

量子測定理論：
拡張定理，反復可能性，および
Wigner–Araki–Yanase 定理

倉持 結

九州大学システム情報科学研究院

2026 年 8 月 3 日

このチュートリアルで扱う範囲

- ▶ 無限次元 Hilbert 空間上の量子系を許し、有限出力だけでなく、一般の可測空間を標本空間とする連続出力測定を扱う。
- ▶ 主題は、POVM とインストゥルメント、それらの拡張定理、反復可能性、および Wigner–Araki–Yanase (WAY) 定理である。
- ▶ 測度論・作用素環・非有界作用素を短時間で用いるため、数学的事実は明確に述べ、証明は要点と参照先に絞る。測度論に不慣れな方には難しい箇所があることをご容赦いただきたい。
- ▶ 不確定性関係は、講演時間に加え、講演者の専門から少し外れるため割愛する。

1. **POVM**：古典的输出，可測空間，作用素値測度，量子光学の例，標準 Borel 化．
2. **CP 写像と拡張定理**：Stinespring, Naimark, GNS, purification, Kraus 表現，系－環境モデル．
3. **インストゥルメント**：測定モデル，小澤の拡張定理，反復可能性と離散性．
4. **WAY 定理**：非有界保存量と Yanase 条件，乗法域を用いる証明，反復可能測定版．

- ▶ P. Busch, P. Lahti, J.-P. Pellonpää, K. Ylinen, *Quantum Measurement*, Springer, 2016.
- ▶ E. B. Davies, *Quantum Theory of Open Systems*, Academic Press, 1976.
- ▶ T. Heinosaari, M. Ziman, *The Mathematical Language of Quantum Theory: From Uncertainty to Entanglement*, Cambridge University Press, 2012.

第1部：POVM

量子状態から古典的な確率分布へ

測定は「量子系から古典系へのチャンネル」である

量子測定の最初の出力は、状態 ρ に応じた確率分布である：

$$\rho \in \mathbf{S}(\mathcal{H}) \quad \longmapsto \quad P_\rho \in \mathcal{P}(\Omega, \Sigma)$$

混合の仕方を忘れないという物理的要請は、この写像のアフィン性

$$P_{t\rho+(1-t)\sigma} = tP_\rho + (1-t)P_\sigma \quad (0 \leq t \leq 1)$$

として表される．このアフィン写像を作用素で表現したものが POVM である．

その前に、出力側の「古典系」とは何かを、情報の複製可能性から眺める．

古典系とは「記録を共有できる系」である

一般化確率論 (GPT) では、古典性を「状態の分解が一意」「測定が両立」「情報を broadcast できる」といった操作的性質で捉えられる。

no-broadcasting から見た古典性

GPT では、一つの固定した broadcasting map がすべての状態を broadcast できることと、状態空間が simplex であることが同値である。

出典：Clifton–Bub–Halvorson, Found. Phys. 33, 1561 (2003) ; Barnum–Barrett–Leifer–Wilce, PRL 99, 240501 (2007)。

Bohr は、実験装置と観測結果の記述について

“the account of all evidence must be expressed in classical terms”

と述べた。すなわち、何を行い何を学んだかを他者へ曖昧なく伝えるには、古典物理の言葉による記録が必要である。

無制限に複製・共有できる古典情報という数学的特徴づけは、この要請の操作的な厳密化の一つと見なせる。

出典：N. Bohr, “Discussion with Einstein on Epistemological Problems in Atomic Physics”, in *Albert Einstein: Philosopher–Scientist*, p. 209 (1949)。

可測空間：どの事象に確率を割り当てるか

集合 Ω の部分集合族 $\Sigma \subseteq 2^\Omega$ が σ 代数であるとは,

1. $\Omega \in \Sigma$,
2. $X \in \Sigma \Rightarrow \Omega \setminus X \in \Sigma$,
3. $X_1, X_2, \dots \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \in \Sigma$

を満たすことをいう. (Ω, Σ) を可測空間, $X \in \Sigma$ を事象と呼ぶ.

写像 $f : (\Omega, \Sigma) \rightarrow (\Omega', \Sigma')$ が可測であるとは, $f^{-1}(Y) \in \Sigma$ が任意の $Y \in \Sigma'$ について成り立つことである.

なぜ冪集合 2^Ω だけでは足りないのか

- ▶ 有限・可算な Ω では、通常 $\Sigma = 2^\Omega$ として問題ない。
- ▶ $\Omega = \mathbb{R}$ で区間の長さとは両立する平行移動不変・可算加法的な測度を求めると、すべての部分集合へ値を割り当てることはできない (Vitali 型の非可測集合)。
- ▶ 実験で問う事象は、区間、その可算和・補集合、極限操作から生成されるものが中心である。そこで開集合から生成される **Borel σ 代数** $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ を用いる。
- ▶ σ 代数は「確率を矛盾なく定義でき、かつ可算回の論理操作で閉じた事象の言語」である。

出典：任意の標準的な測度論の教科書。例えば Billingsley, *Probability and Measure*, Ch. 2.

$\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ が**測度**であるとは, $\mu(\emptyset) = 0$ かつ, 互いに素な $(X_n)_n \subseteq \Sigma$ に対して

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X_n)$$

が成り立つことをいう. $\mu(\Omega) = 1$ なら**確率測度**である.

例として実数値測定の正規分布は

$$\mu(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_X \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx, \quad X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

で与えられる.

作用素の三つの空間

複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ について,

$$\mathbf{B}(\mathcal{H}) := \{\mathcal{H}\text{上の有界線形作用素}\},$$

$$\mathbf{T}(\mathcal{H}) := \left\{ T \in \mathbf{B}(\mathcal{H}) : \|T\|_1 := \mathrm{Tr}[\sqrt{T^*T}] < \infty \right\},$$

$$\mathbf{S}(\mathcal{H}) := \{\rho \in \mathbf{T}(\mathcal{H}) : \rho \geq 0, \mathrm{Tr}[\rho] = 1\}$$

$\mathbf{T}(\mathcal{H})$ をトレースクラス作用素, $\mathbf{S}(\mathcal{H})$ を密度作用素の集合と呼ぶ. 密度作用素が量子系の状態に対応する.

正規直交基底 $(e_j)_j$ を用いると, $T \in \mathbf{T}(\mathcal{H})$ のトレースは

$$\mathrm{Tr}[T] = \sum_j \langle e_j | T e_j \rangle$$

で定義され, 値は基底に依らない.

出典: Davies, *Quantum Theory of Open Systems*, Ch. 2 ; Heinosaari–Ziman, Ch. 2.

$\mathbf{T}(\mathcal{H})^* = \mathbf{B}(\mathcal{H})$ の正確な意味

任意の $A \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ は、トレース対合

$$\ell_A : \mathbf{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C} \quad \ell_A(T) = \mathrm{Tr}[TA]$$

により有界線形汎関数を定める．逆に， $\mathbf{T}(\mathcal{H})$ 上の任意の有界線形汎関数はこの形に一意に書け，

$$\|\ell_A\| = \|A\|$$

したがって，**等長同型として** $\mathbf{T}(\mathcal{H})^* \cong \mathbf{B}(\mathcal{H})$ である．

注意：無限次元では $\mathbf{B}(\mathcal{H})^*$ は $\mathbf{T}(\mathcal{H})$ より大きい．正しい逆向きの主張は， $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ の**前双対**が $\mathbf{T}(\mathcal{H})$ であり，超弱連続な汎関数だけがトレース対合で表される，というものである．

合成系は Hilbert 空間のテンソル積で表す

系 A と B の Hilbert 空間が $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$ なら，合成系は

$$\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

で表す．積状態と局所観測量は

$$\rho_A \otimes \rho_B, \quad A \otimes \mathbb{1}_B, \quad \mathbb{1}_A \otimes B$$

となる．部分トレースは

$$\mathrm{Tr}[\rho_{AB}(A \otimes \mathbb{1}_B)] = \mathrm{Tr}[(\mathrm{Tr}_B \rho_{AB})A]$$

により特徴づけられる．一般に $\rho_{AB} \neq \rho_A \otimes \rho_B$ であり，これが相関・量子もつれを許す．

定義

可測空間 (Ω, Σ) を標本空間とする Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の POVM とは、写像

$$M : \Sigma \rightarrow \mathbf{B}(\mathcal{H})$$

で、次を満たすものである：

1. $M(X) \geq 0$ ($X \in \Sigma$),
2. $M(\Omega) = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$,
3. 互いに素な $(X_n)_n$ に対し $M(\bigcup_n X_n) = \sum_n M(X_n)$ (超弱位相).

状態 $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ における出力分布は

$$P_{\rho}^M(X) := \text{Tr}[\rho M(X)]$$

であり、これは (Ω, Σ) 上の確率測度である.

POVM はすべてのアフィン測定写像を表す

命題

任意のアフィン写像

$$\Phi : \mathbf{S}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{P}(\Omega, \Sigma)$$

に対し、一意な POVM M が存在して

$$[\Phi(\rho)](X) = \text{Tr}[\rho M(X)] \quad (\rho \in \mathbf{S}(\mathcal{H}), X \in \Sigma)$$

となる．逆に POVM はこの式でアフィン写像を定める．

ここで、 $\mathcal{P}(\Omega, \Sigma)$ は (Ω, Σ) を標本空間とする確率測度全体の集合．

出典：Heinosaari–Ziman, *The Mathematical Language of Quantum Theory*, Proposition 3.10.

POVM による有界関数の積分

$B(\Omega, \Sigma)$ を有界複素可測関数全体の集合とする．POVM M と $f \in B(\Omega, \Sigma)$ に対して，作用素積分

$$\Gamma^M(f) := \int_{\Omega} f(\lambda) dM(\lambda) \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$$

は

$$\mathrm{Tr} \left[\rho \Gamma^M(f) \right] = \int_{\Omega} f(\lambda) dP_{\rho}^M(\lambda) \quad (\rho \in \mathbf{S}(\mathcal{H}))$$

により一意に定まる．

Γ^M は正かつ unital であり，この事実は第 2 部で Naimark 拡張を導くのに用いる．

例 1：有限出力 POVM

$\Omega = \{1, \dots, n\}$, $\Sigma = 2^\Omega$ とする．このとき POVM を与えることは，effect の有限列

$$M_i := M(\{i\}) \geq 0 \quad \sum_{i=1}^n M_i = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$$

を与えることと同値である．この対応の下で

$$M(X) = \sum_{i \in X} M_i \quad P_{\rho}^M(i) = \text{Tr}[\rho M_i]$$

となる．有限次元量子情報で最もよく使われる「POVM」は，この有限出力の場合である．

各 M_i が射影であれば PVM であり，互いに直交する： $M_i M_j = \delta_{ij} M_i$ ．

例 2 : PVM

POVM E が射影値測度 (PVM) であるとは

$$E(X)^2 = E(X) = E(X)^* \quad (X \in \Sigma)$$

が成り立つことをいう。このとき

$$E(X \cap Y) = E(X)E(Y)$$

であり、事象の積が射影の積として表される。

PVM は「sharp な測定」を表すが、一般の測定装置、ノイズを含む測定、同時測定、位相空間測定には POVM が不可欠である。

非有界自己共役作用素

$\text{dom}(A)$ が稠密な線形作用素 $A : \text{dom}(A) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ の随伴作用素 A^* を

$$\text{dom}(A^*) := \{\phi \in \mathcal{H} : \exists \eta \in \mathcal{H} \text{ s.t. } \langle \phi | A\psi \rangle = \langle \eta | \psi \rangle \quad (\forall \psi \in \text{dom}(A))\}, \quad A^*\phi := \eta$$

で定義する． $\text{dom}(A)$ の稠密性により，この η は一意である．さらに，

$$A = A^* \quad \text{すなわち} \quad \text{dom}(A) = \text{dom}(A^*), \quad A\psi = A^*\psi$$

なら自己共役である．位置・運動量・Hamiltonian は一般に非有界なので，定義域を含むこの条件が必要である．

スペクトル定理

自己共役作用素 A に対し一意な PVM $E^A : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が存在し，

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE^A(\lambda), \quad \text{dom}(A) = \left\{ \psi : \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\langle \psi | E^A(\lambda) \psi \rangle < \infty \right\}$$

出典：Reed–Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I*, Theorem VIII.4 ; Busch et al., *Quantum Measurement*, Theorem 5.2.

なぜ E^A を「 A の測定」と呼ぶのか

簡単のため $A \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ を自己共役とする．実数値 POVM M が

$$M[1] := \int_{\mathbb{R}} \lambda dM(\lambda) = A, \quad M[2] := \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 dM(\lambda) \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$$

を満たすとする．このとき

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(P_{\rho}^M) &= \mathrm{Tr}[\rho M[2]] - \mathrm{Tr}[\rho A]^2 \\ &\geq \mathrm{Tr}[\rho A^2] - \mathrm{Tr}[\rho A]^2 = \mathrm{Var}(P_{\rho}^{E^A}) \end{aligned}$$

すなわち，同じ平均値作用素 A を持つ測定の中でスペクトル測度は余分な内在的ノイズを持たない．

出典：Busch–Lahti–Pellonpää–Ylinen, *Quantum Measurement*, Corollary 9.1.

最小分散の等号条件は PVM を特徴づける

作用素不等式

$$M[2] - M[1]^2 \geq 0$$

が成り立ち、これは M の内在的ノイズ作用素である。

特徴づけ

第一モーメント $M[1] = A$ が自己共役であるとき、

$$M[2] = A^2 \iff M \text{ は PVM} \iff M = E^A$$

したがって、全状態で前頁の分散が等しいのは $M = E^A$ のときに限る。

出典：Busch–Lahti–Pellonpää–Ylinen, *Quantum Measurement*, Lemma 8.3, Theorem 8.5.

1 モード Boson Fock 空間 $\mathcal{H}$ で、消滅・生成作用素を $a, a^\dagger$ ，数作用素を $N = a^\dagger a$ とする。
coherent 状態は

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad a |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$$

位相 θ の quadrature 作用素を

$$Q_\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\theta} a + e^{i\theta} a^\dagger \right)$$

とする。理想 homodyne 測定は PVM E^{Q_θ} で表される。

確率測度の弱収束

$(\mu_n)_n$ と μ を $\mathbb{R}$ 上の確率測度とする.

定義

μ_n が μ へ弱収束するとは、任意の有界連続関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ について

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_n \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu$$

が成り立つことをいう. $\mu_n \Rightarrow \mu$ と書く.

Lévy の連続性定理により、この弱収束条件は、特性関数の各点収束

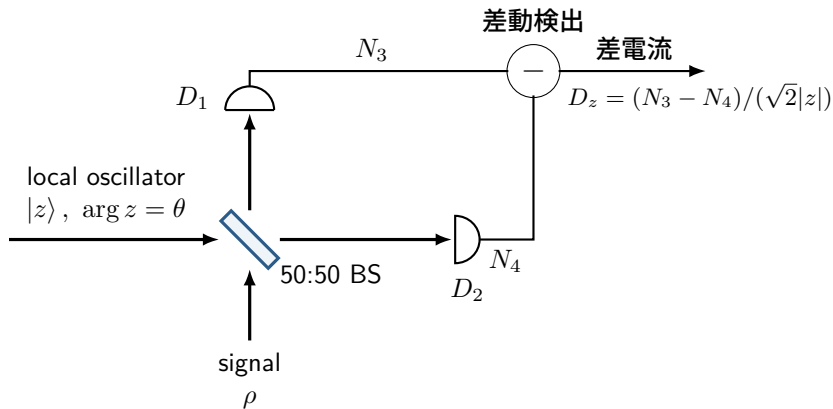
$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} \, d\mu_n(x) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \, d\mu(x)$$

と同値である.

POVM 列の収束は、各入力状態 ρ で生じる確率分布の弱収束として述べる.

出典: Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, Theorem 2.1.

balanced homodyne 測定



信号と強い local oscillator を半透鏡で混合し、二つの光子数の規格化差を記録する．位相 $\arg z = \theta$ が測る quadrature を選ぶ．符号は beam splitter のポート規約に依存する．

出典：Busch et al., *Quantum Measurement*, Sec. 19.3, Fig. 19.1.

$z_k = r_k e^{i\theta}$, $r_k \rightarrow \infty$ とし, 理想光検出器で得られる規格化差 D_{z_k} の信号 POVM を H_{z_k} と書く.

Proposition 19.1 の $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ の場合

任意の $T \in \mathbf{T}(\mathcal{H})$ と, $E^{Q_\theta}(\partial X) = 0$ を満たす Borel 集合 X について

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathrm{Tr}[TH_{z_k}(X)] = \mathrm{Tr}[TE^{Q_\theta}(X)]$$

特に任意の状態 ρ で, homodyne 出力分布は Q_θ のスペクトル分布へ弱収束する.

検出効率が 1 未満なら, 極限は E^{Q_θ} を Gauss 分布で畳み込んだ unsharp quadrature となる.

出典: Busch et al., *Quantum Measurement*, Proposition 19.1.

1. 特性関数 $\int e^{itx} dP_T^{H_{z_k}}(x)$ を，入力が任意の coherent 状態 $T = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ の場合に直接計算する．
2. $r_k \rightarrow \infty$ を取り， Q_θ の特性関数へ収束することを示す．連続性定理により確率測度の弱収束が従う．
- 3.

$$\text{span}\{|\alpha\rangle\langle\alpha| : \alpha \in \mathbb{C}\}$$

は $\mathbf{T}(\mathcal{H})$ でトレースノルム稠密である．実際，この線形包上で零となる連続線形汎関数を $A \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ で表すと，その Q-symbol $\langle\alpha|A|\alpha\rangle$ は恒等的に零となる．解析性から $A = 0$ ，Hahn–Banach から稠密性が従う．特性作用素が一様有界なので，一般の $T \in \mathbf{T}(\mathcal{H})$ へ延長できる．

出典：Busch et al., *Quantum Measurement*, Sec. 9.3, Proposition 19.1 の証明．

理想 heterodyne 測定は PVM ではない

位相空間 $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ 上の POVM

$$G(Z) = \int_Z |\alpha\rangle \langle \alpha| \frac{d^2\alpha}{\pi}, \quad Z \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$$

を coherent-state POVM と呼ぶ．これは理想 heterodyne 測定 (eight-port homodyne) の出力統計を表す．

- ▶ 分解公式 $\int_{\mathbb{C}} |\alpha\rangle \langle \alpha| \frac{d^2\alpha}{\pi} = \mathbb{1}$ により正規化される．
- ▶ この coherent-state phase-space POVM の range に属する射影は $0, \mathbb{1}$ だけである．したがって，Lebesgue 測度で零でも余零でもない Z に対する $G(Z)$ は射影ではない．
- ▶ 二つの非可換 quadrature の情報を一つの複素出力へまとめる代わりに，不可避な真空雑音を含む．

出典：Busch et al., *Quantum Measurement*, Proposition 8.7, Secs. 9.3, 19.4, Proposition 19.2.

可分性：可算個のベクトルで近似できる

位相空間 X が可分であるとは、可算稠密部分集合を持つことをいう。

Hilbert 空間の場合

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ について次は同値である：

1. $\mathcal{H}$ は可分である。
2. $\mathcal{H}$ は有限または可算な完全正規直交系 $(e_n)_n$ を持つ。
3. $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^d$ ($d < \infty$) または $\mathcal{H} \cong \ell^2(\mathbb{N})$ である。

物理で通常用いる $L^2(\mathbb{R}^d)$ 、Fock 空間、有限自由度系や有限体積格子系の Hilbert 空間は可分である。以後、標準 Borel 化の議論では $\mathcal{H}$ を可分とする。

- ▶ 位相空間 X が **Polish** であるとは、その位相を与える完備かつ可分な距離が存在することをいう。
- ▶ 可測空間 (Ω, Σ) が**標準 Borel** であるとは、ある Polish 空間 X の Borel 可測空間 $(X, \mathcal{B}(X))$ と可測同型であることをいう。ここで Borel シグマ代数 $\mathcal{B}(X)$ は X の開集合を含む最小のシグマ代数。

有限・可算離散空間、 $\mathbb{R}^d$ 、 $\mathbb{C}^d$ 、可分 Banach 空間、有限・可算積、それらの Borel 部分集合は標準 Borel である。物理・統計で現れる標本空間のほとんどはこのクラスに入る。

出典：Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Secs. 3, 12.

Borel 同型定理：標準 Borel 空間は三種類だけ

Borel 同型定理

任意の標準 Borel 空間は、濃度に応じて次のいずれかと可測同型である：

1. 有限離散可測空間，
2. 可算無限離散可測空間，
3. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 。

特に、任意の非可算標準 Borel 空間は互いに Borel 同型である。

この定理は「多次元連続出力や関数値出力であっても、可測構造だけ見れば一つの実数へ符号化できる」ことを意味する。位相・距離まで保存する主張ではない。

出典：Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Theorem 15.6.

弱 Markov 核：零集合上の例外を許す古典処理

N を (Ω_N, Σ_N) 上の POVM とする．写像 $\kappa : \Sigma_M \times \Omega_N \rightarrow \mathbb{R}$ が **N-弱 Markov 核** であるとは， $N(Y) = 0$ となる集合 Y を N -零集合と呼び，次をその零集合を除いて満たすことをいう：

1. $y \mapsto \kappa(X \mid y)$ は Σ_N -可測，
2. $0 \leq \kappa(X \mid y) \leq 1$ が N -a.e.，
3. $\kappa(\Omega_M \mid y) = 1$ ， $\kappa(\emptyset \mid y) = 0$ が N -a.e.，
4. 互いに素な $(X_n)_n$ について $\kappa(\bigcup_n X_n \mid y) = \sum_n \kappa(X_n \mid y)$ が N -a.e.

を満たすことをいう．例外零集合は条件・集合列に依存してよい．すべての y で $X \mapsto \kappa(X \mid y)$ が確率測度なら通常の Markov 核である．

出典：Kuramochi, J. Math. Phys. 56, 102205 (2015), Sec. II.C (Definition 1 直前)．

POVM の post-processing 順序と操作的意味

M と N に対し

$$M \preceq_w N$$

とは、N-弱 Markov 核 κ が存在して

$$M(X) = \int_{\Omega_N} \kappa(X \mid y) dN(y) \quad (X \in \Sigma_M)$$

となることをいう。

- ▶ 正則 Markov 核なら、まず N を測り、得た y から条件付き確率 $\kappa(\cdot \mid y)$ に従う古典乱数を生成すれば M を実現できる。弱 Markov 核はこの関係を N-零集合を法として表す。
- ▶ $M \simeq_w N$ とは両方向の post-processing が可能なことをいう。両者は系について同じ統計情報を持つ。

出典：Kuramochi, J. Math. Phys. 56, 102205 (2015), Sec. II.C.

LSB 統計量は POVM の情報を実数列へ圧縮する

可分な $\mathcal{H}$ で, $(\rho_i)_{i \geq 1} \subset \mathcal{S}(\mathcal{H})$ をトレースノルム稠密に取り, $c_i > 0$, $\sum_i c_i = 1$ として

$$\rho_* := \sum_{i=1}^{\infty} c_i \rho_i$$

すると全分布 $P_{\rho}^{\mathbf{M}}$ は $P_{\rho_*}^{\mathbf{M}}$ に絶対連続である. **Lehmann–Scheffé–Bahadur (LSB) 統計量**を

$$T(x) := \left(\frac{dP_{\rho_i}^{\mathbf{M}}}{dP_{\rho_*}^{\mathbf{M}}}(x) \right)_{i \geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

で定める. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ は積位相で Polish なので標準 Borel である.

push-forward POVM を

$$M_T(B) := M(T^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$$

で定める.

出典: Kuramochi, J. Math. Phys. 56, 102205 (2015), Eq. (6), Theorem 4.

任意の POVM は標準 Borel 出力へ置き換えられる

標準 Borel 化

可分 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の任意の POVM (Ω, Σ, M) に対し，前頁の LSB 統計量による push-forward $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}), M_T)$ は

$$M_T \simeq_w M$$

を満たす．したがって，任意の POVM は標準 Borel 標本空間を持つ POVM に post-processing 同値である．

さらに M_T は弱 post-processing 同値類の中で minimal sufficient であり，零集合を除く可測同型の範囲で一意である．

元の (Ω, Σ) が標準 Borel なら，弱 Markov 核を通常の Markov 核へ正則化でき，正則 post-processing 同値も得られる．

出典：Kuramochi, J. Math. Phys. 56, 102205 (2015), Theorems 3–5.

第2部：CP写像と拡張定理

一つの定理から，測定・状態・時間発展の実現へ

なぜ作用素環を導入するのか

本講演で実際に現れる主な代数は、

$$C(X), \quad B(\Omega, \Sigma), \quad \mathbf{B}(\mathcal{H})$$

という比較的素朴なものである．それでも作用素環の言葉を使う理由は、次の四つを同じ定理で扱えるからである．

- ▶ POVM を PVM へ拡張する Naimark 定理．
- ▶ 状態をベクトル状態へ拡張する GNS 定理と purification．
- ▶ 量子チャンネルの Kraus 表示．
- ▶ 量子チャンネルの系－環境モデル．

共通の核は、完全正写像を「表現＋圧縮」に分解する Stinespring 拡張定理である．

定義

単位的 C^* 環 $\mathcal{A}$ とは、単位元 $\mathbb{1}$ を持つ Banach $*$ 代数で

$$\|a^*a\| = \|a\|^2 \quad (a \in \mathcal{A})$$

を満たすものをいう。本講演では単位元の存在を仮定する。

- ▶ $B(\mathcal{H})$ は作用素ノルムについて単位的 C^* 環である。
- ▶ $B(\mathcal{H})$ の任意の単位的ノルム閉 $*$ 部分代数は C^* 環。逆に任意の C^* 環はある $B(\mathcal{H})$ の任意の単位的ノルム閉 $*$ 部分代数に同型。
- ▶ $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ が **von Neumann (vN) 環** であるとは、単位的 $*$ 部分代数で、超弱位相について閉じていることをいう。
- ▶ この閉性は $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$ という条件と同値である（二重可換子定理）。

超弱位相は、 $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ との双対 $A \mapsto \text{Tr}[TA]$ で定まる弱 $*$ 位相である。

出典：Davies, *Quantum Theory of Open Systems*, Secs. 1.6–1.7.

可換 C^* 環は関数環である

コンパクト Hausdorff 空間 X に対し,

$$C(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ は連続}\}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

は点ごとの積と複素共役について可換な単位的 C^* 環である.

Gelfand 表現定理

任意の可換な単位的 C^* 環 A は, あるコンパクト Hausdorff 空間 X に対して $C(X)$ と等長 $*$ 同型である. X は A の指標空間として構成できる.

したがって, **可換なオブザーバブル代数**は古典的な関数の代数と考えられる. 一方, 量子系の $B(\mathcal{H})$ は一般に非可換である.

出典: Heinosaari-Ziman, *The Mathematical Language of Quantum Theory*, Sec. C.3.

順序, 正の線形汎関数, 状態

C^* 環 $\mathcal{A}$ の元 a が**正**であるとは, ある $b \in \mathcal{A}$ により

$$a = b^*b$$

と書けることをいう. $a \leq b$ は $b - a \geq 0$ を意味する.

線形汎関数 $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ が

$$a \geq 0 \implies \phi(a) \geq 0$$

を満たすとき正であり, さらに $\phi(\mathbb{1}) = 1$ なら**状態**である. 正の線形汎関数には

$$\|\phi\| = \phi(\mathbb{1})$$

が成立するので, 状態は自動的に連続である.

$\mathcal{A} = C(X)$ では状態は正則 Borel 確率測度, $\mathcal{A} = B(\mathcal{H})$ では後述の正規状態が密度作用素に対応する.

$B(\mathcal{H})$ の正規汎関数と密度作用素

predual による特徴づけ

超弱連続な線形汎関数 $\phi : B(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ は、ただ一つの $T \in T(\mathcal{H})$ により

$$\phi(A) = \text{Tr}[TA]$$

と書ける．すなわち、 $B(\mathcal{H})_* = T(\mathcal{H})$ である．

正規状態とは超弱連続な状態のことであり、

$$S(\mathcal{H}) \ni \rho \longmapsto \phi_\rho \in B(\mathcal{H})_*, \quad \phi_\rho(A) = \text{Tr}[\rho A]$$

は密度作用素と正規状態の一対一対応を与える．

一般の無限次元 $B(\mathcal{H})$ には非正規状態も存在する．通常の量子力学で密度作用素として扱う状態は正規状態である．

出典：Davies, *Quantum Theory of Open Systems*, Lemma 1.6.1.

正写像, n -正写像, 完全正写像

C^* 環 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ の間の線形写像 $\Lambda : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ を考える.

▶ Λ が正: $a \geq 0 \Rightarrow \Lambda(a) \geq 0$.

▶ 行列増幅

$$\Lambda^{(n)} := \text{id}_{M_n} \otimes \Lambda : M_n(\mathcal{A}) \longrightarrow M_n(\mathcal{B}), \quad [a_{ij}] \mapsto [\Lambda(a_{ij})]$$

が正であるとき, Λ は n -正.

▶ すべての $n \geq 1$ について n -正なら完全正 (CP).

$\Lambda(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ なら unital, vN 環の間で超弱連続なら normal という.

CP 性は, 未知の ancilla と系を合成しても正值性を失わない, という物理的要請である.

定理

正写像 $\Lambda : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ について，domain $\mathcal{A}$ または codomain $\mathcal{B}$ が可換なら， Λ は完全正である．

この事実には二つの重要な帰結がある．

- ▶ POVM 積分 $f \mapsto \int f \, dM$ は，可換な関数環を domain に持つため CP である．
- ▶ 状態 $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ は，codomain が可換なので CP である．

一方，非可換代数間では正性だけでは不十分である．典型例として有限次元の転置写像は正だが 2-正ではない．

出典：Paulsen, *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*, Theorems 3.9, 3.11.

CP 写像の基本例

1. * 準同型 $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, すなわち

$$\pi(ab) = \pi(a)\pi(b), \quad \pi(a^*) = \pi(a)^*, \quad \pi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$$

は CP である.

2. 有界線形写像 $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ に対し, 圧縮

$$\mathbf{B}(\mathcal{K}) \ni A \longmapsto V^*AV \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$$

は CP である. $V^*V = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$ なら unital である.

CP 写像の合成は CP なので

$$\Lambda(a) = V^*\pi(a)V$$

という形の写像は CP である. Stinespring 定理は, 逆にすべての CP 写像がこの形であると述べる.

定理

$\mathcal{A}$ を単位的 C^* 環, $\Lambda : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$ を CP 写像とする. このとき Hilbert 空間 $\mathcal{K}$, 単位的 $*$ 表現 $\pi : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{K})$, 有界作用素 $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ が存在し,

$$\boxed{\Lambda(a) = V^* \pi(a) V} \quad (a \in \mathcal{A})$$

と書ける. Λ が unital なら V は isometry に選べる.

拡張が **minimal** とは

$$\mathcal{K} = \overline{\text{span}}\{\pi(a)V\psi : a \in \mathcal{A}, \psi \in \mathcal{H}\}$$

を満たすことをいう. minimal 拡張は, π と V を同時に移す unitary を除いて一意である.

出典 : Stinespring, Proc. Amer. Math. Soc. 6, 211–216 (1955).

代数的テンソル積 $\mathcal{A} \odot \mathcal{H}$ に半内積

$$\left\langle \sum_i a_i \otimes \psi_i, \sum_j b_j \otimes \varphi_j \right\rangle := \sum_{i,j} \langle \psi_i | \Lambda(a_i^* b_j) | \varphi_j \rangle$$

を入れる．**完全正性**が，この量の非負性を保証する．零ノルムベクトルを割って完備化した空間を $\mathcal{K}$ とし，

$$\pi(a)(b \otimes \psi) = ab \otimes \psi, \quad V\psi = \mathbb{1} \otimes \psi$$

とおけば， $V^* \pi(a) V = \Lambda(a)$ を得る．

vN 環 $\mathcal{A}$ 上で Λ が normal なら， π も normal となる拡張を選ぶ．以後，normal CP 写像にはこの normal 版を用いる．

出典：Davies, *Quantum Theory of Open Systems*, Theorem 9.2.1.

この後は同じ式

$$\Lambda(a) = V^* \pi(a) V$$

を，domain と codomain を変えて読む．

1. $\Lambda = \Gamma^M : B(\Omega, \Sigma) \rightarrow B(\mathcal{H})$: Naimark 拡張．
2. $\Lambda = \phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$: GNS 表現，特に状態の purification．
3. $\Lambda = \Phi^\dagger : B(\mathcal{K}) \rightarrow B(\mathcal{H})$: 量子チャンネルの Kraus 表示．
4. 同じ V を isometry として読む：系－環境モデル．

POVM 積分は CP 写像である

POVM (Ω, Σ, M) に対し,

$$\Gamma^M : B(\Omega, \Sigma) \longrightarrow \mathbf{B}(\mathcal{H}), \quad \Gamma^M(f) := \int_{\Omega} f \, dM$$

とおく. Γ^M は unital かつ正である. domain $B(\Omega, \Sigma)$ は点ごとの積について可換なので, Γ^M は CP である.

Stinespring 定理により, isometry $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ と単位的 * 表現 $\pi : B(\Omega, \Sigma) \rightarrow \mathbf{B}(\mathcal{K})$ が存在し,

$$\Gamma^M(f) = V^* \pi(f) V$$

となる. 特に

$$M(X) = V^* \pi(\mathbf{1}_X) V$$

指示関数から PVM が現れる

$X \in \Sigma$ に対して

$$\hat{M}(X) := \pi(\mathbf{1}_X)$$

と定める．＊ 準同型性から

$$\hat{M}(X)^2 = \pi(\mathbf{1}_X^2) = \pi(\mathbf{1}_X),$$

$$\hat{M}(X)^* = \pi(\overline{\mathbf{1}_X}) = \pi(\mathbf{1}_X),$$

$$\hat{M}(X)\hat{M}(Y) = \pi(\mathbf{1}_{X \cap Y}) = \hat{M}(X \cap Y)$$

したがって、各 $\hat{M}(X)$ は射影である．

minimal Stinespring 空間の稠密部分 $\text{span}\{\pi(f)V\psi : f \in B(\Omega, \Sigma), \psi \in \mathcal{H}\}$ 上で行列要素を調べれば、scalar measure の可算加法性から

$$\hat{M}\left(\bigcup_n X_n\right) = \sum_n \hat{M}(X_n) \quad (\text{強作用素位相})$$

も従う．ゆえに $\hat{M}$ は PVM である．

定理

任意の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の POVM (Ω, Σ, M) に対して, Hilbert 空間 $\mathcal{K}$, PVM $(\Omega, \Sigma, \hat{M})$, isometry $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ が存在し,

$$\boxed{M(X) = V^* \hat{M}(X) V} \quad (X \in \Sigma)$$

を満たす. minimality を課せば拡張は unitary 同値を除いて一意である.

操作的には, 一般の POVM は, ancilla を含む大きな系上の sharp な測定を圧縮したものである.

この段階では「大きな系をどのような相互作用で実現するか」はまだ述べていない. それを与えるのが第 3 部のインストゥルメント拡張である.

出典: Busch-Lahti-Pellonpää-Ylinen, *Quantum Measurement*, Theorems 7.6–7.7.

定理

単位的 C^* 環 $\mathcal{A}$ の状態 ϕ に対し, Hilbert 空間 $\mathcal{K}_\phi$, 単位的 $*$ 表現 $\pi_\phi : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{K}_\phi)$, 単位ベクトル $\xi_\phi \in \mathcal{K}_\phi$ が存在して

$$\phi(a) = \langle \xi_\phi | \pi_\phi(a) | \xi_\phi \rangle$$

かつ $\overline{\pi_\phi(\mathcal{A})\xi_\phi} = \mathcal{K}_\phi$ を満たす. この cyclic な三つ組は unitary 同値を除いて一意である.

この三つ組 $(\mathcal{K}_\phi, \pi_\phi, \xi_\phi)$ を **GNS 表現** という.

これは Stinespring 定理で codomain を $B(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ とした場合である. $V : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{K}_\phi$ に対し $\xi_\phi = V1$ とおけば直ちに従う.

出典: Davies, *Quantum Theory of Open Systems*, Sec. 1.7.

$B(\mathcal{H})$ の normal な表現

補題

$\pi : B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{K})$ を normal な単位的 $*$ 表現とする．すると，ある Hilbert 空間 $\mathcal{E}$ と unitary $W : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{E}$ が存在し，

$$W\pi(A)W^* = A \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{E}} \quad (A \in B(\mathcal{H}))$$

となる．

つまり $B(\mathcal{H})$ の normal な表現は，本質的に元の作用素に恒等作用素を tensor したもの以外存在しない．

これを正規状態の GNS 表現に適用すると，GNS ベクトルは合成系上の純粋状態，すなわち purification になる．

出典：Davies, *Quantum Theory of Open Systems*, Lemma 9.2.2 (上記と同値な定式化)．

GNS 表現から purification へ

$\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ とし, 正規状態

$$\phi_\rho(A) = \text{Tr}[\rho A]$$

の GNS 表現を考える. 前頁の補題により

$$\pi_\rho(A) \simeq A \otimes \mathbb{1}_\mathcal{E}, \quad \xi_\rho \simeq |\Psi_\rho\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{E}$$

したがって, 任意の $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対し

$$\text{Tr}[\rho A] = \langle \Psi_\rho | (A \otimes \mathbb{1}_\mathcal{E}) | \Psi_\rho \rangle = \text{Tr}[A \text{Tr}_\mathcal{E} |\Psi_\rho\rangle \langle \Psi_\rho|]$$

ゆえに

$$\boxed{\rho = \text{Tr}_\mathcal{E} |\Psi_\rho\rangle \langle \Psi_\rho|}$$

である. GNS 定理は, すべての正規状態が purification を持つことを含んでいる.

よく見る purification との比較

密度作用素のスペクトル分解を

$$\rho = \sum_k p_k |e_k\rangle \langle e_k|, \quad p_k \geq 0, \quad \sum_k p_k = 1$$

とする． $\mathcal{H}$ の共役 Hilbert 空間 $\overline{\mathcal{H}}$ を用いれば，

$$|\Psi_\rho\rangle := \sum_k \sqrt{p_k} e_k \otimes \overline{e_k} \in \mathcal{H} \otimes \overline{\mathcal{H}}$$

は

$$\mathrm{Tr}_{\overline{\mathcal{H}}} |\Psi_\rho\rangle \langle \Psi_\rho| = \rho$$

を満たす．基底を固定して $\overline{\mathcal{H}} \simeq \mathcal{H}$ と同一視すれば，教科書的な $\sum_k \sqrt{p_k} e_k \otimes e_k$ を得る．

GNS 表現はこの構成を基底非依存に捉え，minimality は必要な補助空間の大きさを $\mathrm{supp} \rho$ に合わせる．

有界線形写像

$$\Phi : \mathbf{T}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbf{T}(\mathcal{K})$$

に対し、双対写像 $\Phi^\dagger : \mathbf{B}(\mathcal{K}) \rightarrow \mathbf{B}(\mathcal{H})$ は

$$\mathrm{Tr}[\Phi(T)A] = \mathrm{Tr}[T\Phi^\dagger(A)] \quad (T \in \mathbf{T}(\mathcal{H}), A \in \mathbf{B}(\mathcal{K}))$$

で一意に定まる． $\Phi^\dagger$ は自動的に normal である．

逆に，normal な有界線形写像 $\Lambda : \mathbf{B}(\mathcal{K}) \rightarrow \mathbf{B}(\mathcal{H})$ は，一意な predual 写像 $\Lambda_* : \mathbf{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbf{T}(\mathcal{K})$ を持つ．

Φ : 状態を送る Schrödinger 描像 $\Phi^\dagger$: オブザーバブルを引き戻す Heisenberg 描像

出典：Davies, *Quantum Theory of Open Systems*, Sec. 2.2.

定義

Schrödinger 描像の量子チャンネル $\Phi : \mathbf{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbf{T}(\mathcal{K})$ とは, trace-preserving で, 双対 $\Phi^\dagger$ が CP である有界線形写像をいう.

trace-preserving 性は

$$\mathrm{Tr}[\Phi(T)] = \mathrm{Tr}[T] \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi^\dagger(\mathbb{1}_{\mathcal{K}}) = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$$

である. したがって, Heisenberg 描像の量子チャンネルとは, normal unital CP 写像

$$\Phi^\dagger : \mathbf{B}(\mathcal{K}) \longrightarrow \mathbf{B}(\mathcal{H})$$

にほかならない.

この定義は無限次元でも ancilla を含む状態の正值性と確率保存を保証する.

チャンネルの Stinespring 表現

Schrödinger 描像のチャンネル $\Phi : \mathbf{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbf{T}(\mathcal{K})$ と、その双対

$$\Lambda := \Phi^\dagger : \mathbf{B}(\mathcal{K}) \longrightarrow \mathbf{B}(\mathcal{H})$$

を考える． normal Stinespring 定理と $\mathbf{B}(\mathcal{K})$ の表現補題により， Hilbert 空間 $\mathcal{E}$ と isometry $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K} \otimes \mathcal{E}$ が存在して

$$\Lambda(A) = V^*(A \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{E}})V$$

となる． minimality

$$\overline{\text{span}}\{(A \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{E}})V\psi : A \in \mathbf{B}(\mathcal{K}), \psi \in \mathcal{H}\} = \mathcal{K} \otimes \mathcal{E}$$

を課せば， $(\mathcal{E}, V)$ は環境側の unitary を除いて一意である．

出典：Davies, *Quantum Theory of Open Systems*, Theorem 9.2.1, Lemma 9.2.2.

Stinespring 表現から Kraus 和表示へ

環境 $\mathcal{E}$ の正規直交基底 $(e_j)_{j \in J}$ を取り,

$$M_j := (\mathbb{1}_{\mathcal{K}} \otimes \langle e_j |) V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$$

とおく. すると

$$\Lambda(A) = \sum_j M_j^* A M_j,$$

$$\sum_j M_j^* M_j = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$$

和は第 1 式では超弱位相, 第 2 式では強作用素位相で収束する. J が非可算なら, 有限部分集合上の和の net として解釈する. predual では

$$\Phi(\rho) = \sum_j M_j \rho M_j^*$$

がトレースノルムで収束する. これが **Kraus 和表示** である. Stinespring 表現から環境基底を選ぶこの方法が, Kraus による元来の導出である.

出典: Kraus, Ann. Phys. 64, 311–335 (1971); Davies, Ch. 9 Notes, p. 147.

チャンネルの系 – 環境モデル

Schrödinger 描像のチャンネル $\Phi : \mathbf{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbf{T}(\mathcal{K})$ に対し，双対の Stinespring isometry

$$V : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K} \otimes \mathcal{E}_{\text{out}}$$

を取れば

$$\boxed{\Phi(\rho) = \text{Tr}_{\mathcal{E}_{\text{out}}} [V \rho V^*]}$$

となる．さらに補助空間を十分拡大すれば，単位ベクトル $\eta \in \mathcal{E}_{\text{in}}$ と unitary

$$U : \mathcal{H} \otimes \mathcal{E}_{\text{in}} \longrightarrow \mathcal{K} \otimes \mathcal{E}_{\text{out}}$$

を用いて

$$V\psi = U(\psi \otimes \eta), \quad \Phi(\rho) = \text{Tr}_{\mathcal{E}_{\text{out}}} [U(\rho \otimes |\eta\rangle\langle\eta|)U^*]$$

と実現できる．

不可逆な量子チャンネル＝純粋な環境を加えた可逆な unitary 発展＋環境の忘却

これは系の時間発展が閉じた合成系では unitary である，という物理的実現である．

四つの拡張定理を比較する

場合	CP 写像	拡張後の表現	読み方
Stinespring	$\Lambda : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{B}(\mathcal{H})$	$V^* \pi(a) V$	CP 写像の一般形
Naimark	$f \mapsto \int f \, dM$	$M(X) = V^* \widehat{M}(X) V$	POVM を PVM へ
GNS / purification	$\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$	$\phi(a) = \langle \xi \pi(a) \xi \rangle$	混合状態を純粋状態へ
量子チャンネル	$\Lambda = \Phi^\dagger : \mathbf{B}(\mathcal{K}) \rightarrow \mathbf{B}(\mathcal{H})$	$V^* (A \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{E}}) V$	Kraus 表示・系 – 環境モデル

いずれも、小さい系で見える非 sharp・混合・不可逆な対象を、大きい系の射影・ベクトル・unitary へ拡張するという同じ構造を持つ。

第3部：インストゥルメント

出力確率と条件付き状態変化を一つに記述する

POVM だけでは測定後状態を記述しない

POVM M が定めるのは

$$\Pr_{\rho}[x \in X] = \text{Tr}[\rho M(X)]$$

という出力確率である．同じ POVM を実装する測定でも，測定後状態は異なり得る．
インストゥルメントは，事象 X ごとに非正規化された測定後状態

$$\rho \longmapsto \mathcal{I}_X(\rho)$$

を与え，

$$\text{Tr}[\mathcal{I}_X(\rho)] \quad \text{と} \quad \frac{\mathcal{I}_X(\rho)}{\text{Tr}[\mathcal{I}_X(\rho)]}$$

から，それぞれ確率と条件付き状態を同時に復元する．反復測定や測定による攪乱には，POVM ではなくインストゥルメントが必要である．

Schrödinger 描像の CP インストゥルメント

可測空間 (Ω, Σ) , 入力 $\mathcal{H}$, 出力 $\mathcal{K}$ に対し,

$$\mathcal{I} : \Sigma \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{T}(\mathcal{H}), \mathbf{T}(\mathcal{K})), \quad X \mapsto \mathcal{I}_X$$

が **CP インストゥルメント** であるとは、次を満たすことをいう.

1. 各 $\mathcal{I}_X^\dagger : \mathbf{B}(\mathcal{K}) \rightarrow \mathbf{B}(\mathcal{H})$ は normal CP.
2. $\mathcal{I}_\Omega$ は trace-preserving.
3. 互いに素な $X_n \in \Sigma$ に対して

$$\mathcal{I}_{\bigcup_n X_n}(T) = \sum_n \mathcal{I}_{X_n}(T)$$

が任意の $T \in \mathbf{T}(\mathcal{H})$ についてトレースノルムで成立する.

各 $\mathcal{I}_X$ は正作用素上で trace-nonincreasing である.

出典: Busch–Lahti–Pellonpää–Ylinen, *Quantum Measurement*, Definitions 7.2–7.5.

インストゥルメントから得られる三つの対象

CP インストゥルメント $\mathcal{I}$ に対し,

1. 付随する出力 POVM :

$$M(X) := \mathcal{I}_X^\dagger(\mathbb{1}_{\mathcal{K}})$$

2. 結果を無視した量子チャンネル :

$$\mathcal{I}_\Omega : \mathbf{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbf{T}(\mathcal{K})$$

3. $\mathrm{Tr}[\rho M(X)] > 0$ のときの条件付き状態 :

$$\rho_X = \frac{\mathcal{I}_X(\rho)}{\mathrm{Tr}[\mathcal{I}_X(\rho)]}$$

実際,

$$\Pr_{\rho}[x \in X] = \mathrm{Tr}[\mathcal{I}_X(\rho)] = \mathrm{Tr}[\rho M(X)]$$

POVM はインストゥルメントの「古典出力だけを残した周辺」である.

同じ入出力空間 $\mathcal{H}$ を持つ測定を考える．測定モデル

$$(\mathcal{K}, \sigma, U, Z)$$

は，プローブ空間 $\mathcal{K}$ ，初期状態 $\sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{K})$ ，unitary $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ ，プローブ上の pointer PVM $Z: \Sigma \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{K})$ からなる．

実験の流れは

$$\rho \otimes \sigma \xrightarrow{U} U(\rho \otimes \sigma)U^* \xrightarrow{Z \text{ を読む}} x \in \Omega$$

である．プローブ空間 $\mathcal{K}$ ，初期状態 σ ，相互作用 U ，pointer Z が測定装置を指定し，閉じた合成系の力学は unitary で記述される．

測定モデルが定めるインストゥルメント

前頁の測定モデルが誘導するインストゥルメントは

$$\mathcal{I}_X(\rho) := \text{Tr}_{\mathcal{K}}[(\mathbb{1} \otimes Z(X))U(\rho \otimes \sigma)U^*]$$

Heisenberg 描像では

$$\mathcal{I}_X^\dagger(A) = E_\sigma[U^*(A \otimes Z(X))U]$$

ただし, slice map E_σ は

$$\text{Tr}[\rho E_\sigma(B)] = \text{Tr}[(\rho \otimes \sigma)B]$$

で定義する. $\sigma = |\eta\rangle\langle\eta|$ なら, $V\psi = U(\psi \otimes \eta)$ として

$$\mathcal{I}_X^\dagger(A) = V^*(A \otimes Z(X))V$$

実現定理

同じ入出力空間 $\mathcal{H}$ を持つ任意の CP インストゥルメント $\mathcal{I}$ は、測定モデルによる実現を持つ。プローブ初期状態は純粋，pointer は PVM に選べる。

まずインストゥルメント版 Stinespring 拡張

$$\mathcal{I}_X^\dagger(A) = V^*(A \otimes Z(X))V$$

を構成し、必要なら補助空間を増やして isometry V を unitary U へ延長する。

$\mathcal{H}$ が可分で (Ω, Σ) が標準 Borel なら，プローブ空間も可分に選べる。したがって，CP インストゥルメントと unitary 相互作用による測定モデルによって実現される測定過程のクラスは数学的に同型である。

出典：Ozawa, J. Math. Phys. 25, 79–87 (1984), Theorem 5.1, Corollaries 5.2–5.3 ; Busch et al., Theorems 7.11, 7.14.

反復可能性の定義

以下、入力と出力を同じ $\mathcal{H}$ とし、付随 POVM を M とする． $\mathcal{I}$ が **(弱) 反復可能** であるとは

$$\boxed{\mathcal{I}_X^\dagger(M(Y)) = M(X \cap Y)} \quad (X, Y \in \Sigma)$$

を満たすことをいう．これは、Schrödinger 描像における

$$\mathrm{Tr}[\mathcal{I}_Y(\mathcal{I}_X(\rho))] = \mathrm{Tr}[\mathcal{I}_{X \cap Y}(\rho)] \quad (\rho \in \mathbf{S}(\mathcal{H}), X, Y \in \Sigma)$$

という条件と同値である．

これは「1 回目が X ，直後の 2 回目が Y 」となる確率が、「一つの結果が $X \cap Y$ 」となる確率に等しいという意味である．離散的な sharp 測定では、得た固有値を直後に再測定すると確率 1 で同じ値を得る、という通常反復可能性に一致する．

出典：Ozawa, J. Math. Phys. 25, 79–87 (1984), Sec. VI ; Busch et al., Definition 10.3.

反復可能インストゥルメントの出力は離散的

POVM M が離散的であるとは、可算な可測部分集合 $\Omega_0 \in \Sigma$ が存在して

$$M(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$$

となることをいう。これは M が PVM であるという意味ではない。

Ozawa の離散性定理

(Ω, Σ) を標準 Borel 空間， $\mathcal{H}$ を可分 Hilbert 空間とする。このとき， $\mathcal{H}$ 上の任意の弱反復可能 CP インストゥルメントの付随 POVM は離散的である。

したがって、位置のような連続 PVM を厳密に反復可能な CP インストゥルメントは存在しない。これは「連続量を測れない」という主張ではなく、直後の再測定で全く同じ連続値を返す理想化が不可能という主張である。

出典：Ozawa, J. Math. Phys. 25, 79–87 (1984), Theorem 6.6.

どこで標準 Borel 性を使うのか

Ozawa の Theorem 6.5 で得られる補助 PVM を

可算個の点に載る部分 $\oplus$ 点連続 (point-continuous) な部分

へ分解する．連続部分に制限した遷移写像の前双対写像を S とすると，反復可能性により各 $S(\rho) \in \mathbf{T}(\mathcal{H})$ は連続 PVM のすべての射影と可換する．無原子的な PVM と可換するトレースクラス作用素は零なので $S = 0$ ，したがって，連続部分の射影も零である．

仮定の役割は本質的である．

- ▶ 標準 Borel 性を外すと，次頁の可算・余可算 σ -代数上の反例がある．
- ▶ 可分性を外すと， $\ell^2(\mathbb{R})$ 上で非可算個の直交射影を持つ反復可能 PVM 測定が作れる．

出典：Ozawa, *ibid.*, Theorems 6.5–6.6

Ω を非可算集合とし,

$$\Sigma_{\text{cc}} := \{X \subset \Omega : X \text{ が可算, または } \Omega \setminus X \text{ が可算}\}$$

とおく. 確率測度 $\mu : \Sigma_{\text{cc}} \rightarrow \{0, 1\}$ を

$$\mu(X) = \begin{cases} 0, & X \text{ が可算,} \\ 1, & \Omega \setminus X \text{ が可算} \end{cases}$$

で定める. 互いに素な可測集合列には高々一つしか余可算集合がないので, μ は可算加法的である.

$(\Omega, \Sigma_{\text{cc}})$ は標準 Borel でない. 実際, 標準 Borel 空間の σ -代数は可算生成だが, Σ_{cc} は可算生成ではない.

反復可能だが離散的でないインストゥルメント

任意の可分 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上で

$$\mathcal{I}_X(\rho) := \mu(X)\rho$$

とおく．これは CP インストゥルメントで，付随 POVM は

$$M(X) = \mu(X)\mathbb{1}_{\mathcal{H}}$$

である． μ が 0-1 値なので

$$\mathcal{I}_X^\dagger(M(Y)) = \mu(X)\mu(Y)\mathbb{1} = \mu(X \cap Y)\mathbb{1} = M(X \cap Y)$$

すなわち，反復可能である．しかし

$$M(\{x\}) = 0 \quad (x \in \Omega), \quad M(\Omega \setminus \Omega_0) = \mathbb{1}$$

が任意の可算 Ω_0 に対して成り立つため，離散的でない．

操作的には「系には何もせず， μ に従う病的な乱数を出す」操作である．ただし， μ は各一点が零という意味でのみ連続であり，測度論的には Ω 全体が atom である．

反例が教えること

可算・余可算 σ -代数では、二回の出力 (x_1, x_2) について

$$\{(x_1, x_2) : x_1 = x_2\}$$

という対角集合が積 σ -代数に入らないことさえある．したがって、「二つの点値が等しい」という通常の問いが可測でない．

setwise な反復可能性

$$\Pr[x_1 \in X, x_2 \in Y] = \Pr[x \in X \cap Y]$$

だけでは、この病理を排除できない．

標準 Borel 性は単なる技術条件ではなく、点としての測定結果を通常どおり扱えることを保証する．

第4部：Wigner–Araki–Yanase 定理

保存則は，正確に実装できる測定・操作を制限する

- ▶ 柳瀬睦男（1922–2008）は物理学者・哲学者であり、イエズス会司祭でもあった。東京帝国大学で茅誠司の下、強磁性体を実験的に研究した。
- ▶ 1945 年に原子爆弾の惨禍を知った経験を一つの契機に、1947 年イエズス会へ入会し、哲学・神学を学んで 1958 年に司祭叙階された。
- ▶ 上智大学理工学部を設置に伴って物理学へ戻る際、朝永振一郎らから量子力学の観測問題を研究するよう勧められた。「観測問題を物理的に解かずに認識論は論じられない」という動機もあった。
- ▶ 1959–61 年に Princeton 大学、1962–64 年に Institute for Advanced Study に滞在し、Wigner の指導下で研究した。Araki–Yanase (1960), Yanase (1961) へつながった。
- ▶ 学位論文「最良の観測装置について」と Yanase (1961) は、測定誤差と装置の大きさを結ぶ定量的 **WAY 研究の先駆**でもある。

出典：稲葉肇「柳瀬睦男と物理学」日本物理学会誌 74 巻, 792–794 (2019)；Yanase, Phys. Rev. 123, 666 (1961)。

- ▶ Wigner (1952) : 角運動量保存下で、保存量と非可換な二準位測定を反復可能に実装する困難を指摘.
- ▶ Araki–Yanase (1960) : 加法的保存則の下での反復可能測定について一般化.
- ▶ Yanase (1961) : pointer も装置側保存量と可換であるという条件と、近似測定の精度を研究.
- ▶ Ozawa (1984) : CP インストゥルメントの枠内で反復可能性版を定式化.
- ▶ Kuramochi–Tajima (2023) : 非有界保存量を許し、Yanase 条件下の sharp 測定と unitary 操作に対する一般定理を証明.

近似測定・近似操作に対する定量的 WAY 不等式は現在も盛んに研究されているが、本講演では時間の都合上、**exact implementation に対する no-go 定理**に集中する。

出典：Wigner, Z. Phys. 133, 101 (1952) ; Araki–Yanase, Phys. Rev. 120, 622 (1960) ; Kuramochi–Tajima, PRL 131, 210201 (2023).

非有界自己共役作用素 L と有界作用素 A に対して、形式的な交換子 $[A, L]$ は定義域の問題を持つ。本講演では**強可換性**

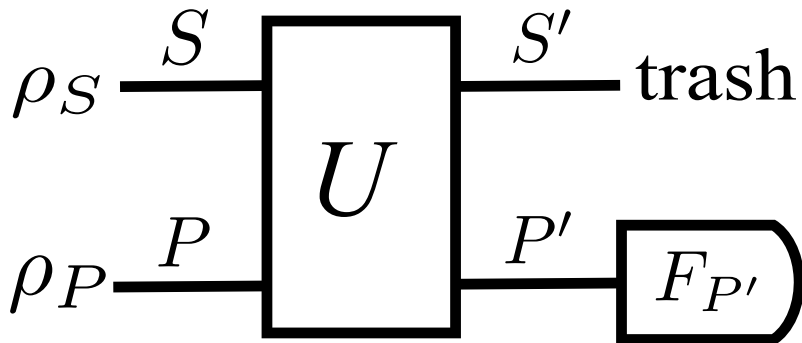
$$AE^L(B) = E^L(B)A \quad (B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

を「 A と L が可換」と呼ぶ。ここで E^L は L のスペクトル測度である。

次は同値である。

$$\begin{aligned} AE^L(B) &= E^L(B)A \quad (B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})), \\ Ae^{itL} &= e^{itL}A \quad (t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

したがって、非有界作用素そのものを CP 写像へ入力せず、**常に有界な unitary 群** e^{itL} を用いれば定義域問題を回避できる。



入力系 S とプローブ P を unitary

$$U : \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_P \longrightarrow \mathcal{H}_{S'} \otimes \mathcal{H}_{P'}$$

で相互作用させ、出力系 S' を捨て、出力プローブ P' の pointer POVM を読み出す．図中の $F_{P'}$ は、本講演の $F_{P'}$ に対応する．

出典：Kuramochi-Tajima, Phys. Rev. Lett. 131, 210201 (2023), Fig. 3.

POVM を正確に実装する条件

プローブ初期状態を $\rho_P \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_P)$, pointer を $F_{P'} : \Sigma \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_{P'})$ とする. この測定モデルが系の POVM E_S を**正確に実装**するとは

$$\mathrm{Tr}[\rho_S E_S(X)] = \mathrm{Tr}[U(\rho_S \otimes \rho_P)U^*(\mathbb{1}_{S'} \otimes F_{P'}(X))]$$

が任意の状態 ρ_S と $X \in \Sigma$ について成立することをいう.

これは Heisenberg 描像では

$$E_S(X) = E_{\rho_P}[U^*(\mathbb{1}_{S'} \otimes F_{P'}(X))U]$$

と書ける. ここでは測定後状態や反復可能性を仮定せず, 出力確率だけを要求する.

加法的保存則を非有界作用素で書く

各系に自己共役な保存量

$$L_S, \quad L_P, \quad L_{S'}, \quad L_{P'}$$

を取り, これらは非有界でもよい. 合成系の加法的保存量を

$$\begin{aligned} L_{SP} &= L_S \otimes \mathbb{1}_P + \mathbb{1}_S \otimes L_P, \\ L_{S'P'} &= L_{S'} \otimes \mathbb{1}_{P'} + \mathbb{1}_{S'} \otimes L_{P'} \end{aligned}$$

とする. ここで tensor 和は, 二つの tensor 因子上の作用素の joint spectral calculus で定める自己共役作用素, すなわち自然な和の自己共役閉包を意味する. **保存則**は自己共役作用素の等式

$$U^* L_{S'P'} U = L_{SP}$$

であり, 定義域の一致も含む. この条件は, 次の式がすべての $t \in \mathbb{R}$ について成立するという条件と同値である:

$$U^* e^{itL_{S'P'}} U = e^{itL_{SP}}$$

tensor 和の二項は強可換なので $e^{itL_{SP}} = e^{itL_S} \otimes e^{itL_P}$ である.

定義

pointer POVM が出力プローブの保存量と可換，すなわち

$$F_{P'}(X)E^{L_{P'}}(B) = E^{L_{P'}}(B)F_{P'}(X)$$

が任意の $X \in \Sigma$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ について成り立つとき，**Yanase 条件**を満たすという．

この条件は，次の式がすべての $X \in \Sigma$, $t \in \mathbb{R}$ について成立するという条件と同値である：

$$[F_{P'}(X), e^{itL_{P'}}] = 0$$

pointer を読み出すこと自体にも同じ保存則の制約がかかるなら，保存量と非可換な pointer へ困難を押し付けることはできない．Yanase 条件はこの「測定連鎖の後退」を止める仮定である．

Kuramochi–Tajima の WAY 定理

前頁までの測定モデルが PVM E_S を正確に実装し、加法的保存則と Yanase 条件を満たすとする。
このとき

$$E_S(X)E^{L_S}(B) = E^{L_S}(B)E_S(X)$$

がすべての $X \in \Sigma$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ について成立する。

すなわち、保存量と強可換でない PVM は、これらの条件の下で正確に測定できない。

仮定していないもの：Hilbert 空間の可分性，標本空間の標準 Borel 性，保存量の有界性・離散性， ρ_P における保存量の有限期待値・有限分散。

出典：Kuramochi–Tajima, Phys. Rev. Lett. 131, 210201 (2023), Theorem 1 ; Supplemental Material, Theorem S.1.

乗法域 (multiplicative domain)

unital CP 写像 $\Lambda : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ に対して

$$\text{MD}(\Lambda) := \{a \in \mathcal{A} : \Lambda(a^*a) = \Lambda(a)^*\Lambda(a), \\ \Lambda(aa^*) = \Lambda(a)\Lambda(a)^*\}$$

を乗法域という。

乗法域の基本性質

$a \in \text{MD}(\Lambda)$ なら、任意の $b \in \mathcal{A}$ に対して

$$\Lambda(ab) = \Lambda(a)\Lambda(b), \quad \Lambda(ba) = \Lambda(b)\Lambda(a)$$

が成立する。

一般の CP 写像は積を保存しないが、乗法域の元だけは * 準同型のように振る舞う。

出典：Choi, Illinois J. Math. 18, 565–574 (1974) ; Paulsen, *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*, Secs. 3.1–3.2.

sharp な像は入力 effect を乗法域へ入れる

unital CP 写像には Schwarz 不等式

$$\Lambda(a)^* \Lambda(a) \leq \Lambda(a^* a)$$

が成立する． $0 \leq x \leq \mathbb{1}$ で，像 $\Lambda(x)$ が射影なら

$$\Lambda(x)^2 \leq \Lambda(x^2) \leq \Lambda(x) = \Lambda(x)^2$$

したがって，すべて等号であり， $x = x^*$ だから

$$x \in \text{MD}(\Lambda)$$

「ぼやけた入力 effect が sharp な射影へ正確に写る」と，その入力は写像にとって積を保存する古典的な元になる．

この短い補題が，以下の WAY 定理の証明を見通しよくする．

証明 1：測定全体を一つの UCP 写像にする

測定モデルから normal UCP 写像

$$\Lambda : \mathbf{B}(\mathcal{H}_{S'} \otimes \mathcal{H}_{P'}) \longrightarrow \mathbf{B}(\mathcal{H}_S)$$

を，任意の $\rho_S \in \mathbf{T}(\mathcal{H}_S)$ に対する双対関係

$$\mathrm{Tr}[\rho_S \Lambda(A)] := \mathrm{Tr}[U(\rho_S \otimes \rho_P)U^* A]$$

で定める．部分トレースの形式式に頼らないので，無限次元でも厳密である．

$$x_X := \mathbb{1}_{S'} \otimes F_{P'}(X)$$

とおけば，正確な実装条件は

$$\Lambda(x_X) = E_S(X)$$

である．右辺は射影， x_X は effect なので，前頁の補題から

$$x_X \in \mathrm{MD}(\Lambda)$$

証明 2：保存則を特性関数へ移す

$$v_t := e^{itL_{S'}} \otimes e^{itL_{P'}}, \quad \varphi(t) := \text{Tr}[\rho_P e^{itL_P}]$$

とおく．保存則から

$$\begin{aligned} \Lambda(v_t) &= E_{\rho_P} [U^* e^{itL_{S'P'}} U] \\ &= E_{\rho_P} [e^{itL_S} \otimes e^{itL_P}] \\ &= \varphi(t) e^{itL_S} \end{aligned}$$

ここで E_{ρ_P} は入力プローブ状態による slice map である．

φ は確率分布 $P_{\rho_P}^{E_{L_P}}$ の特性関数であり，保存量のモーメントが存在しなくても連続で

$$\varphi(0) = 1$$

を満たす．

証明 3：乗法域と Yanase 条件を組み合わせる

Yanase 条件により $x_X v_t = v_t x_X$ である． $x_X \in \text{MD}(\Lambda)$ だから

$$\begin{aligned}\varphi(t)E_S(X)e^{itL_S} &= \Lambda(x_X)\Lambda(v_t) \\ &= \Lambda(x_X v_t) \\ &= \Lambda(v_t x_X) \\ &= \Lambda(v_t)\Lambda(x_X) \\ &= \varphi(t)e^{itL_S}E_S(X)\end{aligned}$$

φ は連続で $\varphi(0) = 1$ なので，ある $\delta > 0$ について

$$|t| < \delta \implies \varphi(t) \neq 0$$

したがって，0 の近傍で $[E_S(X), e^{itL_S}] = 0$ を得る．

証明 4：局所的な可換性から全時刻へ

任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し、十分大きな n を取り $|t/n| < \delta$ とする．前頁から

$$E_S(X)e^{i(t/n)L_S} = e^{i(t/n)L_S}E_S(X)$$

この可換関係を帰納的に n 回用いて

$$E_S(X)e^{itL_S} = E_S(X)(e^{i(t/n)L_S})^n = (e^{i(t/n)L_S})^n E_S(X) = e^{itL_S}E_S(X) \quad (t \in \mathbb{R})$$

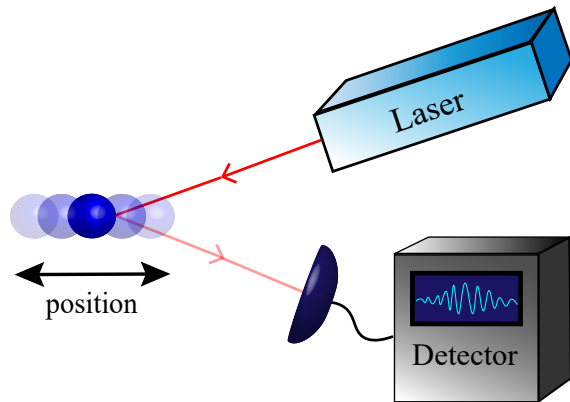
を得る．したがって、スペクトル定理により

$$E_S(X)E^{L_S}(B) = E^{L_S}(B)E_S(X)$$

であり、定理が示された．

証明の要点は、保存量そのものを微分せず、特性関数が 0 の近傍で非零という最小限の事実だけを使うことである．これにより非有界性と無限分散を許せる．

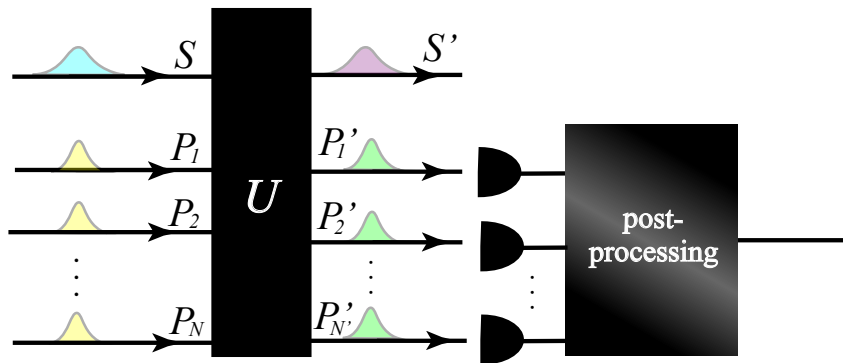
位置測定への WAY 定理の含意



系の運動量 P_S を保存量とすると、位置 PVM E^{Q_S} は P_S と強可換ではない。したがって、全運動量保存と Yanase 条件の下では、**正確な位置測定は不可能**である。

これは位置と運動量の同時測定誤差の主張ではなく、保存則を満たす測定装置による位置 PVM の正確な実装に対する no-go 定理である。

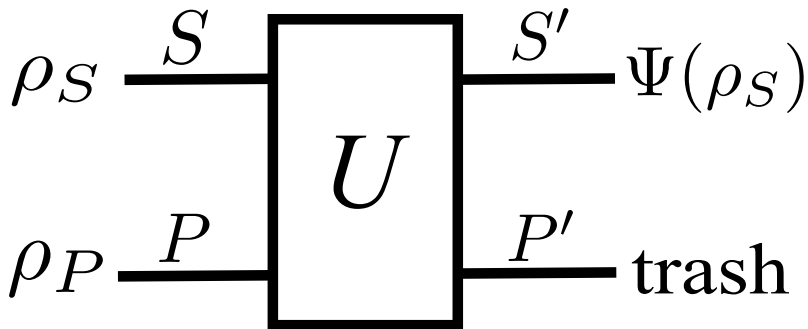
出典：Kuramochi-Tajima, Phys. Rev. Lett. 131, 210201 (2023), Fig. 1 および Theorem 1.



passive 線形光学回路は全光子数を保存し，光子数測定と古典的 post-processing からなる pointer は Yanase 条件を満たす．一方，quadrature PVM E^{Q_θ} は系の光子数 N_S と強可換ではないため，この回路で正確には実装できない．

第 1 部の balanced homodyne 測定は，有限振幅 $|z|$ では離散出力 POVM であり， $|z| \rightarrow \infty$ という強い local oscillator の極限でのみ quadrature PVM へ弱収束する．

出典：Kuramochi–Tajima, Phys. Rev. Lett. 131, 210201 (2023), Fig. 4 ; Theorem 1 の応用．



入力系 S と初期状態 ρ_P のプローブ P を unitary U で相互作用させ、出力プローブ P' を捨てると、系チャンネル

$$\Psi(\rho_S) = \text{Tr}_{P'}[U(\rho_S \otimes \rho_P)U^*]$$

を得る．unitary 操作の正確な実装とは、ある unitary $W : \mathcal{H}_S \rightarrow \mathcal{H}_{S'}$ について $\Psi = \mathcal{U}_W$ となることである．

出典：Kuramochi–Tajima, Phys. Rev. Lett. 131, 210201 (2023), Fig. 2.

前頁の系 – 環境モデルが，unitary $W : \mathcal{H}_S \rightarrow \mathcal{H}_{S'}$ の定める unitary channel $\mathcal{U}_W(\rho) = W\rho W^*$ を正確に実装し，加法的保存則を満たすとする．保存量は非有界でもよい．

Kuramochi–Tajima の unitary 版

ある $\gamma \in \mathbb{R}$ が存在して

$$W^* L_{S'} W = L_S + \gamma \mathbb{1}_S$$

が自己共役作用素の等式として成立する．さらに $\mathcal{H}_S = \mathcal{H}_{S'}$ ， $L_S = L_{S'}$ で L_S が上または下に半有界なら， $\gamma = 0$ であり， $W^* L_S W = L_S$ となる．スペクトル定理により，これは任意の $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ について

$$W E^{L_S}(B) = E^{L_S}(B) W$$

が成立するという条件と同値である．

この定理には pointer も Yanase 条件も不要である．保存量のスペクトルが両方向に非有界なら， $\gamma \neq 0$ の実装もあり得る．

出典：Kuramochi–Tajima, Phys. Rev. Lett. 131, 210201 (2023), Theorem 2 ; Supplemental Material, Theorem S.2.

三つの WAY 型定理は何を仮定するか

定理	保存則以外の追加仮定	結論
Yanase 条件版	pointer が装置側保存量と強可換	被測定 PVM は系保存量と強可換
unitary 操作版	誘導された系チャンネルが unitary である	unitary は系保存量を定数だけずらす
反復可能性版	L_S, L_P が有界；同じ測定を直後に繰り返すと同じ出力統計	被測定 PVM は系保存量と可換

三者は保存則だけからは従わない。正確に残る情報が sharp / reversible / repeatable であるという条件が、乗法域を通じて相互作用の自由度を制限する。

反復可能測定の WAY 定理：有界保存量

同じ系・プローブ空間上の，pointer PVM F を持つ測定モデル $(\mathcal{K}, \sigma, U, F)$ が PVM E を正確に測り，誘導するインストゥルメント $\mathcal{I}$ が弱反復可能とする．

Ozawa の WAY 定理

有界自己共役作用素 $L_S \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$, $L_P \in \mathbf{B}(\mathcal{K})$ について

$$[U, L_S \otimes \mathbb{1}_P + \mathbb{1}_S \otimes L_P] = 0$$

なら

$$\boxed{[E(X), L_S] = 0} \quad (X \in \Sigma)$$

Yanase 条件は仮定しない．また，この定理自体には可分性・標準 Borel 性も不要である．

出典：Ozawa, J. Math. Phys. 25, 79–87 (1984), Theorem 8.1.

反復可能性版：非有界保存量の境界

保存量	現状
L_S, L_P がともに有界	Ozawa (1984) の定理が適用できる.
L_S が有界, L_P が非有界	離散 PVM に対する Araki–Yanase (1960) の反復可能測定 of 枠組みでは, unitary 群と L_S の有界性を用いる修正により扱える.
系保存量 L_S まで非有界	少なくとも Kuramochi–Tajima (2023) の Conclusion の時点では, 一般の反復可能測定版は未解決である. 特に L_S, L_P がともに非有界の場合を含む.

有界保存量・反復可能の場合の証明の最後では $\Lambda(L_S \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes L_P)$ を用いるが, 非有界作用素は UCP 写像の定義域に入らない. Yanase 条件版で成功した特性関数法をそのまま反復可能測定の場合に拡張することはできない (今後の課題).

出典: Araki–Yanase, Phys. Rev. 120, 622–626 (1960), p. 623, footnote 4; Kuramochi–Tajima, PRL 131, 210201 (2023), Conclusion.

主要な一次文献と証明の所在

- ▶ Stinespring, “Positive Functions on C^* -Algebras”, Proc. Amer. Math. Soc. 6, 211–216 (1955).
- ▶ Ozawa, “Quantum measuring processes of continuous observables”, J. Math. Phys. 25, 79–87 (1984) : 実現定理 Thm. 5.1, 離散性 Thm. 6.6, WAY Thm. 8.1.
- ▶ Kuramochi, “Minimal sufficient positive-operator valued measure on a separable Hilbert space”, J. Math. Phys. 56, 102205 (2015) : LSB 統計量と標準 Borel 化, Thms. 3–5.
- ▶ Kuramochi–Tajima, “Wigner–Araki–Yanase Theorem for Continuous and Unbounded Conserved Observables”, Phys. Rev. Lett. 131, 210201 (2023) : Thms. 1–2, 証明は Supplemental Material.
- ▶ Busch–Lahti–Pellonpää–Ylinen, *Quantum Measurement* : POVM, 測定モデル, homodyne 測定を含む体系的な参照先.

各定理のスライド下部に、より具体的な定理番号を示した.

- ▶ POVM は量子状態から古典的確率分布へのアフィン写像を，インストゥルメントは確率と条件付き状態変化を表す．無限次元・連続出力でも同じ枠組みが働く．
- ▶ Naimark 拡張，GNS 表現と purification，Kraus 表示，系－環境モデルを，Stinespring 拡張定理から統一的に導いた．
- ▶ 小澤の拡張定理により，CP インストゥルメントは unitary 相互作用・純粋プローブ・pointer PVM を用いる測定モデルとして実現できる．
- ▶ 可分 Hilbert 空間・標準 Borel 出力では，反復可能インストゥルメントの出力 POVM は離散的である．
- ▶ 拡張定理は，系の時間発展の unitary 性という物理法則がもたらす，可能な量子操作の構造・制限と見なせる．
- ▶ WAY 定理は，保存則という物理法則がもたらす，正確に実装可能な量子測定・量子操作への制限と見なせる．