

Tensor Network Formulation of PT-Symmetric Quantum Field Theory

菊地 健吾
大阪公立大学

共同研究者 初田泰之(立教大)

“Tensor Network Formulation of PT-Symmetric Quantum Field Theory”
Y. Hatsuda, K. Kikuchi,
arXiv:2608.04387

素粒子物理学の進展2026
@YITP 2026/08/24

新しいこと

Tensor Network Formulation
of
PT-Symmetric Quantum Field Theory

非エルミート理論である

PT対称な場の理論を

テンソルネットワークの方法を使って

非摂動的に定式化します

Introduction

非エルミート理論

- ・ ハミルトニアンがエルミート対称性を持たない
- ・ ポテンシャルが下に有界でない

$$H = p^2 + m^2 x^2 - (ix)^N$$

$$H = p^2 + m^2 x^2 + ix^3 \quad (N = 3) \quad H \neq H^\dagger, \text{スペクトルが正でない}$$

$$H = p^2 + m^2 x^2 - x^4 \quad (N = 4) \quad \text{理論が発散, well definedでない}$$



PT対称な場の理論

理論が非エルミートであっても、適切な境界条件のもとでPT対称性があれば
スペクトルが正になるように理論を構成できる

Bender and Boettcherの先駆的な研究(1998)

非エルミート理論

歴史的背景

開放量子系： 部分系の有効ハミルトニアンが非エルミートとなる

1928年 Gamow 原子核 α 崩壊 不安定状態を量子力学でどう記述するか

1930-1950年代 Kapur–Peierls, Siegert, Feshbach, out-going境界条件 固有値は複素数

物性系：

1996年 Hatano-Nelson模型 非エルミート局在・非局在転移 localization

2018年 Gong et al. 非エルミート系に固有のトポロジカル相を体系化 topology

2018年 Yao–Wang 非エルミート表皮効果 new boundary physics

1998年 Bender and Boettcherの先駆的な研究

Non-Hermitian operator そのものを、量子論の基本的なスペクトラム問題として定義できるか → PT対称性と適切な境界条件でできる

今回の研究

PT symmetric な非エルミートQFTを非摂動的に定式化できるか

Summary

Tensor network formulation

Tensor network の手法を使って PT対称理論を非摂動的に定式化

複素場に拡張

2つの結果

I . PT対称- $g\phi^4$ 理論

PT対称2次元- $g\phi^4$ 理論に適用
Initial tensorの偶奇parityの対応

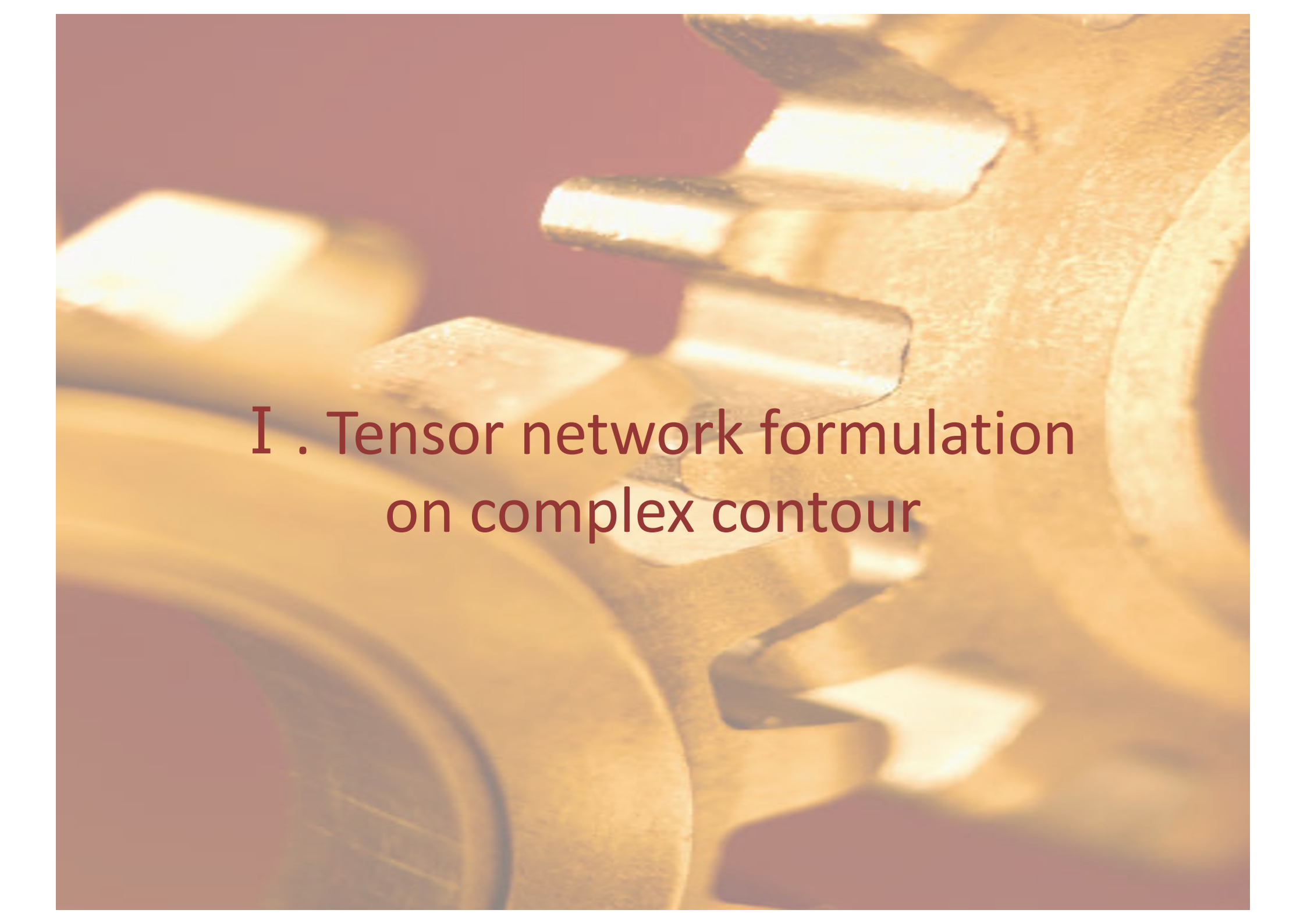
- Even sector 摂動構造
- Odd sector 非摂動構造

Cone contour

II . Wedge理論と解析接続

「Wedge contour上で定義される
非エルミート理論」と
「エルミートな $\lambda\phi^4$ 理論を解析接
続($\lambda \rightarrow -g$)した理論」
の厳密なd次元関係式

Wedge contour



I . Tensor network formulation on complex contour

Setup

経路積分

$$S[\phi] = \int d^2x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \underline{V(\phi)} \right]$$

$$Z = \int_{\phi(x) \in \mathcal{C}} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]}$$

- ・エルミートとは限らない
- ・下に有界とは限らない
- ・PT対称性をもつ

$$\mathcal{P} : \phi \rightarrow -\phi$$

$$\mathcal{T} : \phi \rightarrow \phi, \quad i \rightarrow -i$$

積分経路を複素平面に拡張

格子理論

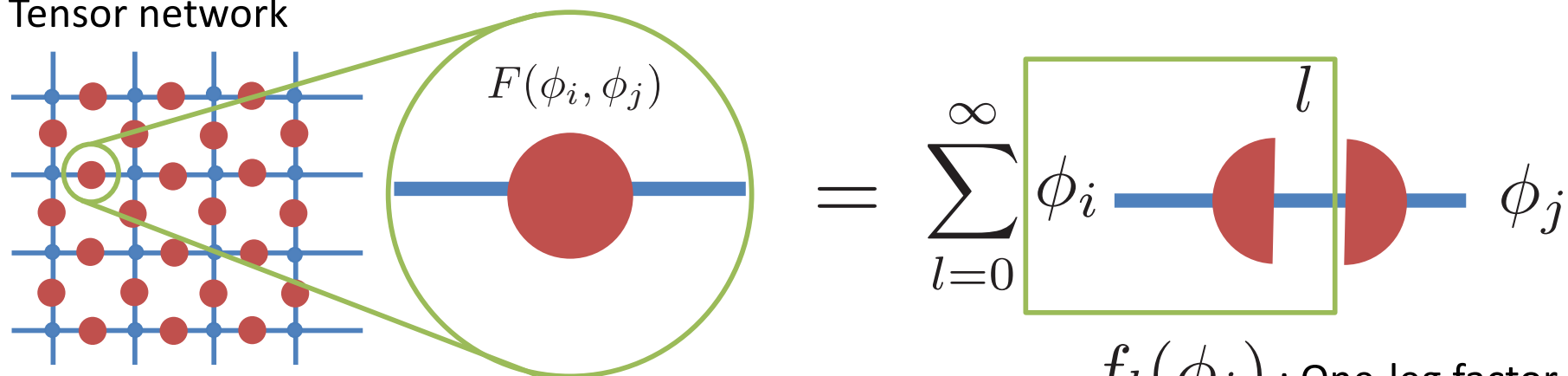
$$S_{\text{lat}}[\phi] = \sum_{\langle i,j \rangle} \frac{(\phi_i - \phi_j)^2}{2} + \sum_{i \in \Lambda} V(\phi_i)$$

$$Z = \prod_{i \in \Lambda} \int_{\mathcal{C}} d\phi_i e^{-S_{\text{lat}}[\phi]}$$

これをTensor network化する

Tensor network

Tensor network



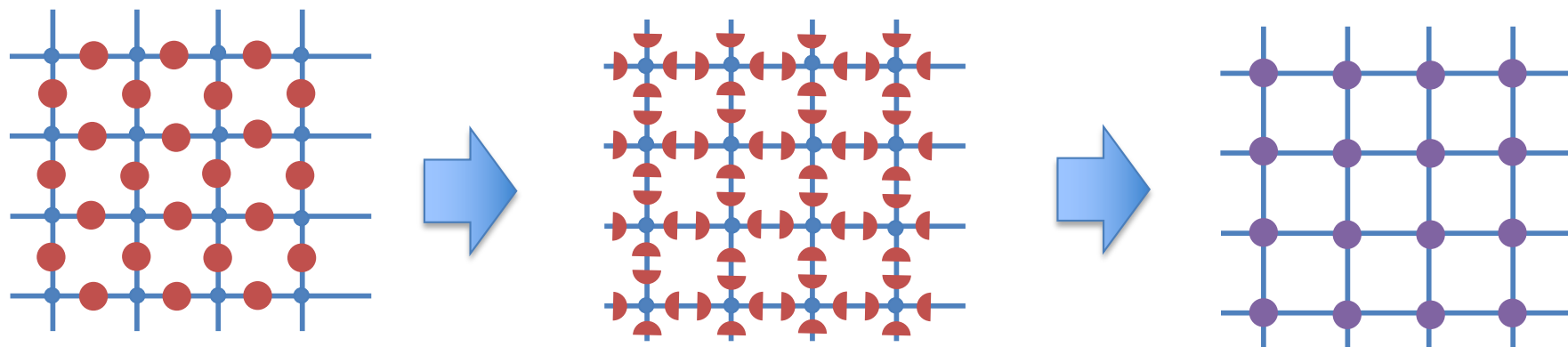
$f_l(\phi_i)$: One-leg factor

$$F(\phi_i, \phi_j) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(\phi_i) f_l(\phi_j)$$

● : $F(\phi_i, \phi_j)$ bond tensor (モデル依存の情報)

● : delta tensor (同格子上の場の同一視)

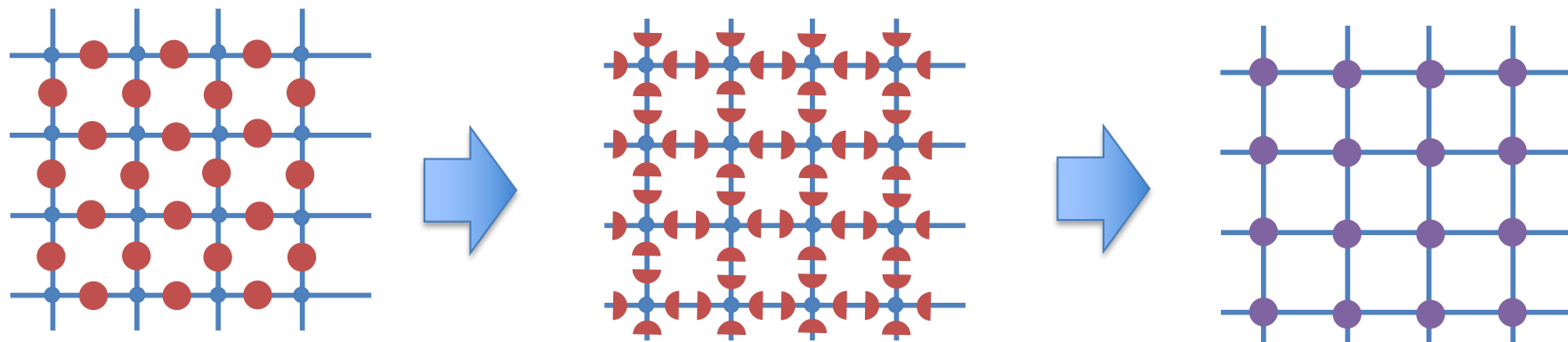
線を繋ぐこと : ϕ に関する積分をすること



● T_{abcd}

$$T_{abcd} = \int_{\mathcal{C}} d\phi f_a(\phi) f_b(\phi) f_c(\phi) f_d(\phi)$$

Tensor network 2



Initial tensor

$$T_{abcd} = f_a \text{ --- } \text{red semi-circles} \text{ --- } f_b = a \text{ --- } \text{purple circle} \text{ --- } b$$

f_c (top), f_d (bottom), c (top), d (bottom)

● T_{abcd} element

$$T_{abcd} = \int_c d\phi f_a(\phi) f_b(\phi) f_c(\phi) f_d(\phi)$$

Partition function

$$Z = \text{tTr}[T_{abcd}] \text{ 全ての縮約をとる}$$

Tensor network化 場 ϕ の積分で書かれた分配関数をbond indicesの縮約として書き直すこと

Taylor expansion

Action

$$S_{\text{lat}}[\phi] = \sum_{\langle i,j \rangle} \frac{(\phi_i - \phi_j)^2}{2} + \sum_{i \in \Lambda} V(\phi_i)$$

$$= \sum_{\langle i,j \rangle} \left(\frac{\phi_i^2}{2} + \frac{\phi_j^2}{2} - \underbrace{\phi_i \phi_j}_{\downarrow} \right) + \frac{1}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} \{V(\phi_i) + V(\phi_j)\}$$

このcross termのせいで積分を一変数にできない

One-leg factor

$$f_l(\phi) = \frac{\phi^l}{\sqrt{l!}} \exp \left[-\frac{\phi^2}{2} - \frac{1}{4} V(\phi) \right]$$

Taylor展開で変数をdecoupleさせる

$$\exp [\phi_i \phi_j] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_i^n \phi_j^n}{n!}$$

Initial tensor

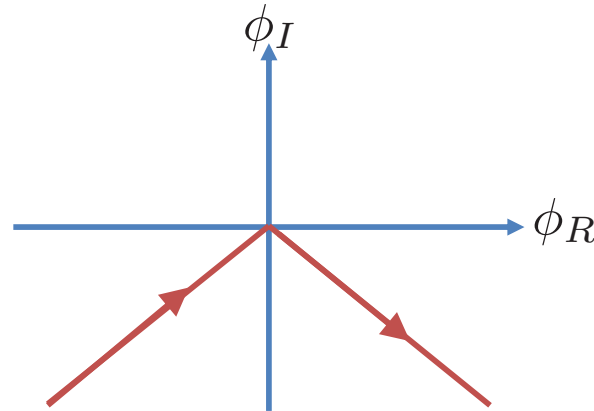
$$T_{abcd} = \int_{\mathcal{C}} d\phi f_a(\phi) f_b(\phi) f_c(\phi) f_d(\phi)$$

$$= \int_{\mathcal{C}} d\phi \frac{\phi^{a+b+c+d}}{\sqrt{a!b!c!d!}} \exp [-2\phi^2 - V(\phi)]$$

$$Z = \text{tTr}[T_{abcd}]$$

複素経路C

複素経路の選び方によって理論が違う



$$s \in \mathbb{R}$$

$$\phi \in \mathbb{C}$$

Cone contour

$$\phi = s \left(e^{\frac{\pi i}{4}} \theta(-s) + e^{-\frac{\pi i}{4}} \theta(s) \right)$$

- Local (各sごとに折れ曲がり方が決まる)
- PT theoryに対応

Wedge contour

$$\phi_0 = s_0 \left(e^{\frac{\pi i}{4}} \theta(-s_0) + e^{-\frac{\pi i}{4}} \theta(s_0) \right)$$

$$\phi_i = s_i \left(e^{\frac{\pi i}{4}} \theta(-s_0) + e^{-\frac{\pi i}{4}} \theta(s_0) \right)$$

- Global (s_0 によって全ての折れ曲がりが決まる)
- PT theoryではない
- Hermite $\lambda\phi^4$ 理論の $\lambda \rightarrow -g$ への解析接続された理論と厳密な関係がある



Ⅱ . PT対称2次元- $g\phi^4$ 理論

2次元- $g\phi^4$ 理論

$$S_{\text{lat}}[\phi] = \sum_{\langle i,j \rangle} \frac{(\phi_i - \phi_j)^2}{2} + \sum_{i \in \Lambda} \left[\frac{\mu_0^2}{2} \phi_i^2 - \frac{g}{4} \phi_i^4 \right]$$

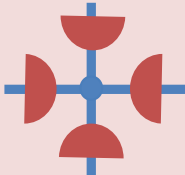
quartic termが負なので下に有界でない → 積分経路が通常の実軸だと ill-defined

積分経路を複素に拡張、cone contour (PT対称な場の理論) を選ぶ

$$\phi = s \left(e^{\frac{\pi i}{4}} \theta(-s) + e^{-\frac{\pi i}{4}} \theta(s) \right)$$

$\phi^4 = -s^4$ なので、下に有界 複素経路で安定

One-leg factor $f_l(\phi) = \frac{\phi^l}{\sqrt{l!}} \exp \left[- \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu_0^2}{8} \right) \phi^2 + \frac{g}{16} \phi^4 \right]$ 

Initial tensor $T_{abcd}^{\text{cone}} = \frac{h^{\text{cone}}(j, A, g)}{\sqrt{a!b!c!d!}}$ 

h function $h^{\text{cone}}(j, A, g) \equiv \int_{\mathcal{C}^{\text{cone}}} d\phi \phi^j \exp \left[-A\phi^2 + \frac{g}{4}\phi^4 \right]$

$$j \equiv a + b + c + d \quad A \equiv 2 + \mu_0^2/2$$

h functionにtensorの情報が入っている

h-関数

$$h^{\text{cone}}(j, A, g) \equiv \int_{\mathcal{C}^{\text{cone}}} d\phi \phi^j \exp \left[-A\phi^2 + \frac{g}{4}\phi^4 \right]$$

1変数化されているので、cone contour(PT対称理論)と相性が良い。
(経路積分の形では 2^V の場合分けが必要)

$$j \equiv a + b + c + d$$

$$A \equiv 2 + \mu_0^2/2$$

Cone contour $\phi = s \left(e^{\frac{\pi i}{4}} \theta(-s) + e^{-\frac{\pi i}{4}} \theta(s) \right)$

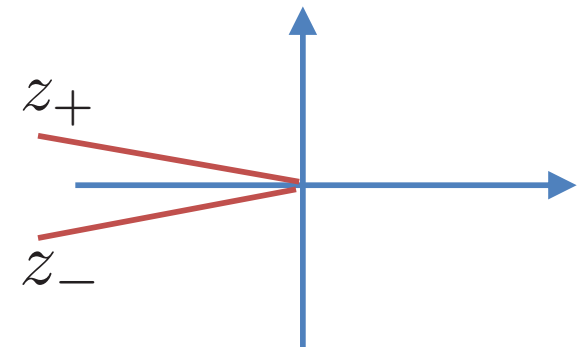
$$h^{\text{cone}}(j, A, g) = \underbrace{(-1)^j e^{\frac{\pi i}{4}(1+j)} I_j(A, g)}_{\text{実負の領域}} + \underbrace{e^{-\frac{\pi i}{4}(1+j)} I_j^*(A, g)}_{\text{実正の領域}}$$

$$I_j(A, g) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{g} \right)^{\frac{1+j}{4}} \Gamma \left(\frac{1+j}{2} \right) U \left(\frac{1+j}{4}, \frac{1}{2}, z_+ \right)$$

Tricomiの合流型超幾何関数Uを使って解析的に計算できる

$U(\alpha, \beta, z)$ は z の負軸に分枝

$$z_{\pm} = -A^2/g \pm i0$$



Initial tensor

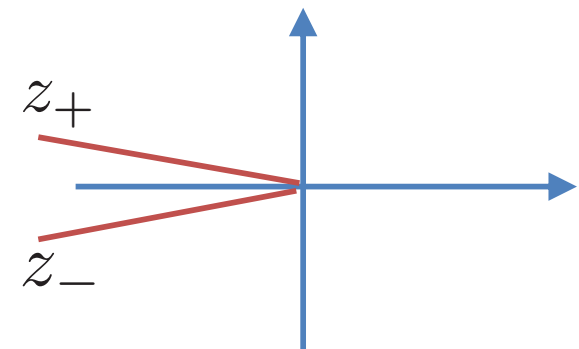
Initial tensor

$$T_{abcd}^{\text{cone}} = \frac{1}{2} \left[\tilde{T}_{+,abcd} + (-1)^j \tilde{T}_{-,abcd} \right]$$

where

$$\tilde{T}_{\pm,abcd} = e^{\mp i\pi \frac{1+j}{4}} \frac{1}{\sqrt{a!b!c!d!}} \left(\frac{1}{g} \right)^{\frac{1+j}{4}} \Gamma \left(\frac{1+j}{2} \right) U \left(\frac{1+j}{4}, \frac{1}{2}, z_{\mp} \right)$$

$$\left(\tilde{T}_{+,abcd} \right)^* = \tilde{T}_{-,abcd}$$



Tensorの添字の総和jの偶奇性によって性質が大きく異なる

$j = a + b + c + d$ が偶数か奇数か

Even sector

$$T_{abcd}^{\text{cone}} = \frac{1}{2} \left(\tilde{T}_{+,abcd} + \tilde{T}_{-,abcd} \right)$$

Complex conjugateの和なので実数である

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{a!b!c!d!}} \left(\frac{1}{g} \right)^{\frac{1+j}{4}} \Gamma \left(\frac{1+j}{2} \right) \Sigma(X)$$

$$\Sigma(X) = e^{-i\pi \frac{1+j}{4}} U_- + e^{i\pi \frac{1+j}{4}} U_+$$

$X = A^2/g$

Large X asymptotic expansion (g-small展開)

$$\Sigma(X) \sim 2 \left(\frac{g}{A^2} \right)^{\frac{1+j}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{j+1}{4} \right)_n \left(\frac{j+3}{4} \right)_n}{n!} \left(\frac{g}{A^2} \right)^n$$

Even sectorはLocal tensorのレベルで摂動的だとわかる

Even sector

T_{abcd}^{cone} は Even sector で
 Initial tensor $a + b + c + d = 2n$

- ・摂動的
- ・実数

(Asymptotic展開)

Odd sector

$$T_{abcd}^{\text{cone}} = \frac{1}{2} \left(\tilde{T}_{+,abcd} - \tilde{T}_{-,abcd} \right)$$

Complex conjugateの差なので純虚数である

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{a!b!c!d!}} \left(\frac{1}{g} \right)^{\frac{1+j}{4}} \Gamma \left(\frac{1+j}{2} \right) \Delta(X)$$

$$\Delta(X) \equiv e^{-i\pi \frac{1+j}{4}} U_- - e^{i\pi \frac{1+j}{4}} U_+$$



摂動項は打ち消す

$$\Delta(X) \propto e^{-A^2/g} \times \text{finite polynomial}$$

Odd sector

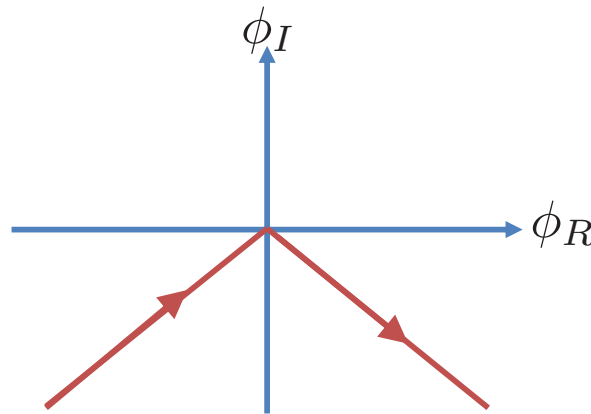
T_{abcd}^{cone} は Odd sector で

- ・非摂動的
- ・有限項
- ・純虚数

Odd sector 2

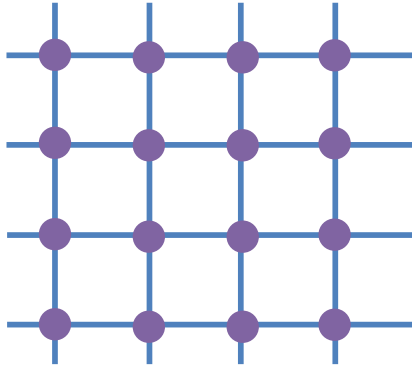
$$h(j, A, g) = \int_{\mathbb{R}} d\phi \phi^j \exp \left[-A\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 \right]$$

実軸の積分だったら、 j が奇数のときはそもそも奇関数なので0



Odd sectorの非摂動的成分はcone contourをとった時の、経路の Z_2 対称性の破れに起因

Short summary



局所tensorのレベルで

$$j \equiv a + b + c + d$$

Even sector : 実数 摂動的

Odd sector : 純虚数 非摂動的 有限項

- ・ 分配関数の実性は、Odd tensorが必ず偶数個出てくるため保証されている
- ・ 分配関数を求める時はすべての添字について和をとるのでjは固定されない

Full tensor traceを取る前でも、Local tensorのレベルで、
非摂動構造が見えている

Short summary

Tensor network formalismを使って、PT対称な場の理論を解析

Taylor展開によって一変数積分に落とすことができる
Cone contourの積分経路で、PT対称- $g\phi^4$ 理論を解析



Cone contour

$$T_{abcd}^{\text{cone}}$$

Initial tensorの添字の和の偶奇性で性質が分かれる

Local tensorのparity構造

Even sector

実数 摂動的

Odd sector

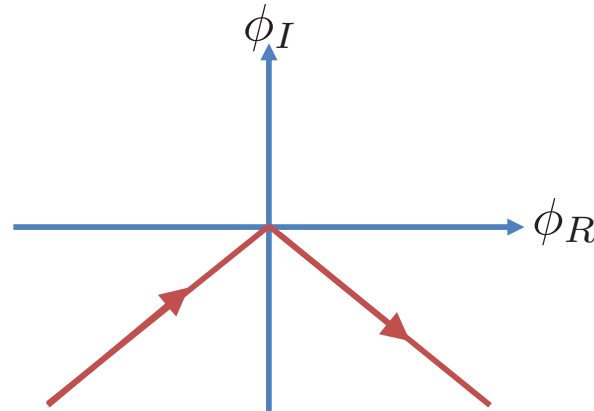
純虚数 非摂動的 有限の項 経路の $\mathbb{Z}_2$ 対称性の破れからnon-zero



Ⅱ . Wedge理論と解析接続

複素経路C

複素経路の選び方によって理論が違う



$$s \in \mathbb{R}$$

$$\phi \in \mathbb{C}$$

Cone contour

$$\phi = s \left(e^{\frac{\pi i}{4}} \theta(-s) + e^{-\frac{\pi i}{4}} \theta(s) \right)$$

- Local (各sごとに折れ曲がり方が決まる)
- PT theoryに対応

Wedge contour

$$\phi_0 = s_0 \left(e^{\frac{\pi i}{4}} \theta(-s_0) + e^{-\frac{\pi i}{4}} \theta(s_0) \right)$$

$$\phi_i = s_i \left(e^{\frac{\pi i}{4}} \theta(-s_0) + e^{-\frac{\pi i}{4}} \theta(s_0) \right)$$

- Global (s_0 によって全ての折れ曲がりが決まる)
- PT theoryではない
- Hermite $\lambda\phi^4$ 理論の $\lambda \rightarrow -g$ への解析接続された理論と厳密な関係がある

Wedge理論と解析接続した理論

$$\begin{aligned}\phi_0 &= s_0 \left(e^{\frac{\pi i}{4}} \theta(-s_0) + e^{-\frac{\pi i}{4}} \theta(s_0) \right) & s \in \mathbb{R} \\ \phi_i &= s_i \left(e^{\frac{\pi i}{4}} \theta(-s_0) + e^{-\frac{\pi i}{4}} \theta(s_0) \right) & \phi \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

- Global (s_0 によって全ての折れ曲がりが決まる)
- PT theoryではない
- Hermite $\lambda\phi^4$ 理論の $\lambda \rightarrow -g$ への解析接続された理論と厳密な関係がある

Wedge contourの $-g\phi^4$ 理論

Hermite理論で λ を $-g$ に解析接続した理論

$$Z_d^{\text{wedge}}(g) = \text{Re } Z_d^H(\lambda = -g)$$

解析的に厳密なd次元の関係式を得た
(これまでは1次元で数値的に予想されていた式)

Z^{wedge} と Z^H の関係

Wedge contour

$$Z_{\pm}^{\text{wedge}}(g) = \underbrace{e^{\pm \frac{i\pi V}{4}}}_{\text{Jacobian}} \text{tTr} \left[T_{\pm}^{\text{wedge}} \right]$$

$$= e^{\pm \frac{i\pi V}{4}} \text{tTr} \left[P_j \frac{(\pm i)^{\frac{j}{2}}}{\sqrt{a!b!c!d!}} \left(\frac{1}{g} \right)^{\frac{1+j}{4}} \Gamma \left(\frac{1+j}{2} \right) U \left(\frac{1+j}{4}, \frac{1}{2}, z_{\pm} \right) \right]$$

Hermite理論 $\lambda \rightarrow -g \pm i0$

$$Z_{\pm}^H(g) = \text{tTr} \left[T_{\pm}^H(g) \right]$$

$$= \underbrace{e^{\mp \frac{i\pi V}{4}}}_{\text{解析接続}} \text{tTr} \left[P_j \frac{(\mp i)^{\frac{j}{2}}}{\sqrt{a!b!c!d!}} \left(\frac{1}{g} \right)^{\frac{1+j}{4}} \Gamma \left(\frac{1+j}{2} \right) U \left(\frac{1+j}{4}, \frac{1}{2}, z_{\mp} \right) \right]$$



$$Z_{\pm}^{\text{wedge}}(g) = Z_{\mp}^H(g)$$

$$Z_{d=2}^{\text{wedge}}(g) = \frac{1}{2} \left[\underbrace{Z_{+}^{\text{wedge}}(g)}_{\text{負軸側}} + \underbrace{Z_{-}^{\text{wedge}}(g)}_{\text{正軸側}} \right]$$

$$= \text{Re } Z_{d=2}^H(\lambda = -g)$$

この議論は一般にd次元で可能



III. Summary and discussion

Summary

Tensor network formulation

Tensor network の手法を使って PT対称理論を非摂動的に定式化

2つの結果

I . PT対称- $g\phi^4$ 理論

Cone contour

PT対称2次元- $g\phi^4$ 理論に適用
Initial tensorの偶奇parityの対応

- Even sector 実、摂動構造
- Odd sector 純虚、非摂動構造
有限項

II . Wedge理論と解析接続

Wedge contour

「Wedge contour上で定義される非エルミート理論」と
「エルミートな $\lambda\phi^4$ 理論を解析接続
($\lambda \rightarrow -g$)した理論」
の厳密なd次元関係式

$$Z_d^{\text{wedge}}(g) = \text{Re } Z_d^H(\lambda = -g)$$

Tensor network の手法を数値計算ツールとしてだけでなく、非摂動的構造を解析的に調べる方法、定式化として適用

Future work

- 具体的なInitial tensorが定義できた
→ 具体的な数値計算が可能。物理量の測定、自由エネルギー等
PT対称- $g\phi^4$ 理論の繰り込み群、相構造や臨界現象
- 他の非エルミート理論の解析
→ $i\phi^3$ 、 $i\phi^5$ 理論など
- 非ユニタリーCFTとの関係
- Cone contourとWedge contour (Hermite理論の解析接続された理論)との関係