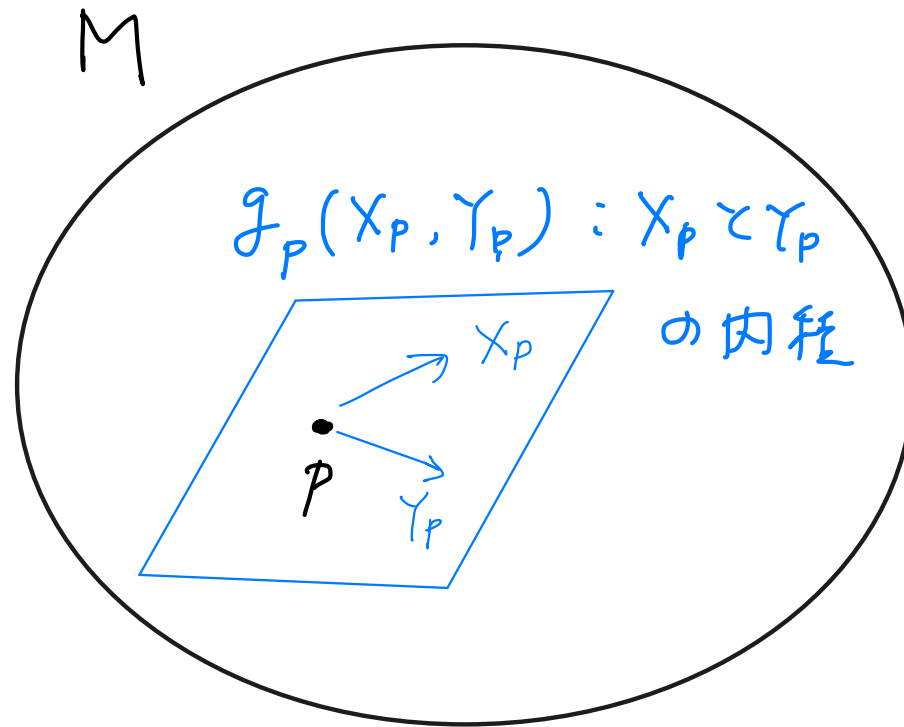
M : n 次元多様体



$\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$: M の座標系

$$\partial_i := \frac{\partial}{\partial \xi^i}$$

【リーマン計量】

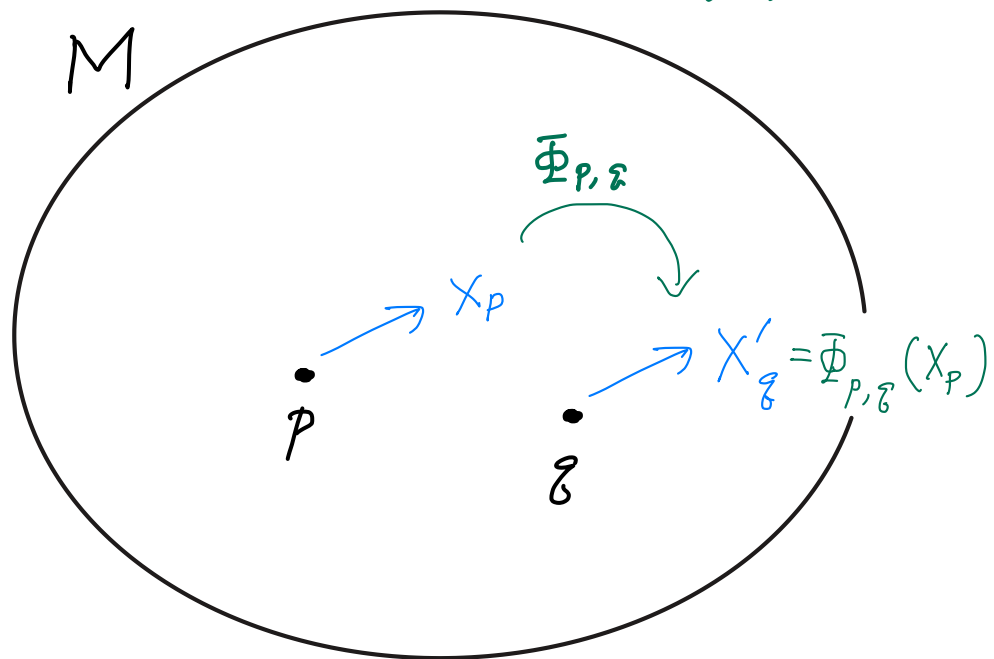


$g = \{g_p\}_{p \in \mathcal{P}} : \text{リーマン計量}$
Riemannian metric

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$$

【接ベクトルの平行移動】

接ベクトルの平行移動



$$\begin{cases} \bar{\Phi}_{p,q} : T_p(M) \rightarrow T_q(M) \\ \bar{\Phi}_{p,p} = \text{id}_{T_p(M)} \text{ (恒等写像)} \\ \bar{\Phi}_{q,r} \circ \bar{\Phi}_{p,q} = \bar{\Phi}_{p,r} \end{cases}$$

【平坦接続】

$$\circ \left\{ \overline{\Phi}_{p,g} \right\}_{(p,g) \in M^2}$$

$$\longleftrightarrow \begin{array}{l} \text{曲率ゼロの接続 } \nabla \\ \text{curvature-free connection} \end{array}$$

$$(\overline{\Phi}_{p,g} = \overline{\Phi}_{p,g}^{(0)} \text{ と表す})$$

$$\circ \text{座標系 } x \text{ が } \nabla\text{-affine}$$

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \nabla_i, \nabla_{p,g}, \quad \left(\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i} \right)$$

$$\overline{\Phi}_{p,g}^{(0)} \left((\partial_i)_p \right) = (\partial_i)_g$$

$$\Leftrightarrow \nabla_i, \partial_i \text{ は } \nabla\text{-平行なベクトル場}$$

$$\circ \text{接続 } \nabla \text{ が平坦 (flat)}$$

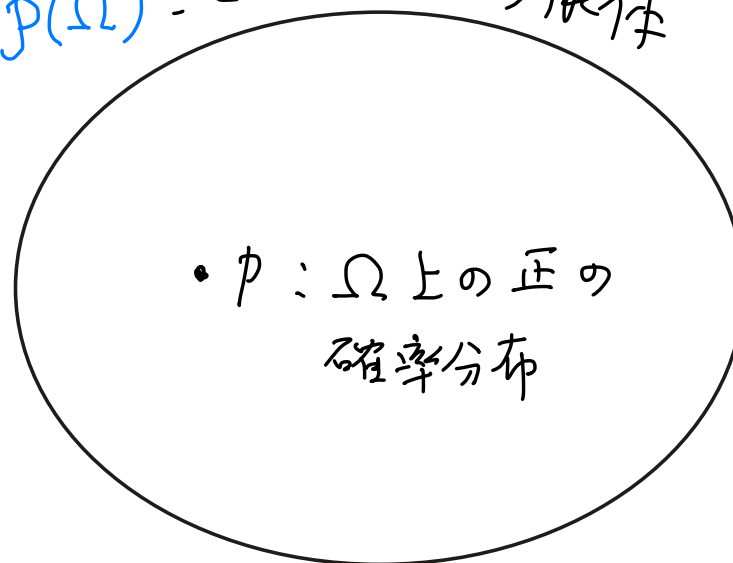
$$\Leftrightarrow \nabla\text{-affine 座標系が存在する,}$$

$$\Leftrightarrow \nabla \text{ は曲率ゼロかつ捩率ゼロ} \\ \text{curvature-free and torsion-free}$$

2.2 確率分布空間の情報幾何構造

Given Ω : 有限集合 s.t.
 $m := |\Omega| \geq 2$

$\mathcal{P}(\Omega)$: $(m-1)$ 次元多様体



$$p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall \omega, p(\omega) > 0 \wedge \sum_{\omega} p(\omega) = 1$$

◦ $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\Omega)$ は、特に重要な一つの
リーマン計量と二つの平坦接続を持つ。

- $\mathcal{P}$ の (大域) 座標系 $\xi = (\xi^i) : p \mapsto \xi(p) \in \mathbb{R}^n$ ($n = \dim \mathcal{P}$) は $\mathcal{P}$ の parametrization $\mathcal{P} = \{p_\xi\}$ と同等。
- 以下のように略記する。 ($\omega \in \Omega$)

$$\partial_i p(\omega) := \left(\frac{\partial}{\partial \xi^i} p_\xi(\omega) \right)_{p_\xi=p}, \quad \partial_i \log p(\omega) := \left(\frac{\partial}{\partial \xi^i} \log p_\xi(\omega) \right)_{p_\xi=p}.$$

$\partial_i \partial_j p(\omega), \partial_i \partial_j \log p(\omega)$ も同様。

- フィッシャー計量 Fisher metric g :

$$\begin{aligned} g_{ij}(p) &:= g_p((\partial_i)_p, (\partial_j)_p) \\ &= \sum_{\omega} p(\omega) \partial_i \log p(\omega) \partial_j \log p(\omega) = E_p[(\partial_i \log p)(\partial_j \log p)] \\ &= \sum_{\omega} \frac{1}{p(\omega)} \partial_i p(\omega) \partial_j p(\omega) = \sum_{\omega} \partial_i p(\omega) \partial_j \log p(\omega). \end{aligned}$$

- e-接続 e-connection $\nabla^{(e)}$:

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij,k}^{(e)}(p) &:= g_p((\nabla_{\partial_i}^{(e)} \partial_j)_p, (\partial_k)_p) \\ &= E_p[(\partial_i \partial_j \log p)(\partial_k \log p)] = \sum_{\omega} \partial_i \partial_j \log p(\omega) \partial_k p(\omega).\end{aligned}$$

- m-接続 m-connection $\nabla^{(m)}$:

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij,k}^{(m)}(p) &:= g_p((\nabla_{\partial_i}^{(m)} \partial_j)_p, (\partial_k)_p) \\ &= \Gamma_{ij,k}^{(e)}(p) + E_p(\partial_i \log p)(\partial_j \log p)(\partial_k \log p) \\ &= \sum_{\omega} \partial_i \partial_j p(\omega) \partial_k \log p(\omega).\end{aligned}$$

- 双対性 duality :

$$\partial_i g_{jk} = \Gamma_{ij,k}^{(e)} + \Gamma_{ik,j}^{(m)}.$$

一般に、接続 ∇ と ∇^* が計量 g に関して双対 dual であるとは、

$$\partial_i g_{jk} = \Gamma_{ij,k} + \Gamma_{ik,j}^*.$$

- $\mathcal{P}$ 上の e, m-接続はともに平坦 flat ($\Leftrightarrow$ curvature-free and torsion-free)
 $\Rightarrow (\mathcal{P}, g, \nabla^{(e)}, \nabla^{(m)})$ は双対平坦空間 (dually flat space)
- 接ベクトル X_p の e, m-表現 $X_p^{(e)}, X_p^{(m)}$:

$$(\partial_i)_p^{(e)} = \partial_i \log p : \omega \mapsto \partial_i \log p(\omega),$$

$$(\partial_i)_p^{(m)} = \partial_i p : \omega \mapsto \partial_i p(\omega),$$

- 接ベクトルの e, m-平行移動 :

$$\left(\Phi_{p,q}^{(e)}(X_p) \right)^{(e)} = X_p^{(e)} - E_q[X_p^{(e)}],$$

$$\left(\Phi_{p,q}^{(m)}(X_p) \right)^{(m)} = X_p^{(m)}$$

- 双対性 in terms of 平行移動

$$g_p(X_p, Y_p) = g_q(\Phi_{p,q}^{(e)}(X_p), \Phi_{p,q}^{(m)}(Y_p))$$

2.3 Canonical Divergence

- 一般に、双対平坦空間 (M, g, ∇, ∇^*) において、正値性

$$\forall p, q \in M, D(p\|q) \geq 0, \text{ and } D(p\|q) = 0 \Leftrightarrow p = q$$

および三点関係式

$$\forall p, q, r \in M, D(p\|q) + D(q\|r) - D(p\|r) = \{\eta(p) - \eta(q)\} \cdot \{\theta(r) - \theta(q)\}$$

を満たす 2 変数関数 $D : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ が一意に存在する。ここで $\theta = (\theta^i)$, $\eta = (\eta_i)$ はそれぞれ ∇ -affine, ∇^* -affine な座標系であり、

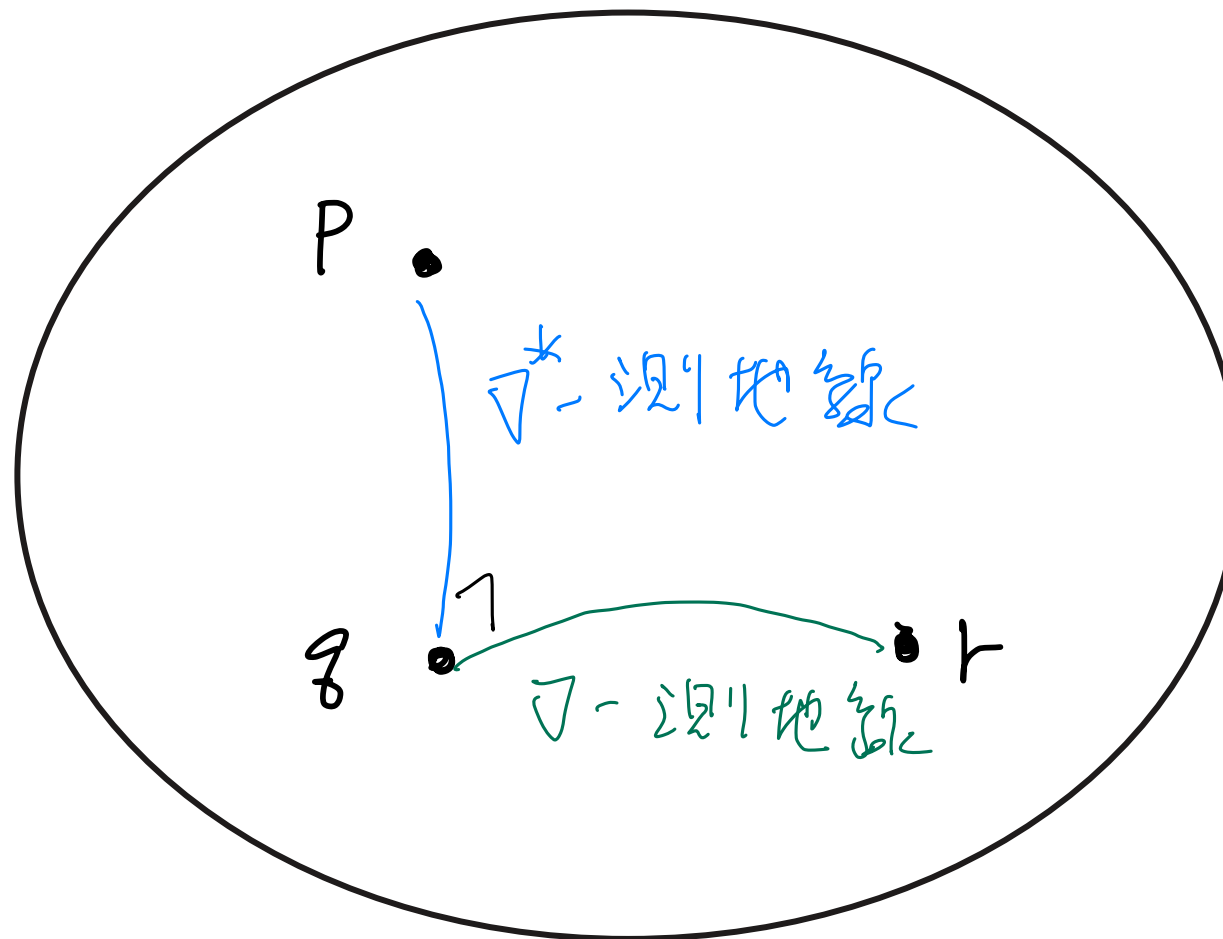
$$\forall i, j, \partial_i \eta_j = g(\partial_i, \partial_j), \quad \partial_i := \frac{\partial}{\partial \theta^i}$$

を満たすように取る（常にとれる）。この D を (M, g, ∇, ∇^*) の標準ダイバージェンス canonical divergence と呼ぶ。

- 三点関係式から

$$\begin{aligned}\forall p, q, r \in M, \{ \eta(p) - \eta(q) \} \cdot \{ \theta(r) - \theta(q) \} &= 0 \\ \Rightarrow D(p\|r) &= D(p\|q) + D(q\|r)\end{aligned}$$

が導かれる。この性質はユークリッド空間のピタゴラスの定理の一般化と見なせる。



- 確率分布空間 $(\mathcal{P}(\Omega), g, \nabla^{(e)}, \nabla^{(m)})$ の canonical divergence は KL-divergence (相対エントロピー)

$$D(p\|q) = \sum_{\omega} p(\omega) \log \frac{p(\omega)}{q(\omega)}$$

である。この場合の三点関係式は

$$\forall p, q, r \in \mathcal{P},$$

$$D(p\|q) + D(q\|r) - D(p\|r) = \sum_{\omega} \{p(\omega) - q(\omega)\} \cdot \{\log r(\omega) - \log q(\omega)\}$$

と同値である。

すなわち、KL-divergence は正值性とその関係式によって特徴付けられる。

§3. 情報スペクトルとは

3 情報スペクトルとは

3.1 簡単な例から

- $X_1, \dots, X_n$ を確率分布 $p = p_1$ にしたがう i.i.d. (independent and identically distributed) 確率変数列 (定常無記憶情報源) とする。 $X^n := (X_1, \dots, X_n)$ の (同時) 確率分布を p_n とおくと、

$$p_n(x_1, \dots, x_n) = p(x_1) \cdots p(x_n)$$

が成り立つから、大数の (弱) 法則により $n \rightarrow \infty$ において確率収束の意味で

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n} \log p_n(X^n) &= -\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \log p(X_t) \\ &\rightarrow E_p[-\log p] = H(p) : \text{Shannon entropy} \end{aligned}$$

が成り立つ。i.i.d. から定常エルゴードに拡張しても、entropy を entropy rate に置き換えれば同様な収束が成り立つことが知られている (Shannon-McMillan-Breiman の定理)。

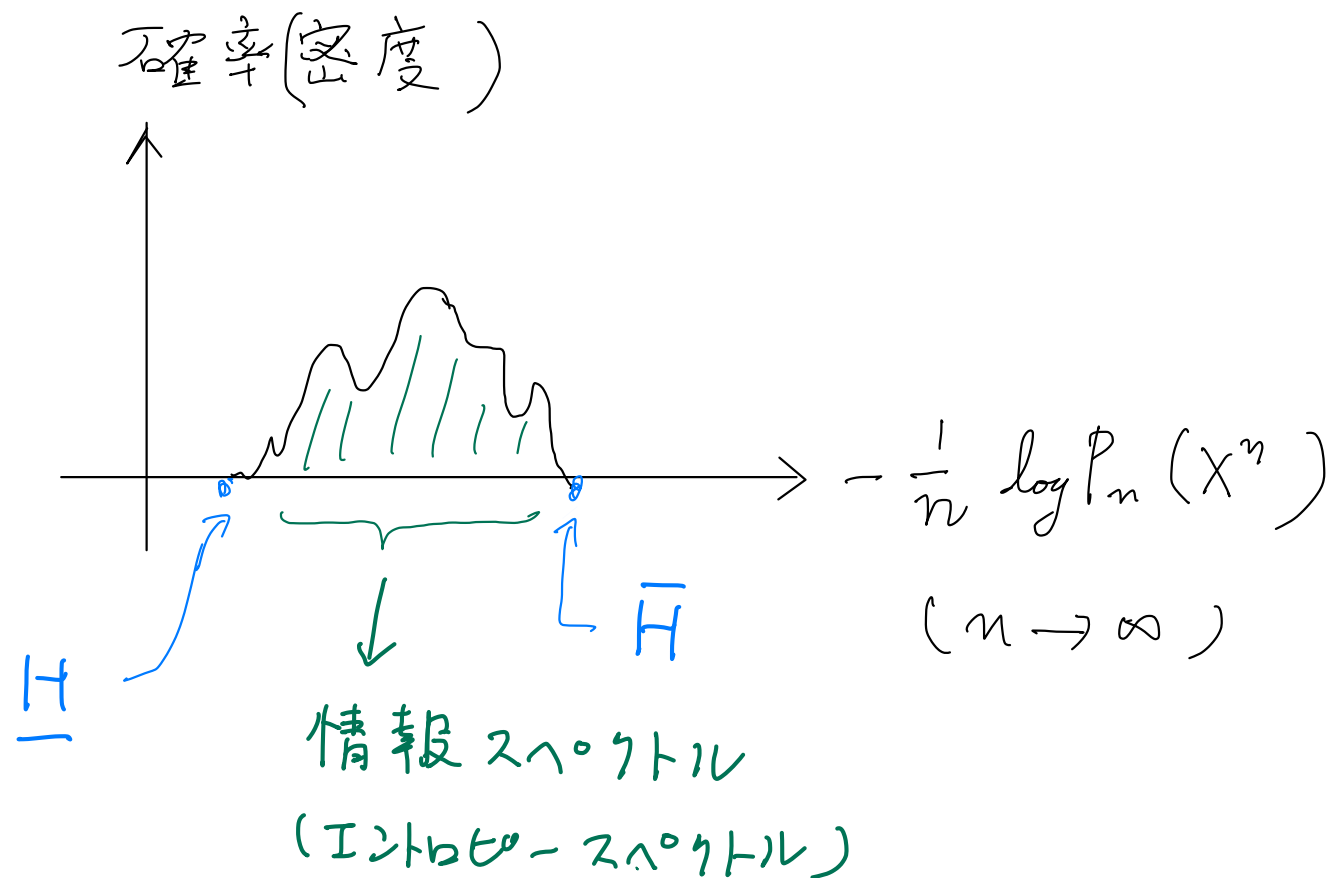
- 一方、 $H(p)$ は確率分布 p_n にしたがうデータ列の長さをどこまで無歪で（あるいは限りなく無歪に近く）圧縮できるかという「データ圧縮問題」の解を与える。この定理は定常エルゴード情報源まで拡張される。
- 同時分布の列 $\{p_n\}$ に i.i.d. や定常無記憶性などの仮定を一切おかないとき、 p_n にしたがうデータ列の圧縮限界について何も言えないかというと、そうではない。確率変数列

$$-\frac{1}{n} \log p_n(X^n), \quad n = 1, 2, \dots$$

の分布の $n \rightarrow \infty$ における挙動（情報スペクトル information-spectrum の一例）に注目することによって、データ圧縮に関するさまざま一般的定理が得られる。
例えば、限りなく無歪に近い圧縮を行ったときの圧縮レートの限界は

$$\begin{aligned} \overline{H} &:= \text{p-lim sup}_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log p_n(X^n) \\ &= \inf \left\{ a \in \mathbb{R} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Prob} \left[-\frac{1}{n} \log p_n(X^n) > a \right] = 0 \right\} \end{aligned}$$

という量で与えられる。ここで $\overline{H}$ は一般化情報源 $\{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ の「エントロピースペクトル上限」、 p-lim sup は確率変数列の「確率的上極限」と呼ばれ、「常に」存在する。



Th. $\bar{H} = \underline{H} \Leftrightarrow$ 強逆性 (strong converse) が成立.

3.2 幕開け

- 最初は Te Sun Han (韓 太舜) と Sergio Verdú の次の論文
 - T.S. Han and S. Verdú, “Approximation theory of output statistics,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.39, no.3, pp.752-772, 1993.
 - S. Verdú and T.S. Han : “A general formula for channel capacity,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.40, no.4, pp.1147-1157, 1994.

Remark. 韓はそれ以前から情報理論 (Shannon Theory) の大家

- 大著：
韓 太舜「情報理論における情報スペクトル的方法」, 培風館, 1998.
- その英訳増補版：
Te Sun Han: Information-Spectrum Methods in Information Theory, Springer, 2003.

3.3 2000年の文章から

一方に、通信路符号化、データ圧縮、仮説検定などにおける符号化や受容域の漸近的最適化を通して定義される**操作的な量 A** があり、他方に、エントロピー、ダイバージェンス、相互情報量などの**情報量 C** がある。

これら異種の量の間の関係を求めることは、**情報理論における主要テーマ**の一つである。ここではその関係を等号に限って考えることにしよう。

$$A \text{ (操作的な量)} = C \text{ (情報量)}$$

Han-Verdú に創まる「情報スペクトル的方法」は、これらの量の中に情報スペクトルと呼ばれる概念を意識的に介在させるところにその特徴がある。

$$A = B \text{ (情報スペクトルの量)} = C$$

ここで「意識的」とわざわざ述べたのは、従来の $A = C$ 型定理の証明の中にも、多くの場合、情報スペクトル自体は陽に陰に姿を現しているからである。しかし、それを意識的に実行し、さらには **$A = B$ 自体を目的化することによって**、情報理論全体の風景が大きく変化する。

出典：長岡浩司「情報スペクトル的方法についてー 古典および量子情報理論におけるその役割 ー」電子情報通信学会情報理論研究会 (IT), 技術研究報告, IT2000- 33,

pp.7-12 (2000). (その冒頭の文章)

両者は対極的

例えば、相対エントロピー $D(p\|q)$ をどう見るか。

- 情報幾何では：

- $(g, \nabla^{(e)}, \nabla^{(m)})$: 各点における infinitesimal な概念 $\longleftrightarrow D$: 遠隔的概念
- 三点関係式, 拡張ピタゴラスの定理

- 情報スペクトルでは：

- 二つの分布列 $\{p_n\}, \{q_n\}$ が与えられたとき、 p_n にしたがう確率変数 X_n に対する

$$\frac{1}{n} \log \frac{p_n(X^n)}{q_n(Y^n)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

の $n \rightarrow \infty$ での漸近的挙動 (divergence spectrum)

- 二つの確率分布列に関する仮設検定問題の最も一般的な諸結果を導く。
(Stein の補題、Hoeffding の定理など)

§4. 量子情報幾何について

4 量子情報幾何について

4.1 量子状態空間の情報幾何構造

- $\mathcal{H}$: 有限次元ヒルベルト空間
- $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{H})$: $\mathcal{H}$ 上の strictly positive density operators の全体
- $\mathcal{S}$ 上の情報幾何構造 $(g, \nabla^{(e)}, \nabla^{(m)})$:
 - g : 任意の単調計量 monotone metric (by D. Petz)
 - $\nabla^{(m)}$: $\mathcal{S} \subset \{A \mid A = A^* \text{ and } \text{tr} A = 1\}$ から自然に導かれる平坦接続
 - $\nabla^{(e)}$ は g に関する $\nabla^{(m)}$ の双対接続
- $\nabla^{(e)}$ は curvature-free だが一般には nonzero torsion を持つ。
- 単調計量 g は無数にあるから $\nabla^{(e)}$ も $(g, \nabla^{(e)}, \nabla^{(m)})$ も無数にある。

- その中で $\nabla^{(e)}$ が torsion-free になる構造は一つしかない :

$$\begin{aligned}\nabla^{(e)} \text{ は torsion-free} &\Leftrightarrow (\mathcal{S}, g, \nabla^{(e)}, \nabla^{(m)}) \text{ は双対平坦} \\ &\Leftrightarrow g \text{ は BKM 計量}\end{aligned}$$

$$g_{ij}(\rho) = \int_0^1 \text{tr} [\rho^t (\partial_i \log \rho) \rho^{1-t} (\partial_j \log \rho)] dt$$

$$\text{cf. フィッシャー計量: } g_{ij}(p) = \sum_{\omega} p(\omega) (\partial_i \log p(\omega)) (\partial_j \log p(\omega))$$

- その canonical divergence は量子相対エントロピー :

$$D(\rho \parallel \sigma) = \text{tr} [\rho (\log \rho - \log \sigma)]$$

- SLD 計量 :

$$g_{ij}(\rho) = \text{Re tr} [\rho L_{i,\rho} L_{j\rho}]$$

where

$$\partial_i \rho = \frac{1}{2} (\rho L_{i,\rho} + L_{i,\rho} \rho)$$

- SLD 構造 $(g, \nabla^{(e)}, \nabla^{(m)})$ は量子推定理論で重要
(だが、古典系の $(g, \nabla^{(e)}, \nabla^{(m)})$ に比べると非力)

4.2 SLD e-自己平行性の推定理論的特徴付

Theorem (Nagaoka-Fujiwara, arxiv 2307.03431) n -次元部分多様体 $M \subset \mathcal{S}$ とその座標系 $\xi = (\xi^i)$ に対し、次の (i), (ii), (iii) は互いに同値。

- (i) M は e-自己平行 in $\mathcal{S}$ であり、 ξ は m-affine 座標系.
- (ii) $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \exists \{\Pi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ s.t.
 - (a) $\forall \varepsilon > 0$, Π_ε は 座標系 ξ の不偏推定量: $\forall \rho \in M, E_\rho[\Pi_\varepsilon] = \xi(\rho)$.
 - (b) $\forall \rho \in M, \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbf{u}^T V_\rho[\Pi_\varepsilon] \mathbf{u} = \mathbf{u}^T G_\rho^{-1} \mathbf{u}$.
- (iii) $\exists (\Lambda^1, \dots, \Lambda^n), \forall i \in \{1, \dots, n\}$,
 - (a) Λ^i は座標関数 ξ^i の不偏推定量: $\forall \rho \in M, E_\rho[\Lambda^i] = \xi^i(\rho)$.
 - (b) $\forall \rho \in M, V_\rho[\Lambda^i] = g^{ii}(\rho)$.

ただし、

◇ M が $\mathcal{S}$ において e-自己平行 (e-autoparallel) であるとは：

$$\forall \rho, \sigma \in M, \Phi_{\rho, \sigma}^{(e)}(T_\rho(M)) = T_\sigma(M)$$

◇ E_ρ : 期待値, V_ρ : 分散 (分散行列)

◇ $G = [g_{ij}]$: SLD フィッシャー情報行列 s.t. $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial \xi^i}, \frac{\partial}{\partial \xi^j})$.

◇ $G^{-1} = [g^{ij}]$.

Remarks

- 推定量 Π_ϵ および Λ^i は POVM で表される。
- 一般に、次の SLD クラメル・ラオ不等式が成り立つ：
 - Π が ξ の不偏推定量 $\Rightarrow \forall \rho \in M, V_\rho[\Pi] \geq G_\rho^{-1}$.
 - Λ が ξ^i の不偏推定量 $\Rightarrow \forall \rho \in M, V_\rho[\Lambda] \geq g^{ii}(\rho)$.
- この定理の古典対応物は次の (i) と (ii) の同値性：
 - (i) M は指数型分布族であり、 ξ はその期待値座標系。
 - (ii) 座標系 ξ に関する有効推定量 efficient estimator (すべての点でクラメル・ラオ限界を達成する不偏推定量) が存在する。
- 量子の場合の条件 (ii) を次の (ii)' (有効推定量の存在) に置き換えることはできない。(置き換えた条件は (i) よりも強くなる。)
- (ii)' $\exists \Pi$ s.t.
 - (a) Π は ξ の不偏推定量; $\forall \rho \in M, E_\rho[\Pi] = \xi(\rho)$.
 - (b) $\forall \rho \in M, V_\rho[\Pi] = G_\rho^{-1}$.

- 条件 (ii) の n 個の推定量 $\Lambda^1, \dots, \Lambda^n$ は、一般に同時測定可能ではない。

§5. 量子情報スペクトルについて

5 量子情報スペクトルについて

- 古典系の情報スペクトルの代表例として、二つの分布列 $\vec{p} = \{p_n\}$, $\vec{q} = \{q_n\}$ のダイバージェンススペクトルを考える。これは

$$X^n \sim p_n \text{ のもとでの } \frac{1}{n} \log \frac{p_n(X^n)}{q_n(X^n)} \text{ の分布}$$

の $n \rightarrow \infty$ における漸近的挙動であった。→ 量子系への拡張は？

- 累積分布関数は次のように表される：

$$\begin{aligned} F_{p_n, q_n}(a) &:= \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{p_n(X^n)}{q_n(X^n)} < a \right\} \\ &= \Pr \left\{ p_n(X^n) - e^{na} q_n(X^n) < 0 \right\} \\ &= \sum_{x^n} p_n(x^n) 1_{\{p_n(x^n) - e^{na} q_n(x^n) < 0\}} \end{aligned}$$

- そこで、量子状態列 $\vec{\rho} = \{\rho_n\}$, $\vec{\sigma} = \{\sigma_n\}$ に対し

$$F_{\rho_n, \sigma_n}(a) := \text{tr}[\rho_n \{\rho - e^{na} \sigma_n\}_-]$$

の $n \rightarrow \infty$ における漸近的挙動を情報スペクトルの量子対応物と考えることにする。
 ただし、一般にエルミート作用素 A に対し、その固有値分解が $A = \sum_i \lambda_i |e_n\rangle \langle e_n|$ と表されるとき、

$$\{A\}_- := \sum_{i: \lambda_i < 0} |e_n\rangle \langle e_n|$$

と定義する。

- この考え方によって、量子情報理論におけるさまざまな問題が一般的に「解ける」。
 (ここは「・」が必要)

- 例えば、古典系の上下ダイバージェンススペクトルレート

$$\begin{aligned}\overline{D}(\vec{p}||\vec{q}) &= \mathbf{p}\text{-}\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{p_n(X^n)}{q_n(X^n)} \\ &= \inf\{a \mid \lim_{n \rightarrow \infty} F_{p_n, q_n}(a) = 1\}\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}\underline{D}(\vec{p}||\vec{q}) &= \mathbf{p}\text{-}\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{p_n(X^n)}{q_n(X^n)} \\ &= \sup\{a \mid \lim_{n \rightarrow \infty} F_{p_n, q_n}(a) = 0\}\end{aligned}$$

の量子対応物として

$$\overline{D}(\vec{\rho}||\vec{\sigma}) = \inf\{a \mid \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\rho_n, \sigma_n}(a) = 1\}$$

および

$$\underline{D}(\vec{\rho}||\vec{\sigma}) = \sup\{a \mid \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\rho_n, \sigma_n}(a) = 0\}$$

を考えることによって、 $\vec{\rho}$ vs $\vec{\sigma}$ の仮設検定に関する一連の Stein の補題型定理が表せる (Nagaoka-Hayashi 2007)。

- 特に i.i.d. 状態列 $\rho_n = \rho^{\otimes n}$, $\sigma_n = \sigma^{\otimes n}$ の場合には

$$\overline{D}(\vec{\rho}||\vec{\sigma}) = \underline{D}(\vec{\rho}||\vec{\sigma}) = D(\rho||\sigma)$$

が成り立つ。これは i.i.d. 列に関する Stein の補題 (Hiai-Petz 1991, Ogawa-Nagaoka 2000) と同等である。

- Verdú-Han による通信路符号化の一般的定理もこの考え方によって量子系に拡張される。(Hayashi-Nagaoka 2003)
- なぜこの考え方でこんなにうまくいくかという理由は、量子 Neyman-Pearson 補題 (C. W. Helstrom) に求めることができる。

主催者からは今後の展望にも触れて下さいと言われているが、 しかし・・・

- 情報幾何については
 - 舞台となる空間を何に取ったらおもしろいか
 - 量子操作のもとでの不変性は重い
 - 数学の中だけで閉じない議論ができるか
 - 微分幾何構造として何（計量や接続に留まらず）を考えるべきか
 - 遠隔的な概念がinfinitesimal な概念から定まるような状況があるか
 - 複素構造は避けて通れないと思われる
- 情報スペクトルについては
 - 本来の意味での（ボルツマン的な）「統計力学」との関係は気になる（確率収束的極限の一般性。期待値でもなく、概収束でもなく）
- 二つの世界の接点

情報幾何と情報スペクトルは対極的だが、しかし・・・

- 両先生は同じ文化圏：東大工学部・計数工学科・数理工学
- 私もその文化の影響下にあるはず
- 物理学（者）でもなく、数学（者）でもない

→ 私の量子力学へのアプローチの仕方を特徴づけたはず

§6. 量子情報（理論）の黎明

6 量子情報（理論）の黎明

6.1 私が「量子」に参入した頃（1986年～）の状況

- 書籍

- 梅垣 壽春、大矢 雅則「量子論的エントロピー」、共立出版 1984.
- 広田修「光通信理論 — 量子論的基礎 —」、森北出版, 1985.

cf.

- 渡辺慧「知識と推測」
- ブリルアン「科学と情報理論」（訳：佐藤洋）、みすず書房
- 日経サイエンス 1992年12月号「量子暗号」

- 人（敬称略）

- 大矢雅則、広田修、日合文雄、小嶋泉、上田正仁、etc.
- 主に京大・数理解析研の研究会で知り合う。

- パラダイムの壁 (vs 物理／数学)

- 有限次元ヒルベルト空間の量子力学なんて・・・
- どういう物理系（現象）を考えているのか
- そんな状態 and/or 相互作用は存在しない
- 推定？ 何のために？ 通信？ それは工学でしょ
- $\rho \otimes \cdots \otimes \rho$ やその漸近的性質は意味があるか。粒子の識別不可能性は？

→ 操作的 operational , 最適性 optimal にもとづいた一般的な問題設定は「量子」ではまだマイナーだった（少なくとも我が国では）。

- 個人的には「工学」(vs 理学) にアンビバレントな思いもあった。

→ 「数理科学」という言葉に惹かれた。

6.2 「数理科学」について

- 「数理科学」のイメージ
 - 時代は1930年代を中心に前後10～20年ぐらい
 - フィッシャー、ゲーデル、チューリング、フォンノイマン、シャノン、・・・
 - 理学でも工学でもなく、数学でも物理学でもない。しかしいずれでもある。
- 「情報」 information がキーワードの一つ
- 「数理工学」は少し違うが、大きな流れとしては共通していた。

6.3 量子情報誕生と「数理科学」

理論（説明／理解／発見／飛躍）

実験（発見／検証／実現）

1900 Planck 量子仮説

前期量子論 Einstein, Bohr, de Broglie

1925-26 量子力学誕生

Heisenberg, Schrödinger

1935 EPR Paradox (Einstein et al.)

量子力学は完全か？

→ エンタングル状態の奇妙さ

1965 Bellの不等式

実在は局所的か？

黒体輻射

1982 Aspect et al. の実験

理論 (説明／理解／発見／飛躍)

実験 (発見／検証／実現)

1900 Planck 量子仮説

前期量子論 Einstein, Bohr, de Broglie

1925-26 量子力学誕生

Heisenberg, Schrödinger

1935 EPR Paradox (Einstein et al.)

量子力学は完全か？

→ エンタングル状態の奇妙さ

1965 Bellの不等式

実在は局所的か？

1984 Bennet & Brassard 量子暗号

1993 Bennet et al. 量子テレポーテーション

1994 Shor 量子計算

1996-7 Holevo, Schumacher, Westmoreland
量子通信路符号化定理

黒体輻射



1982 Aspect et al. の実験



1990年代半ば以降の急速な発展



現在に至る

数理学・数理工学？

理論（説明／理解／発見／飛躍）

実験（発見／検証／実現）

1920年代 Fisher 推測統計学

1930年代

von Neumann

量子力学の数学的基礎, 作用素環

Godel, Turing, Church

計算可能性

1948 Shannon 情報理論

量子状態推定

「計算」への物理学アプローチ Feynmann, Deutsch, Jozsa

1984 Bennet & Brassard 量子暗号

1993 Bennet et al. 量子テレポーテーション

1994 Shor 量子計算

1996-7 Holevo, Schumacher, Westmoreland
量子通信路符号化定理

1900 Planck 量子仮説

前期量子論 Einstein, Bohr, de Broglie

1925-26 量子力学誕生

Heisenberg, Schrödinger

1935 EPR Paradox (Einstein et al.)

量子力学は完全か？

→ エンタングル状態の奇妙さ

1965 Bellの不等式

実在は局所的か？

黒体輻射



1990年代半ば以降の急速な発展

現在に至る

§7. 知られざる偉人

7 知られざる偉人

近藤一夫 1911-2001

- 甘利、韓両先生の指導教官
- 東大・数理工学の生みの親の一人
- 強烈かつ人間味あふれる人だったらしい。
- 多くの研究者を育てた。その人たちが次代にも影響を伝えた。
- きわめて興味深い人物。NHK辺りが特集してくれないものか。

こぼれ話 1 近藤一夫小伝

脱線ではあるが、稀代の傑物、近藤一夫について私の知る限りのことを述べておきたい。先輩から聞いた話も多く、詳しい事実は定かでないが、私を学問の道に導いてくれた偉大な恩師であり、その波乱に満ちた人生を記したいのである。

近藤一夫は明治末期の 1911 年に神主の家に生まれ、1934 年に東京帝国大学工学部航空学科を卒業した。東京帝大航空学研究所に勤務した後、九州帝国大学工学部に航空学科が新設されるや否や、講師として招^{しょうへい}聘され、すぐに助教授に昇進した。それまでに、プロペラに関する空気力学のポテンシャル論的研究など、翼理論の空気力学の研究で名を上げていた。近藤の理論はゲッチンゲン大学の風洞の設計に用いられたという。

数年して、名古屋帝国大学に航空学科が新設されることになり、そこへ招聘され、31 歳で教授に昇進する。異例の若さと言えるが、発展しつつある航空学としては、人材が見あたらなかったからでもあろう。31 歳での帝国大学教授であり、学位はまだ取っていなかった。当時は学位は自分の研究の集大成であり、40 歳を過ぎて教授になる頃に取りるのが普通であった。学位論文を書き上げて名古屋帝大の教授のところへ提出したところ、お前はまだ若過ぎる、内容はこれでよいので、このまま私の机の引き出しに入れて、数年あずかておくと言われたそうである。

戦争の状況は悪化し、名古屋帝大の航空教室も木曾岳の麓の王滝村に疎開し、そこで研

1. わが学問の師

近藤一夫先生



韓先生の電通大・最終講義のスライドより

感謝を込めて



2023年10月21日 電気通信大学にて

ご清聴ありがとうございました。