

Stringy Constraints on Modular Flavor Models

甲斐 貴文 (九州大学)

素粒子物理学の進展 2026, 2026/08/26

共同研究者：石黒奎弥, 小林達夫 (北大), 大塚啓 (九大)

arXiv:2508.12392 [hep-ph]に基づく (accepted by PTEP)

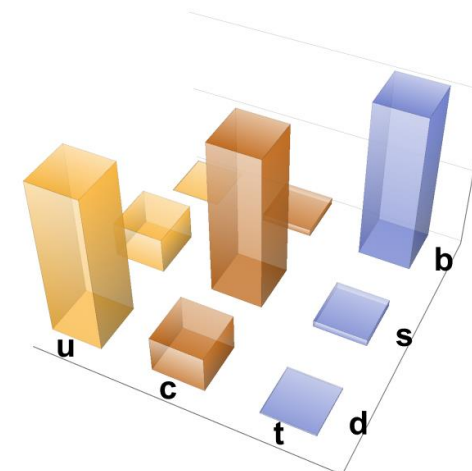
フレーバー構造とモジュラー対称性

フレーバーの謎

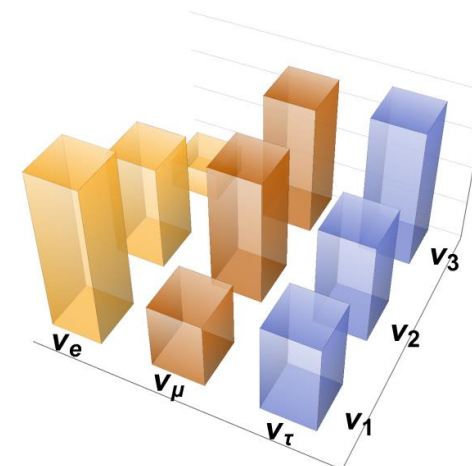
標準模型には、クォークやレプトンの質量、混合角、CP位相など多くのパラメータが存在する

フレーバーセクターにおけるこれらのパラメータの起源とは？

クォーク



レプトン



フレーバー構造とモジュラー対称性

フレーバーの謎

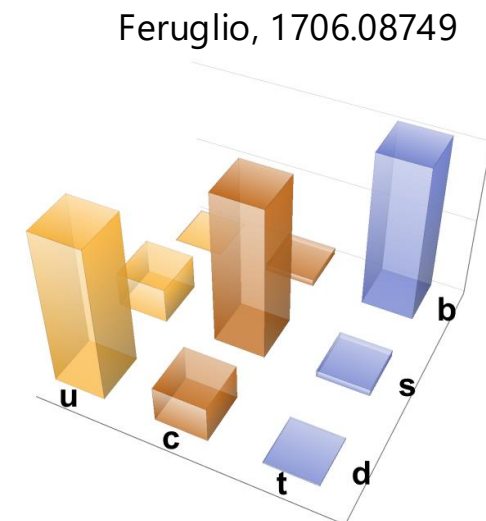
標準模型には、クォークやレプトンの質量、混合角、CP位相など多くのパラメータが存在する

フレーバーセクターにおけるこれらのパラメータの起源とは？

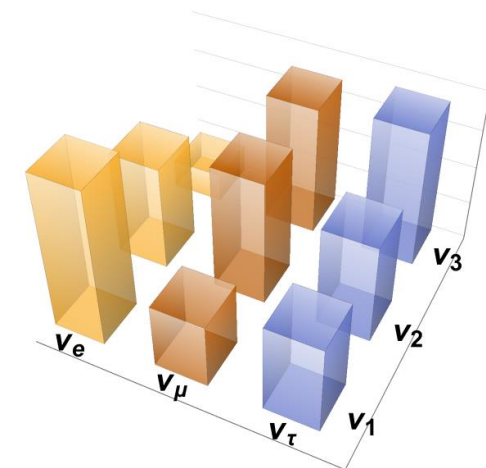
1つの可能性：**モジュラー対称性**

モジュラー対称性は、フレーバーに対して豊かな構造を与える

クォーク



レプトン



フレーバー構造とモジュラー対称性

フレーバーの謎

標準模型には、クォークやレプトンの質量、混合角、CP位相など多くのパラメータが存在する

フレーバーセクターにおけるこれらのパラメータの起源とは？

1つの可能性: **モジュラー対称性**

モジュラー対称性は、フレーバーに対して豊かな構造を与える

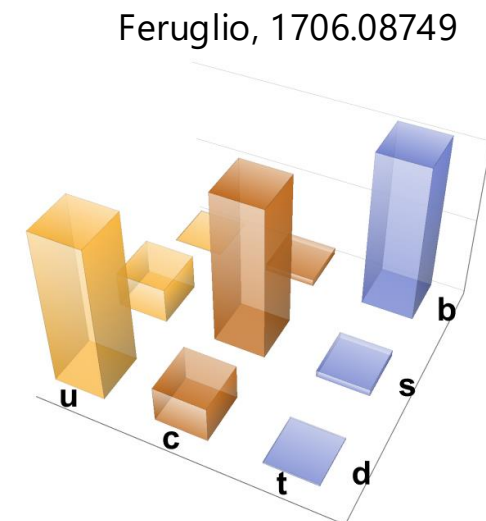
フレーバーの表現 → **モジュラー群** (非可換離散群)

$$SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

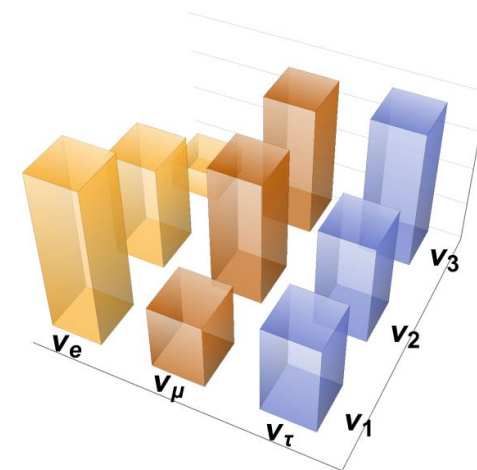
湯川結合 → **モジュラー形式**

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^{2k} f(\tau), \quad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \bar{\Gamma}(N) \right)$$

クォーク



レプトン



フレーバー構造とモジュラー対称性

Criado, Feruglio, *SciPost Phys.* **5** (2018) 042

Kobayashi, Omoto, Shimizu, Takagi, Tanimoto, Tatsuishi, *JHEP* **11** (2018) 196

Novichkov, Penedo, Petcov, Titov, *JHEP* **04** (2019) 005

従来のフレーバーモデル

複数の flavon の VEVs とその向き (vacuum alignment) を選ぶ必要があった

モジュラーフレーバーモデル

モジュラー対称性の下では湯川結合が**単一の複素パラメータ** の関数 (モジュラー形式) で与えられる
模型ごとに与えた weight・level に関するモジュラー形式の空間は有限次元なので湯川結合の構造が強く制限される

フレーバー構造とモジュラー対称性

Criado, Feruglio, *SciPost Phys.* **5** (2018) 042

Kobayashi, Omoto, Shimizu, Takagi, Tanimoto, Tatsuishi, *JHEP* **11** (2018) 196

Novichkov, Penedo, Petcov, Titov, *JHEP* **04** (2019) 005

従来のフレーバーモデル

複数の flavon の VEVs とその向き (vacuum alignment) を選ぶ必要があった

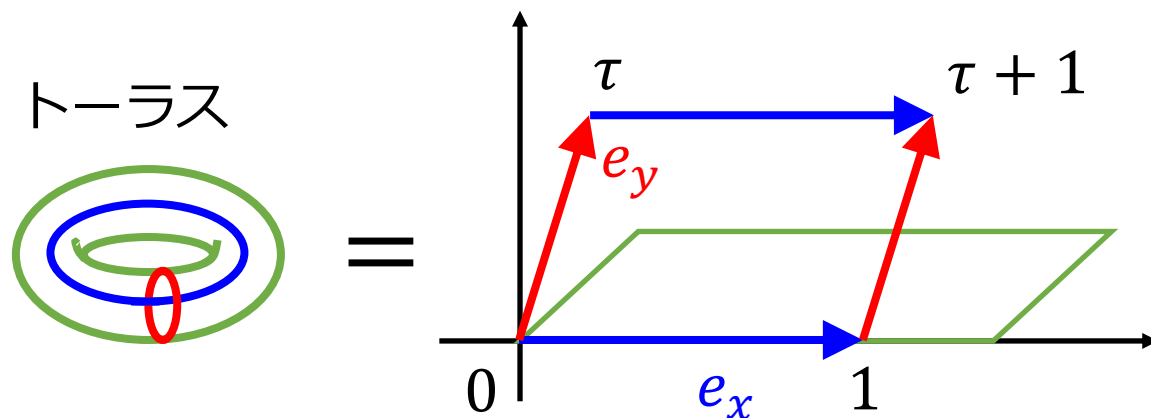
モジュラーフレーバーモデル

モジュラー対称性の下では湯川結合が**単一の複素パラメータ** の関数 (モジュラー形式) で与えられる
模型ごとに与えた weight・level に関するモジュラー形式の空間は有限次元なので湯川結合の構造が強く制限される

クォーク・レプトンの質量と混合を観測量より少ないパラメータで記述でき、
観測量間の相関を通じて、模型が実験的に検証されうる

モジュラー変換と幾何学的構造

トーラス



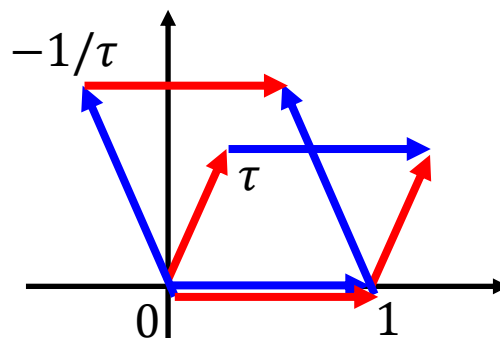
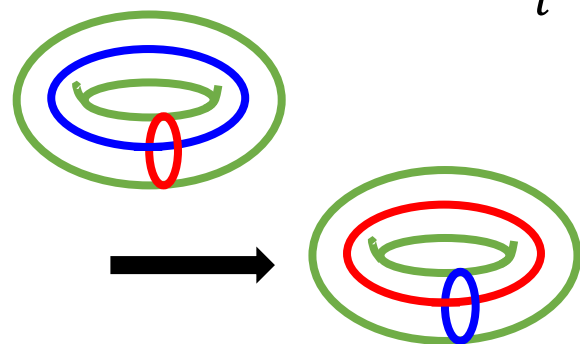
$PSL(2, \mathbb{Z})$ の生成子

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad S^2 = \mathbb{I}, \quad (ST)^3 = \mathbb{I}.$$

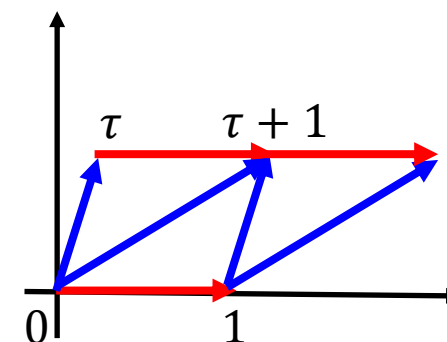
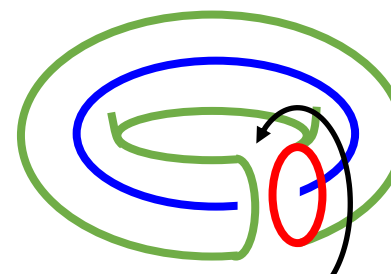
複素構造モジュライ: τ

$$\tau := \frac{e_y}{e_x} \rightarrow \tau' = \frac{e'_y}{e'_x} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

$$S: \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}$$



$$T: \tau \rightarrow \tau + 1$$



余剰次元空間

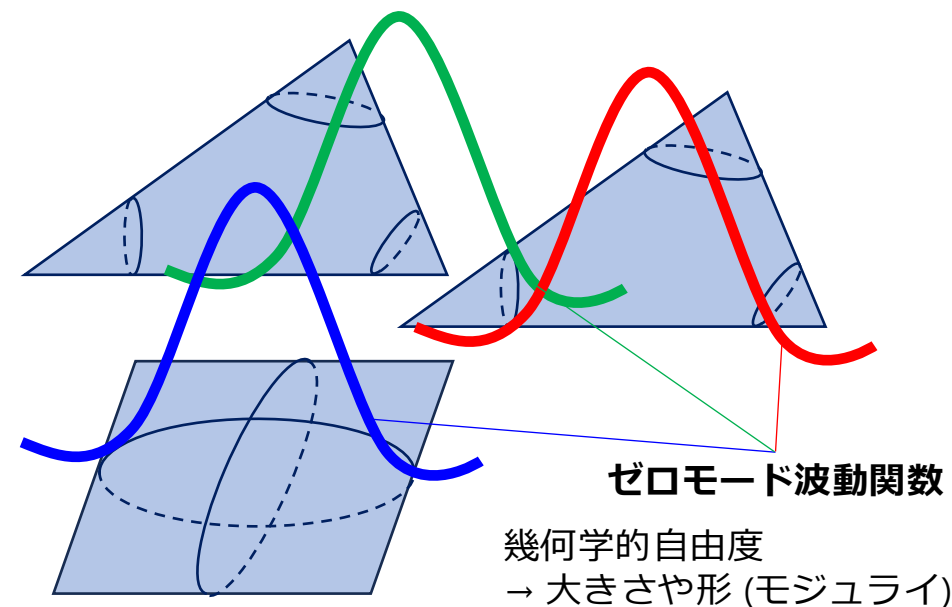
標準模型におけるフレーバー

matter (fermions)			
quarks	 u : up	 C : charm	 t : top
	 d : down	 s : strange	 b : bottom
	 e : electron	 μ : muon	 τ : tau
leptons	 ν_e : electron neutrino	 ν_μ : muon neutrino	 ν_τ : tau neutrino

higgstan.com

湯川結合

$$Y_{ijk}(\tau)$$



Strominger, Witten, *Commun. Math. Phys.* **101** (1985) 341

Candelas, *Nuclear Physics B* **298** (1988) 458

Ishiguro, Kobayashi, Nishimura, Otsuka, *JHEP* **08** (2024) 088

余剰次元空間の変形は**モジュラー変換**として記述でき、その変形のもとで不変性を考えることで、有効理論にモジュラー対称性を導入することができる

余剰次元空間

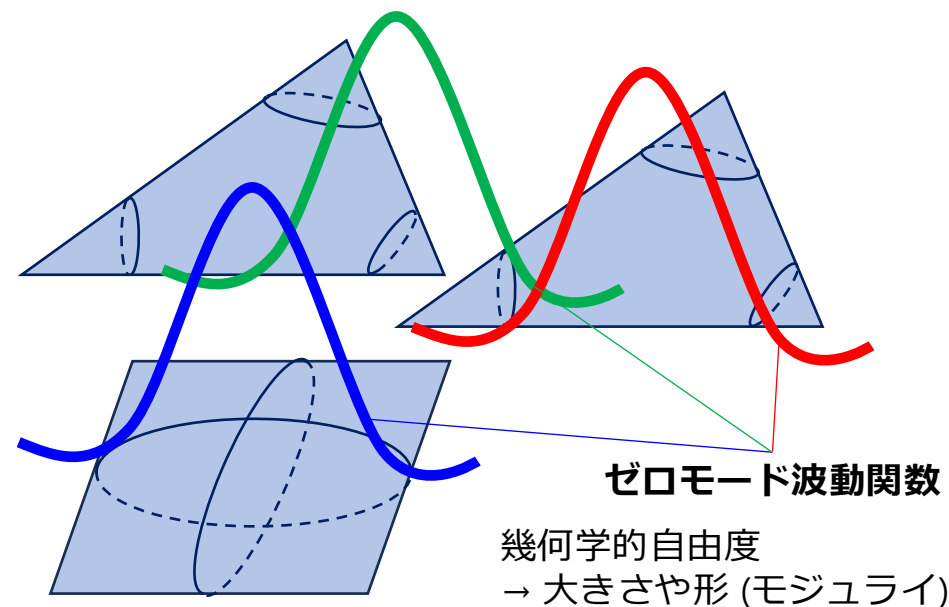
標準模型におけるフレーバー

matter (fermions)			
quarks	 u : up	 C : charm	 t : top
	 d : down	 s : strange	 b : bottom
	 e : electron	 μ : muon	 τ : tau
leptons	 ν_e : electron neutrino	 ν_μ : muon neutrino	 ν_τ : tau neutrino

湯川結合

$$Y_{ijk}(\tau)$$

higgstan.com



Strominger, Witten, *Commun. Math. Phys.* **101** (1985) 341

Candelas, *Nuclear Physics B* **298** (1988) 458

Ishiguro, Kobayashi, Nishimura, Otsuka, *JHEP* **08** (2024) 088

余剰次元空間の変形は**モジュラー変換**として記述でき、その変形のもとで不変性を考えることで、有効理論にモジュラー対称性を導入することができる

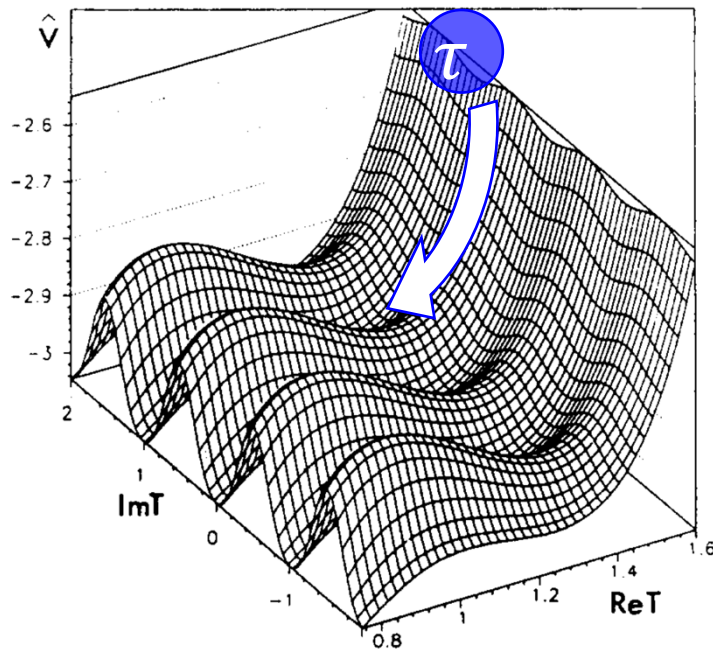
ヘテロティック弦理論に基づくトップダウン模型構築において、湯川結合は**モジュラー形式**で記述できることが知られている

モジュラー対称性の破れ

Font, Ibáñez, Lüst, Quevedo , *Phys.Lett.B* **245** (1990) 401-408

余剰次元空間におけるモジュライは、4次元有効理論において**スカラー場**として振る舞う
ヘテロティック弦理論の有効理論において、モジュライ場のポテンシャルを構築できる

→ モジュライ場の**真空期待値 (VEV)** を決定する**メカニズム**が存在する

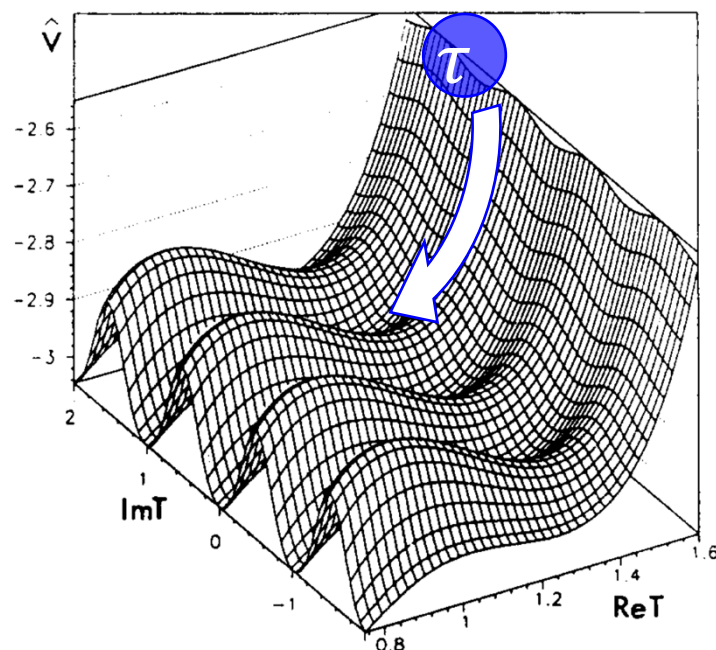


モジュラー対称性の破れ

Font, Ibáñez, Lüst, Quevedo , *Phys.Lett.B* **245** (1990) 401-408

余剰次元空間におけるモジュライは、4次元有効理論において**スカラー場**として振る舞う
ヘテロティック弦理論の有効理論において、モジュライ場のポテンシャルを構築できる

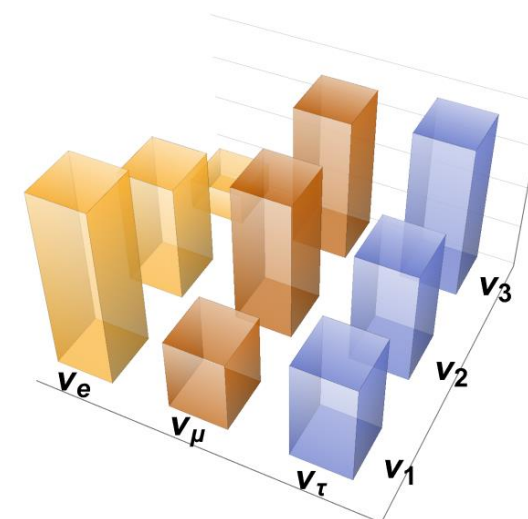
→ モジュライ場の**真空期待値 (VEV)** を決定する**メカニズム**が存在する



モジュラーフレイバー模型が
弦理論の有効理論の中に埋め
込まれていると仮定した場合、



クォーク・レプトンの質量や
混合角の値は、モジュライの
VEVによって特徴づけられる



レプトンのフレイバー構造

問題点

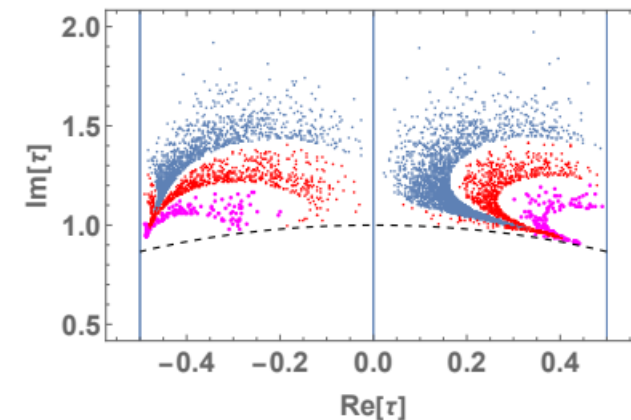
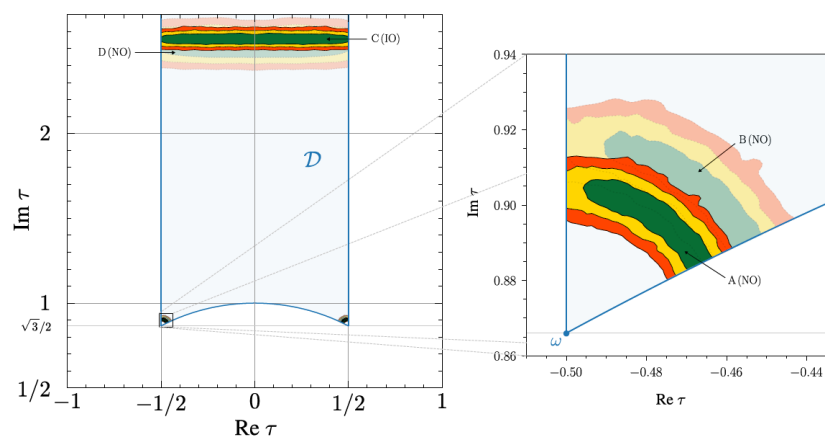
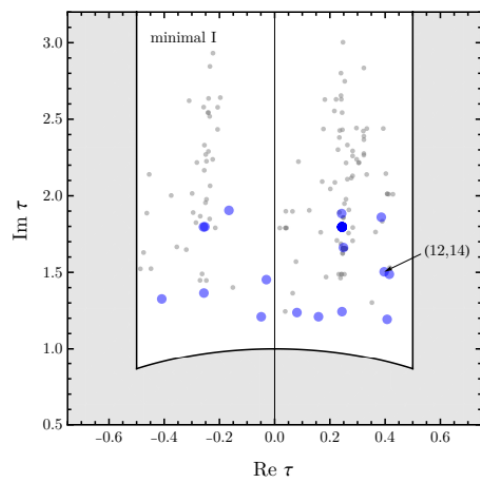
Penedo, Petcov, *JHEP* **10** (2024) 172

Petcov, Tanimoto, *Eur.Phys.J.C* **84** (2024) 9, 914

Granelli, Meloni, Parriciatu, Penedo, Petcov, 2505.21405

多くのモジュラーフレーバーモデルでは、モジュラスのVEVは実質的に自由パラメータであり、観測量へのフィットによって決められている

基本領域内のどの領域が選択されるべきかを**定量的に絞り込む基準**は、モデルにもモジュライ固定にも依らない形では知られていない



問題点

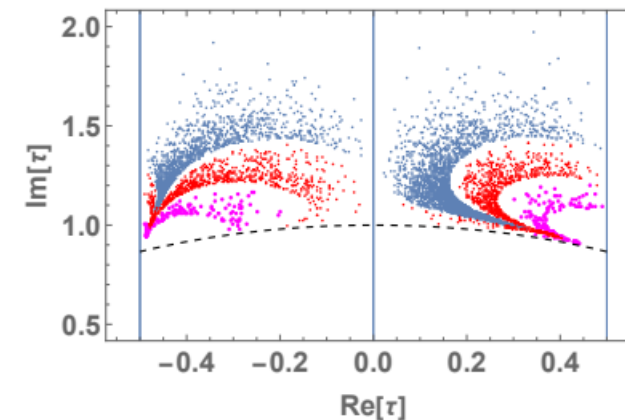
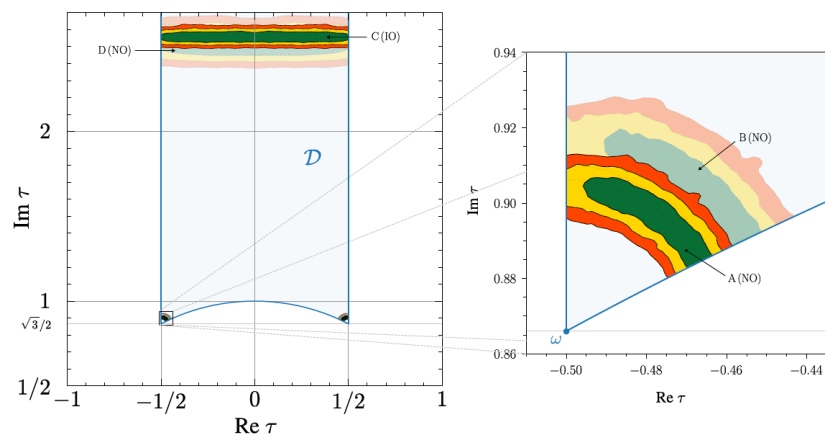
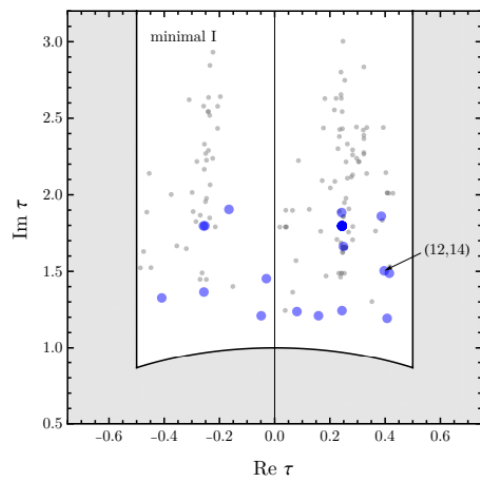
Penedo, Petcov, *JHEP* **10** (2024) 172

Petcov, Tanimoto, *Eur.Phys.J.C* **84** (2024) 9, 914

Granelli, Meloni, Parriciatu, Penedo, Petcov, 2505.21405

研究の動機

ヘテロティック弦理論から導かれる帰結を用いて、基本領域内において**許されるべき領域**を明らかにしたい



弦理論からの制限

Dixon, Kaplunovsky, Louis, *Nucl. Phys. B* **355** (1991) 649

ヘテロティック弦理論の有効理論における**ゲージ結合定数**とその1ループ補正

$$\frac{16\pi^2}{g_a^2(\mu)} = k_a \frac{16\pi^2}{g_{\text{string}}^2} + b_a \log \frac{M_{\text{string}}^2}{\mu^2} + \Delta_a$$

μ : renormalization scale

b_a : beta-function coefficient

k_a : level of Kač-Moody algebra

g_{string} : string coupling

M_{string} : string scale

弦理論からの制限

Dixon, Kaplunovsky, Louis, *Nucl. Phys. B* **355** (1991) 649

ヘテロティック弦理論の有効理論における**ゲージ結合定数**とその1ループ補正

$$\frac{16\pi^2}{g_a^2(\mu)} = k_a \frac{16\pi^2}{g_{\text{string}}^2} + b_a \log \frac{M_{\text{string}}^2}{\mu^2} + \boxed{\Delta_a}$$

μ : renormalization scale
 b_a : beta-function coefficient
 k_a : level of Kač-Moody algebra
 g_{string} : string coupling
 M_{string} : string scale

モジュライ依存性のある閾値補正

チャージを持った重い弦の状態に関する積分から得られる

モジュライ依存性は $\mathcal{N} = 2$ 超対称性を保つセクターからのみ生じる

弦理論からの制限

Dixon, Kaplunovsky, Louis, *Nucl. Phys. B* **355** (1991) 649

ヘテロティック弦理論の有効理論における**ゲージ結合定数**とその1ループ補正

$$\frac{16\pi^2}{g_a^2(\mu)} = k_a \frac{16\pi^2}{g_{\text{string}}^2} + b_a \log \frac{M_{\text{string}}^2}{\mu^2} + \boxed{\Delta_a}$$

μ : renormalization scale
 b_a : beta-function coefficient
 k_a : level of Kač-Moody algebra
 g_{string} : string coupling
 M_{string} : string scale

モジュライ依存性のある閾値補正

弦理論に埋め込まれた多くのモジュラーフレーバーモデルは、弦理論の低エネルギー有効理論における**摂動論**に基づいている

ツリーレベル > 1ループレベル

弦理論からの制限

Dixon, Kaplunovsky, Louis, *Nucl. Phys. B* **355** (1991) 649

ヘテロティック弦理論の有効理論における**ゲージ結合定数**とその1ループ補正

$$\frac{16\pi^2}{g_a^2(\mu)} = k_a \frac{16\pi^2}{g_{\text{string}}^2} + b_a \log \frac{M_{\text{string}}^2}{\mu^2} + \boxed{\Delta_a}$$

μ : renormalization scale
 b_a : beta-function coefficient
 k_a : level of Kač-Moody algebra
 g_{string} : string coupling
 M_{string} : string scale

モジュライ依存性のある閾値補正

弦理論に埋め込まれた多くのモジュラーフレーバーモデルは、弦理論の低エネルギー有効理論における**摂動論**に基づいている

ツリーレベル > 1ループレベル

研究目的

この不等式とモジュライ依存性のある閾値補正を考慮することにより、ヘテロティック弦理論の真空において摂動論の有効性を保証するような、**モジュライ空間**に対する**新たな制限**を提案する

アウトライン

1. イントロダクション

2. モジュライ依存性のある閾値補正

- 閾値補正の具体的な形
- Target space duality symmetries

3. モジュライに対する弦理論からの制限

- 弦理論からの制限の解析
- 様々な解析
- 数値的な解析

4. まとめ

閾値補正の具体的な形：QFTの例

Kaplunovsky, hep-th/9205070

ゲージ理論における閾値補正

QFTが与える1ループの寄与：
$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} \text{Str}(\log L) \equiv \int_0^\infty \frac{dt}{2t} C_\Lambda(t) \cdot \text{Str}(e^{-tL}),$$
$$L = M^2 - D^\lambda D_\lambda - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu$$

Heat kernel (Seeley-DeWitt係数) より、 $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ の係数のみを抽出

$$\mathcal{W}_a^{\text{field}} = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{dt}{t} C_\Lambda(t) \cdot \left[\mathbf{B}_a(t) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \text{str} \left(Q_a^2 \left(\frac{1}{12} - \chi^2 \right) e^{-tM^2} \right) \right],$$

これは、 $(g_a^{\text{bare}})^{-2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ への補正として現れる

$$\begin{aligned} \frac{16\pi^2}{g_a^2} - \frac{16\pi^2 k_a}{g_{\text{GUT}}^2} &= \int_0^\infty \frac{dt}{t} (C_{\text{GUT}}(t) \cdot \mathbf{B}_a(t) - C_{\text{eff}}(t) \cdot b_a) \\ &= 2 \text{str}_{M \neq 0} \left(Q_a^2 \left(\frac{1}{12} - \chi^2 \right) \log \frac{\Lambda_{\text{PV}}^2}{M^2} \right), \end{aligned}$$

閾値補正の具体的な形：QFTの例

Kaplunovsky, hep-th/9205070

ゲージ理論における閾値補正

QFTが与える1ループの寄与：
$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} \text{Str}(\log L) \equiv \int_0^\infty \frac{dt}{2t} C_\Lambda(t) \cdot \text{Str}(e^{-tL}),$$
$$L = M^2 - D^\lambda D_\lambda - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu$$

弦理論由来の閾値補正へと拡張



$$\mathcal{L}_1^{\text{string}} = \int_{\Gamma} \frac{d^2\tau}{\tau_2} \cdot \left[Z(\tau, \bar{\tau}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tr} \left(q^H \bar{q}^{\bar{H}} \right) \right], \quad \begin{aligned} q &:= e^{2\pi i \tau} \\ H &\stackrel{\text{def}}{=} L_0 - \frac{c}{24} \text{ and } \bar{H} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{L}_0 - \frac{\bar{c}}{24} \\ \Gamma &\stackrel{\text{def}}{=} \{ \tau = \tau_1 + i\tau_2 : \tau_2 > 0, |\tau_1| < \frac{1}{2}, |\tau| > 1 \} \end{aligned}$$

弦の分配関数を用いて閾値補正を構築する

閾値補正の具体的な形：弦理論の閾値補正

(1) $PSL_T(2, \mathbb{Z}) \times PSL_U(2, \mathbb{Z})$

$$\Delta_a = -b_a^{\mathcal{N}=2} \ln \left[\frac{8\pi}{3\sqrt{3}} e^{1-\gamma_E} T_2 |\eta(T)|^4 U_2 |\eta(U)|^4 \right]$$

$b_a^{\mathcal{N}=2}$: beta-function coefficient
 γ_E : Euler-Mascheroni constant

Kählerモジュラス : $T = T_1 + i T_2$, **複素構造モジュラス** : $U = U_1 + i U_2$

閾値補正の具体的な形：弦理論の閾値補正

$$(1) \ PSL_T(2, \mathbb{Z}) \times PSL_U(2, \mathbb{Z})$$

$$\Delta_a = -b_a^{\mathcal{N}=2} \ln \left[\frac{8\pi}{3\sqrt{3}} e^{1-\gamma_E} T_2 |\eta(T)|^4 U_2 |\eta(U)|^4 \right]$$

$b_a^{\mathcal{N}=2}$: beta-function coefficient
 γ_E : Euler-Mascheroni constant

Kählerモジュラス : $T = T_1 + i T_2$, **複素構造モジュラス** : $U = U_1 + i U_2$

Dedekind η 関数

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{(6n-1)^2}{24}} = q^{\frac{1}{24}} [1 - q + \dots], \quad (q \equiv e^{2\pi i \tau})$$

η 関数のモジュラー変換

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau} \eta(\tau), \quad \eta(\tau + 1) = e^{\pi i/12} \eta(\tau)$$

閾値補正の具体的な形：弦理論の閾値補正

$$(1) \ PSL_T(2, \mathbb{Z}) \times PSL_U(2, \mathbb{Z})$$

$$\Delta_a = -b_a^{\mathcal{N}=2} \ln \left[\frac{8\pi}{3\sqrt{3}} e^{1-\gamma_E} T_2 |\eta(T)|^4 U_2 |\eta(U)|^4 \right]$$

$b_a^{\mathcal{N}=2}$: beta-function coefficient
 γ_E : Euler-Mascheroni constant

Kählerモジュラス : $T = T_1 + i T_2$, 複素構造モジュラス : $U = U_1 + i U_2$

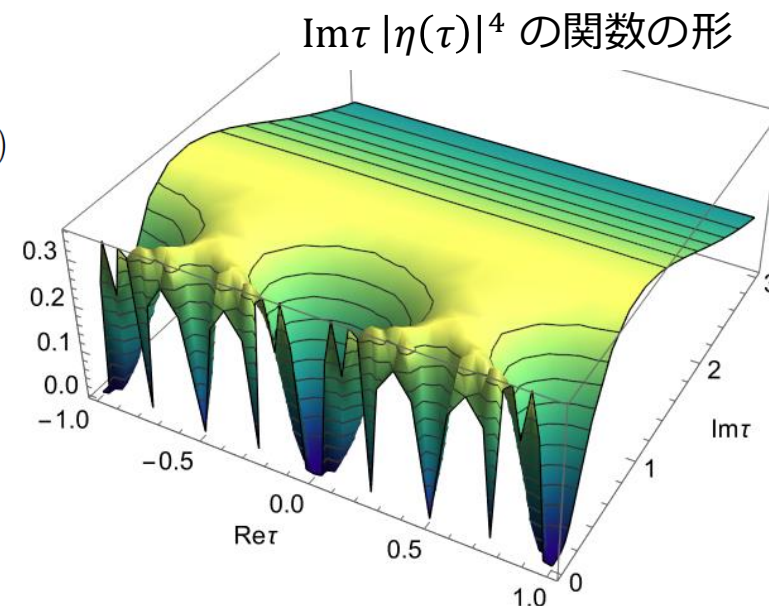
Dedekind η 関数

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{(6n-1)^2}{24}} = q^{\frac{1}{24}} [1 - q + \dots], \quad (q \equiv e^{2\pi i \tau})$$

η 関数のモジュラー変換

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau} \eta(\tau), \quad \eta(\tau + 1) = e^{\pi i/12} \eta(\tau)$$

ツリーレベル = 閾値補正 → 等高線



Target space duality symmetries

閾値補正を体系的に分類するため、 **the target space duality symmetry** (もしくは、モジュラー対称性) について導入する

Target space duality symmetries

閾値補正を体系的に分類するため、 **the target space duality symmetry** (もしくは、モジュラー対称性) について導入する

$$SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S^4 = 1, (ST)^3 = 1$$

$$PSL(2, \mathbb{Z}) : SL(2, \mathbb{Z}) / \{\mathbb{I}, -\mathbb{I}\}$$

$$\text{1次分数変換: } \tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad S : \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}, T : \tau \rightarrow \tau + 1, \quad S^2 = 1, (ST)^3 = 1$$

Target space duality symmetries

閾値補正を体系的に分類するため、 **the target space duality symmetry** (もしくは、モジュラー対称性) について導入する

$$SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S^4 = 1, (ST)^3 = 1$$

$$PSL(2, \mathbb{Z}) : SL(2, \mathbb{Z}) / \{\mathbb{I}, -\mathbb{I}\}$$

$$\text{1次分数変換: } \tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad S : \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}, T : \tau \rightarrow \tau + 1, \quad S^2 = 1, (ST)^3 = 1$$

合同部分群

$$\bar{\Gamma}_0(n) \equiv \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{Z}) \middle| c \equiv 0 \pmod{n} \right\}$$

$$\bar{\Gamma}^0(n) \equiv \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{Z}) \middle| b \equiv 0 \pmod{n} \right\}$$

$$\text{e.g. } \bar{\Gamma}_T^0(2) \times (\bar{\Gamma}_U)_0(2)$$

$$T \rightarrow T + 2, \quad T \rightarrow \frac{T}{T + 1},$$

$$U \rightarrow U + 1, \quad U \rightarrow -\frac{U}{2U - 1},$$

モジュラー変換に対する不変性によって、
閾値補正を分類することができる

その他の分類

Ishiguro, TK, Kobayashi, Otsuka, 2508.12392

モジュラー対称性に基づく閾値補正

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \Gamma_T^0(2) \times (\Gamma_U)_0(2) & (3) \quad & \Gamma_T^0(2) \times PSL(2, \mathbb{Z})_U \\
 \Delta_a = & -b_a^{\mathcal{N}=2} \ln \left[\frac{8\pi}{3\sqrt{3}} e^{1-\gamma_E} T_2 |\eta(T)|^2 \left| \eta\left(\frac{T}{2}\right) \right|^2 U_2 |\eta(U)|^2 |\eta(2U)|^2 \right] & \Delta_a = & -b_a^{\mathcal{N}=2} \ln \left[\frac{8\pi}{3\sqrt{3}} e^{1-\gamma_E} \frac{1}{4^{2/3}} T_2 \left| \eta\left(\frac{T}{2}\right) \right|^4 U_2 |\eta(U)|^4 \right] \\
 (4) \quad & \Gamma_T^0(3) \times (\Gamma_U)_0(3) \text{ and } PSL_{\hat{T}}(2, \mathbb{Z}) \times PSL_{\hat{U}}(2, \mathbb{Z}) & (5) \quad & \Gamma_T^0(3) \times (\Gamma_U)_0(3) \text{ and } \Gamma_{\hat{T}}^0(2) \\
 \Delta_a = & -b_a^{\mathcal{N}=2} \ln \left[\frac{8\pi}{3\sqrt{3}} e^{1-\gamma_E} T_2 |\eta(T)|^2 \left| \eta\left(\frac{T}{3}\right) \right|^2 U_2 |\eta(U)|^2 |\eta(3U)|^2 \right] & \Delta_a = & -b_a^{\mathcal{N}=2} \ln \left[\frac{8\pi}{3\sqrt{3}} e^{1-\gamma_E} T_2 |\eta(T)|^2 \left| \eta\left(\frac{T}{3}\right) \right|^2 U_2 |\eta(U)|^2 |\eta(3U)|^2 \right] \\
 & -b_a^{\mathcal{N}=2} \ln \left[\frac{8\pi}{3\sqrt{3}} e^{1-\gamma_E} \hat{T}_2 |\eta(\hat{T})|^4 \hat{U}_2 |\eta(\hat{U})|^4 \right] & & -b_a^{\mathcal{N}=2} \ln \left[\frac{8\pi}{3\sqrt{3}} e^{1-\gamma_E} \frac{1}{4^{2/3}} \hat{T}_2 \left| \eta\left(\frac{\hat{T}}{2}\right) \right|^4 \frac{\sqrt{3}}{2} |\eta(\omega)|^4 \right]
 \end{aligned}$$

Target space duality symmetry (モジュラー対称性) は閾値補正を体系的に分類することができる

アウトライン

1. イントロダクション
2. モジュライ依存性のある閾値補正
 - 閾値補正の具体的な形
 - Target space duality symmetries
3. **モジュライに対する弦理論からの制限**
 - 弦理論からの制限の解析
 - 様々な解析
 - 数值的な解析
4. まとめ

弦理論からの制限の解析

Ishiguro, TK, Kobayashi, Otsuka, 2508.12392

摂動論の有効性を保証する不等式

$$16\pi^2 k_a \text{Im} S > |\Delta_a|$$

$$\begin{aligned} \text{Axio-dilaton : } S &= C_0 + ie^{-\phi} \\ g_{\text{string}}^{-2} &\sim \text{Im} S + \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

LHS : g_{string}^{-2} に比例するツリーレベルの寄与

RHS : チャージを持った重い弦の状態の積分からくる閾値補正

モジュライ依存性のある閾値補正の絶対値がツリーレベルの寄与より小さいことを要求することで、
このシンプルな不等式が得られる

弦理論からの制限の解析

Ishiguro, TK, Kobayashi, Otsuka, 2508.12392

摂動論の有効性を保証する不等式

$$16\pi^2 k_a \text{Im} S > |\Delta_a|$$

$$\begin{aligned} \text{Axio-dilaton : } S &= C_0 + i e^{-\phi} \\ g_{\text{string}}^{-2} &\sim \text{Im} S + \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

LHS : g_{string}^{-2} に比例するツリーレベルの寄与

RHS : の積分からくる閾値補正

モジュラスの虚部が大きい極限 : $\text{Im} U \gg 1$ ($T = e^{2\pi i/3}$)

Dedekind η 関数 : $\eta(U) \sim e^{\frac{2\pi i U}{24}}$

この不等式を**近似的に**書き直す
$$\frac{16\pi^2 \text{Im} S}{b_a^{N=2}} > \frac{\pi}{3} U_2 - \ln U_2 - \ln \left[\frac{8\pi}{3\sqrt{3}} e^{1-\gamma_E} \frac{\sqrt{3}}{2} |\eta(\omega)|^4 \right]$$

モジュラス U の虚部についてこの不等式を解くと、**Lambert W 関数**を用いることによって解析的な制限を得ることができる

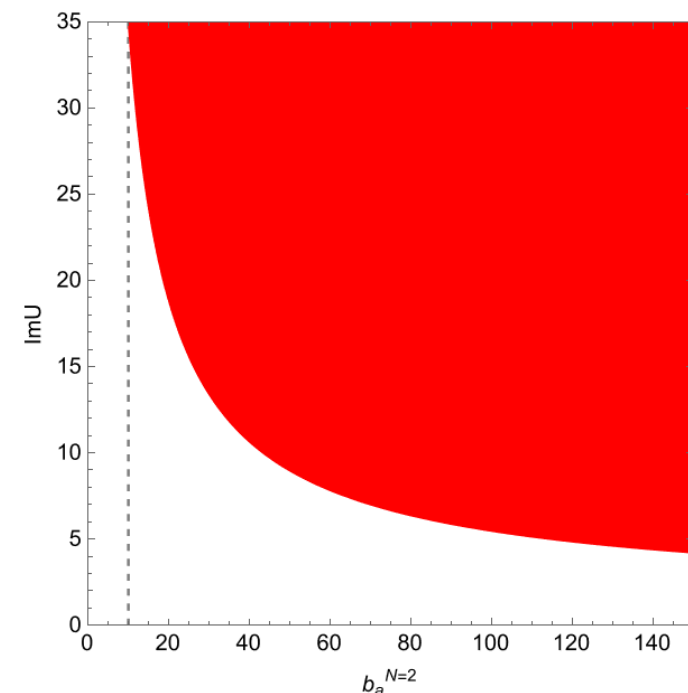
弦理論からの制限の解析

複素構造モジュラスの虚部に対する制限

$$U_2 < -\frac{3}{\pi} W_{-1} \left(-\frac{e^{-1+\gamma_E}}{4|\eta(\omega)|^4} e^{-\frac{16\pi^2 \text{Im} S}{b_a^{N=2}}} \right)$$

$W_{-1}(z)$: **Lambert W 関数**
(-1 branch)

Ishiguro, TK, Kobayashi, Otsuka, 2508.12392



複素構造モジュライの虚部
に対する弦理論からの制限

Dilaton : $\text{Im} S = 2$

弦理論からの制限の解析

複素構造モジュラスの虚部に対する制限

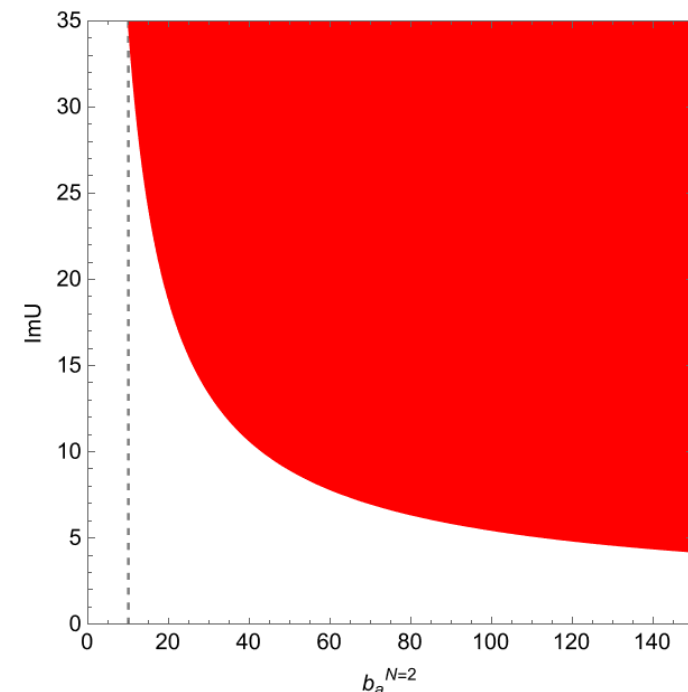
$$U_2 < -\frac{3}{\pi} W_{-1} \left(-\frac{e^{-1+\gamma_E}}{4|\eta(\omega)|^4} e^{-\frac{16\pi^2 \text{Im}S}{b_a^{N=2}}} \right)$$

$W_{-1}(z)$: **Lambert W 関数**
(-1 branch)

赤い領域は、閾値補正がツリーレベルの寄与よりも大きい範囲を表している

つまり、1ループからの寄与がツリーレベルの寄与よりも支配的であることを示しており、もはや摂動展開は機能しておらず、**有効理論における予言能力が失われている**ことを示唆している

Ishiguro, TK, Kobayashi, Otsuka, 2508.12392



複素構造モジュライの虚部
に対する弦理論からの制限

Dilaton : $\text{Im}S = 2$

様々な解析 ($T = U$)

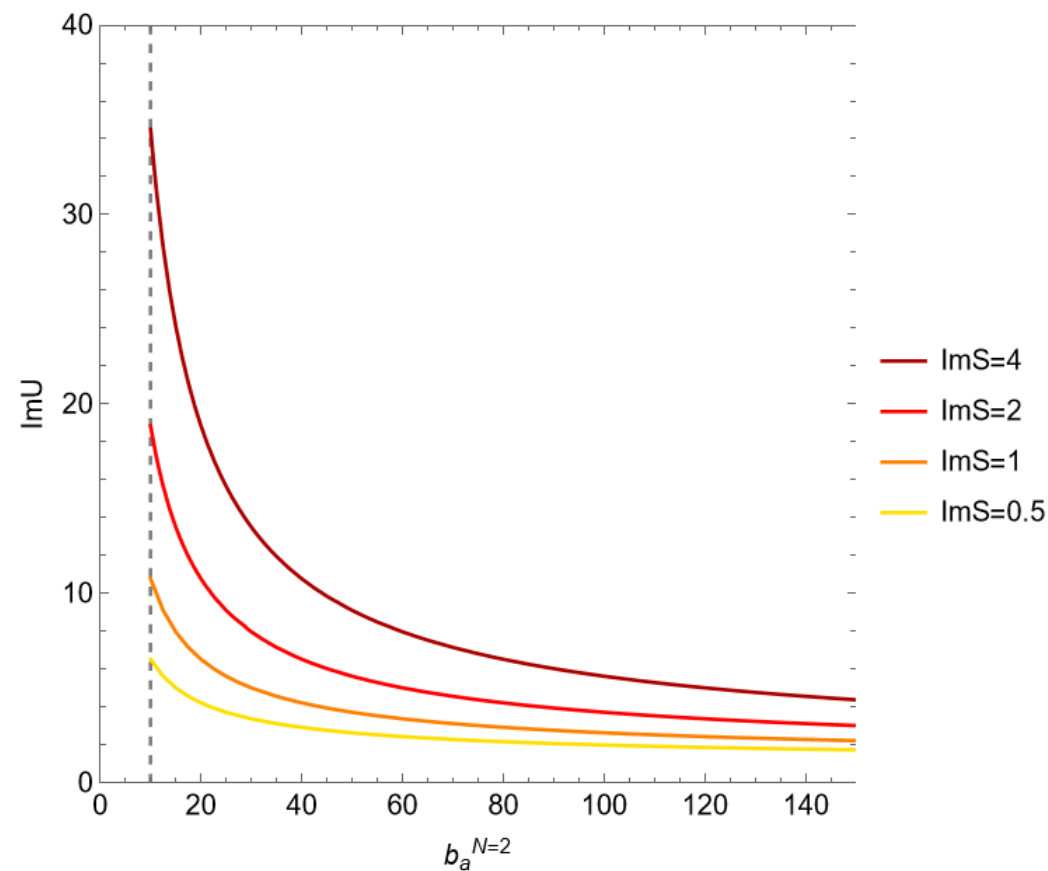
Ishiguro, TK, Kobayashi, Otsuka, 2508.12392

弦理論からの制限

$$U_2 < -\frac{3}{\pi} W_{-1} \left(-\frac{\pi}{3} \left(\frac{8\pi}{3\sqrt{3}} e^{1-\gamma_E} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{8\pi^2 \text{Im} S}{b_a^{N=2}}} \right)$$

右の図は、dilatonが $\mathcal{O}(0.1) - \mathcal{O}(1)$ の典型的な値の範囲を変化したときの $T = U$ に関する境界

$$2 \lesssim \text{Im} S \lesssim 4 \quad \rightarrow \quad 25 \lesssim \alpha_a^{-1} \lesssim 50, \quad (\alpha_a = g_a^2/4\pi)$$



様々な解析 ($T = U$)

Ishiguro, TK, Kobayashi, Otsuka, 2508.12392

弦理論からの制限

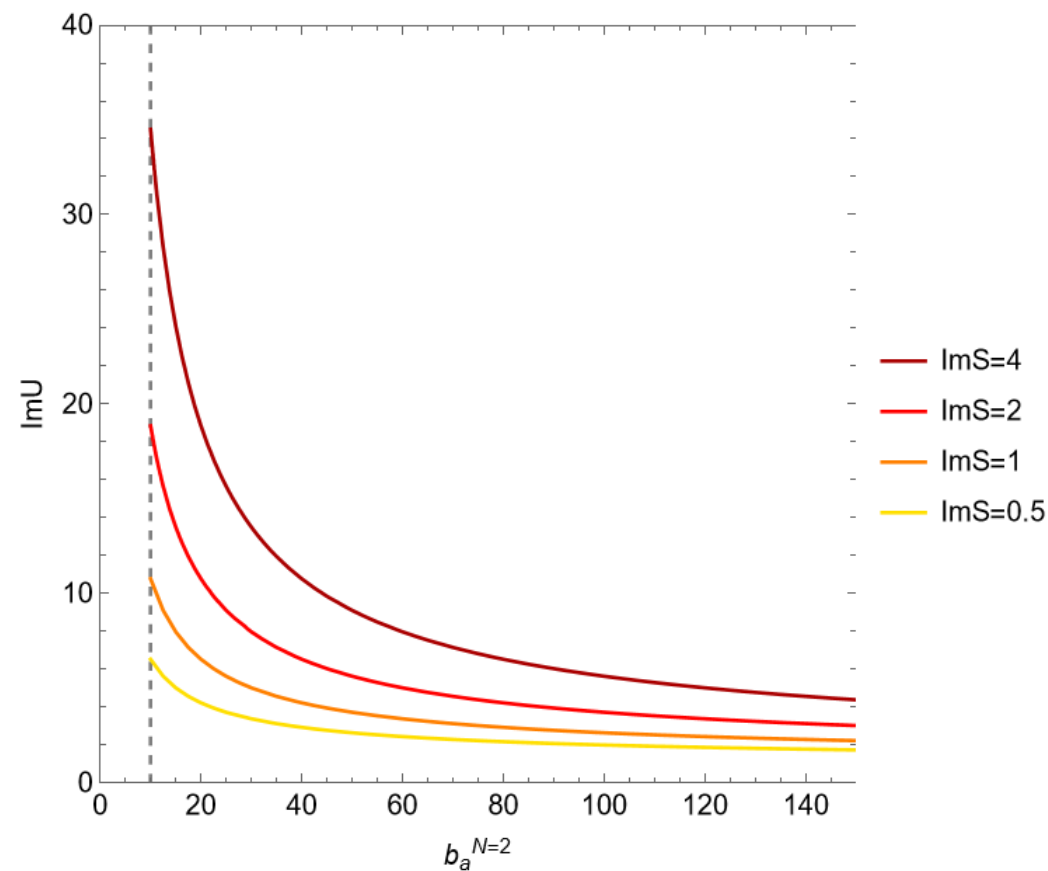
$$U_2 < -\frac{3}{\pi} W_{-1} \left(-\frac{\pi}{3} \left(\frac{8\pi}{3\sqrt{3}} e^{1-\gamma_E} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{8\pi^2 \text{Im} S}{b_a^{N=2}}} \right)$$

右の図は、dilatonが $\mathcal{O}(0.1) - \mathcal{O}(1)$ の典型的な値の範囲を変化したときの $T = U$ に関する境界

$$2 \lesssim \text{Im} S \lesssim 4 \quad \rightarrow \quad 25 \lesssim \alpha_a^{-1} \lesssim 50, \quad (\alpha_a = g_a^2/4\pi)$$

β 関数の係数 $b_a^{N=2}$ が大きくなると、弦理論からの制限は強くなる

Dilaton $\text{Im} S$ が小さくなると、弦理論からの制限は強くなる



様々な解析 ($T = aU$)

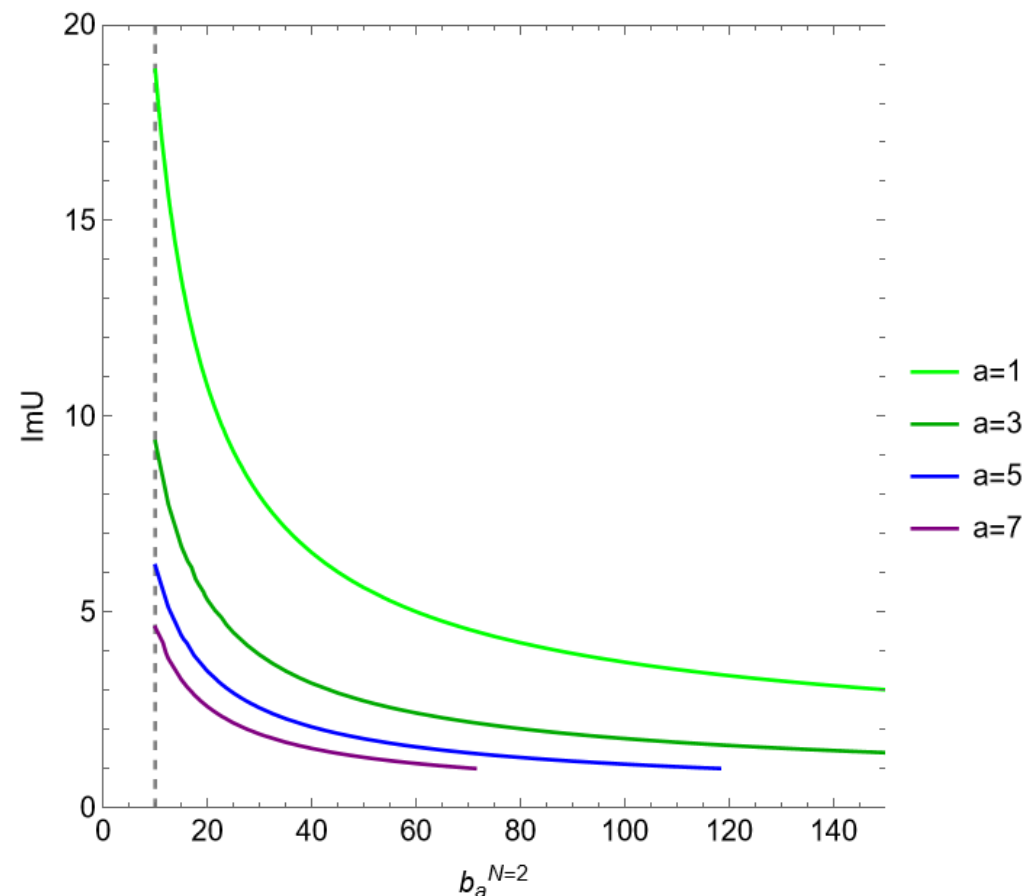
Ishiguro, TK, Kobayashi, Otsuka, 2508.12392

弦理論からの制限

$$U_2 < -\frac{6}{(a+1)\pi} W_{-1} \left(-\frac{(a+1)\pi}{6\sqrt{a}} \left(\frac{8\pi}{3\sqrt{3}} e^{1-\gamma_E} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{8\pi^2 \text{Im} S}{b_a^{N=2}}} \right)$$

右の図は、パラメータ a が $a = 1$ から $a = 7$ の範囲を変化したときの $T = aU$ と $\text{Im} S = 2$ に関する境界

Kählerモジュラス T と複素構造モジュラス U の比が大きくなると、弦理論からの制限は強くなる



様々な解析 ($T = aU$)

Ishiguro, TK, Kobayashi, Otsuka, 2508.12392

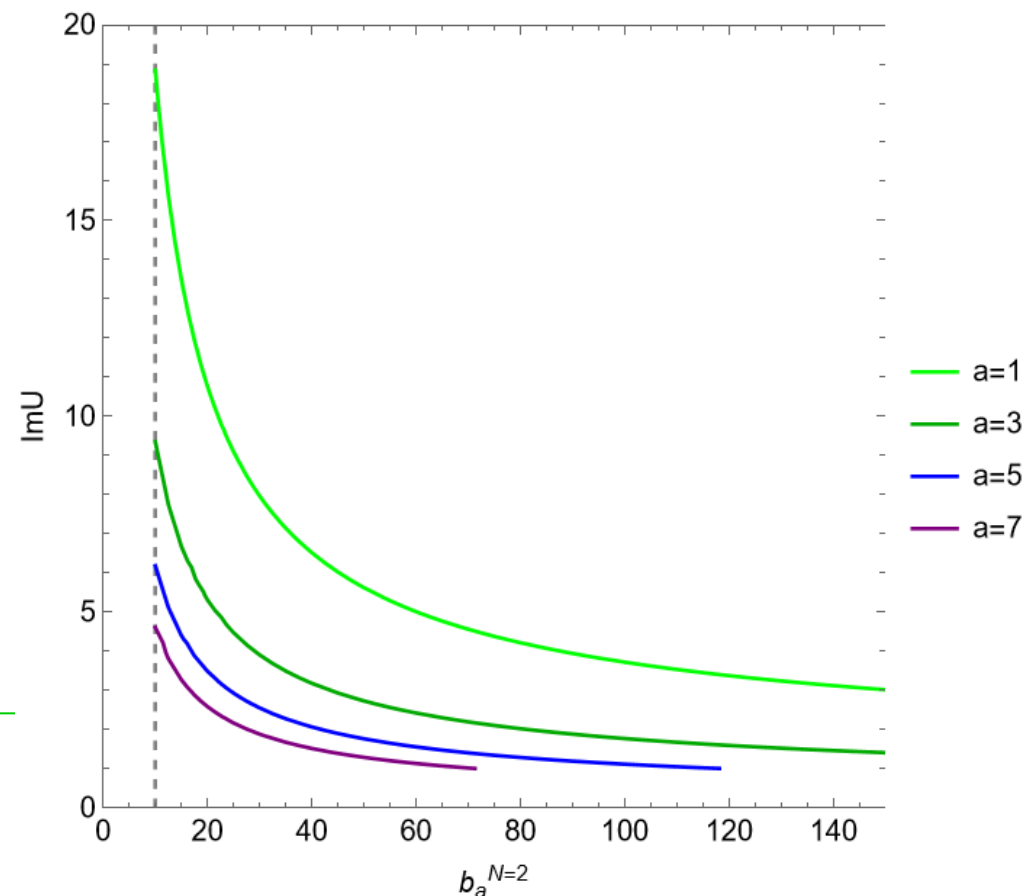
弦理論からの制限

$$U_2 < -\frac{6}{(a+1)\pi} W_{-1} \left(-\frac{(a+1)\pi}{6\sqrt{a}} \left(\frac{8\pi}{3\sqrt{3}} e^{1-\gamma_E} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{8\pi^2 \text{Im} S}{b_a^{N=2}}} \right)$$

右の図は、パラメータ a が $a = 1$ から $a = 7$ の範囲を変化したときの $T = aU$ と $\text{Im} S = 2$ に関する境界

Kählerモジュラス T と複素構造モジュラス U の比が大きくなると、弦理論からの制限は強くなる

モジュラスの虚部が小さい領域 $\text{Im} U < 1$ において、不等式の近似が成り立たなくなるため、**数値解析**が必要となる



数値解析

Ishiguro, TK, Kobayashi, Otsuka, 2508.12392

弦理論からの制限

$$\frac{3\sqrt{3}}{8\pi} e^{-1+\gamma_E} \exp \left[-\frac{16\pi^2 k_a \text{Im}S}{b_a^{\mathcal{N}=2}} \right] < 7U_2 |\eta(7U)|^4 U_2 |\eta(U)|^4$$

$$T = 7U$$

$$\text{Dilaton : } \text{Im}S = 2$$

$$\text{点線} : b_a^{\mathcal{N}=2} = 60$$

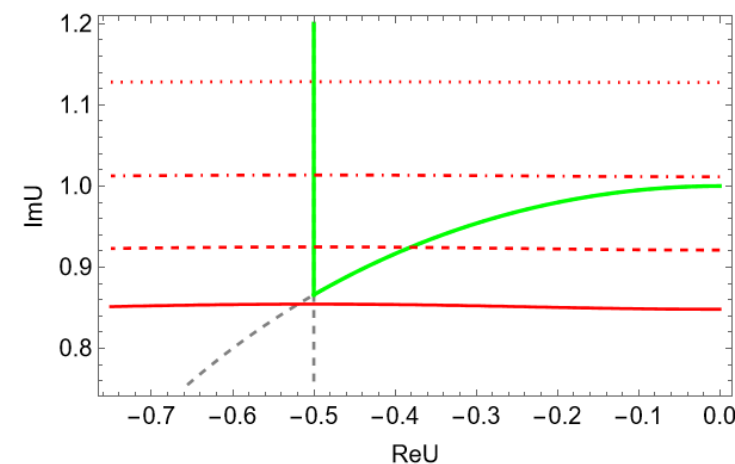
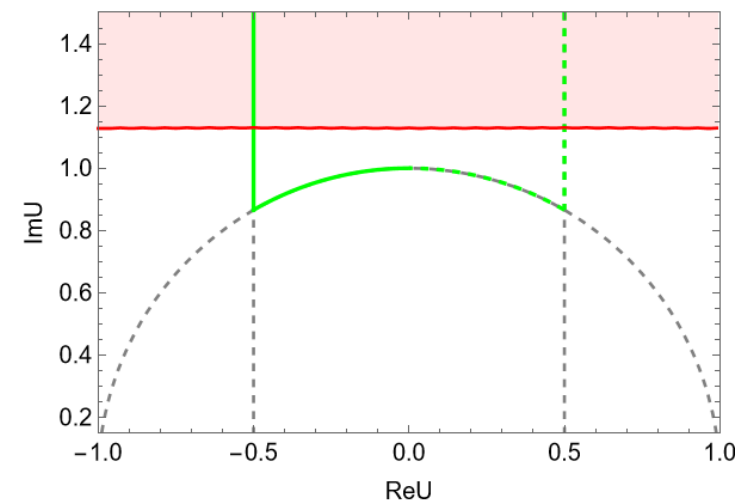
$$\text{1点鎖線} : b_a^{\mathcal{N}=2} = 70$$

$$\text{破線} : b_a^{\mathcal{N}=2} = 80$$

$$\text{実線} : b_a^{\mathcal{N}=2} = 90$$

赤い領域は、摂動論の有効性を保証することができない
パラメータ空間

緑の曲線で区切られた領域は、 $PSL(2, \mathbb{Z})$ の基本領域



数値解析

Ishiguro, TK, Kobayashi, Otsuka, 2508.12392

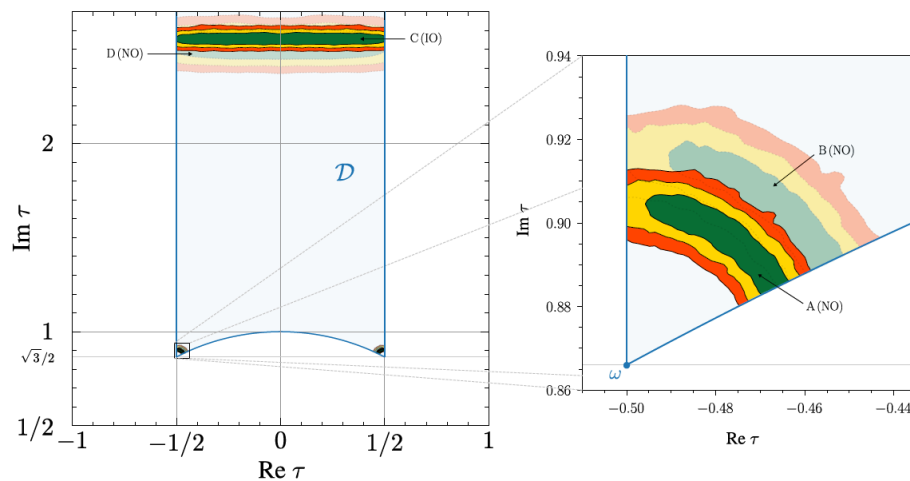
Granelli, Meloni, Parriciatu, Penedo, Petcov, 2505.21405

モジュラーフレーバー模型との比較

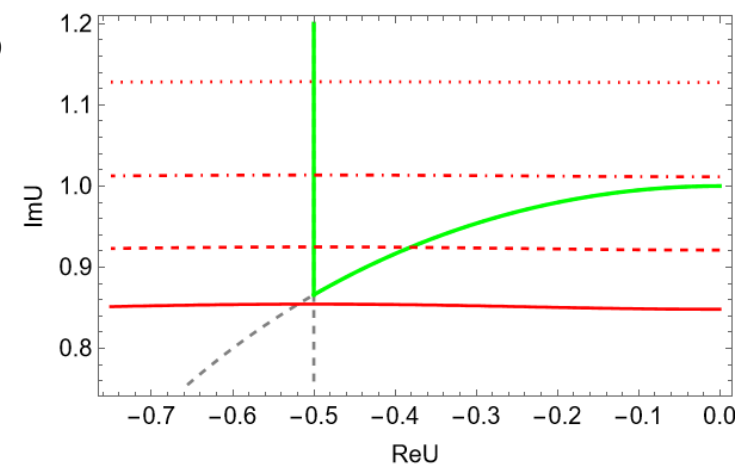
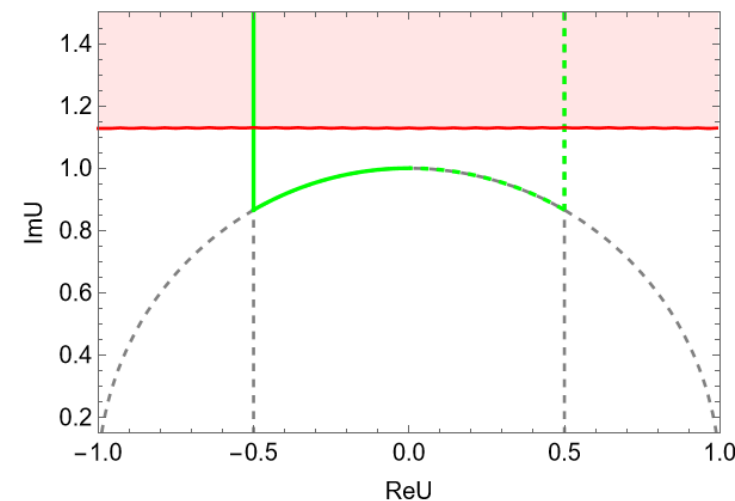
これらの2つの領域はレプトンの観測データを等価に再現することができる

しかし、ボトムアップアプローチではどちらの固定点近傍が選ばれるべきかという基準を与えることができていない

e.g.



固定点からの
小さなズレ



数値解析

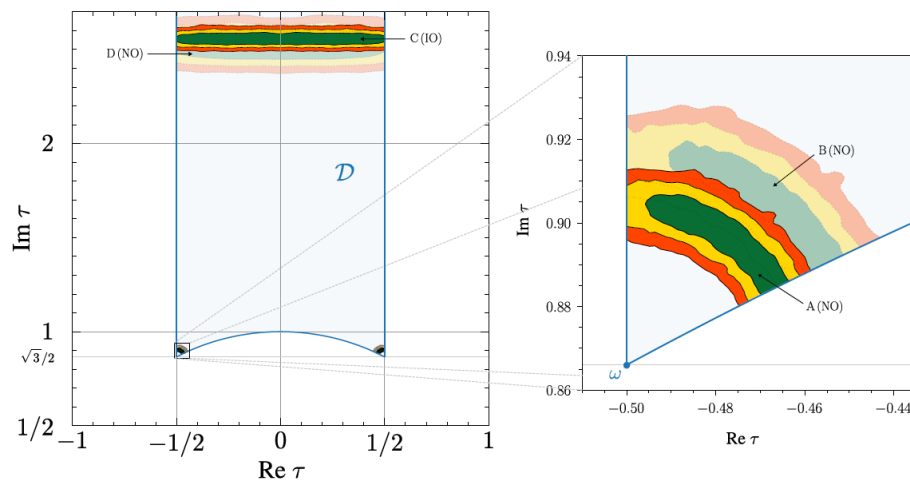
Ishiguro, TK, Kobayashi, Otsuka, 2508.12392

Granelli, Meloni, Parriciatu, Penedo, Petcov, 2505.21405

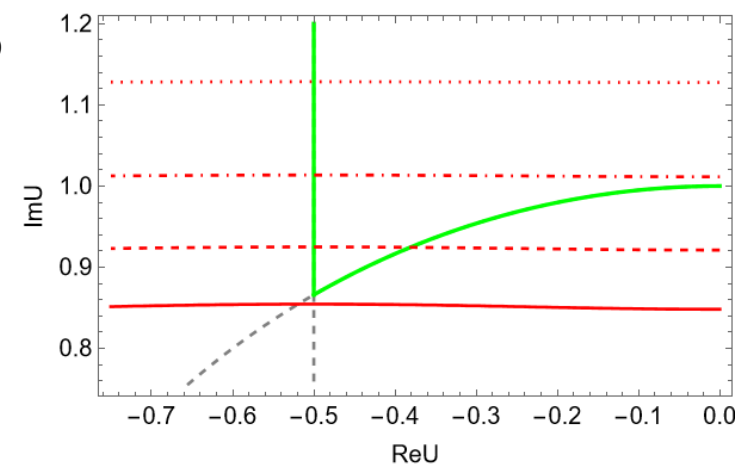
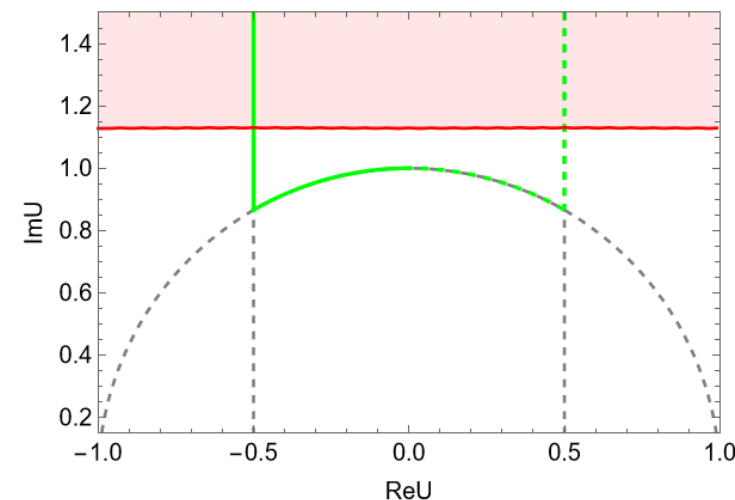
モジュラーフレーバー模型との比較

もし弦理論からの制限によってモジュラーフレーバー模型におけるモジュラスを制限できたとすると、モジュラスの**虚部**が**大きい領域が最初に影響を受け**、一方で、 β 関数の係数が大きい場合においても $\tau \sim \omega$ の固定点近傍は生き残りやすい

e.g.



固定点からの
小さなズレ



アウトライン

1. イントロダクション
2. モジュライ依存性のある閾値補正
 - 閾値補正の具体的な形
 - Target space duality symmetries
3. モジュライに対する弦理論からの制限
 - 弦理論からの制限の解析
 - 様々な解析
 - 数値的な解析
4. まとめ

まとめ

研究目的

弦理論に埋め込まれた多くのモジュラーフレーバー模型は、弦理論の低エネルギー理論において**その摂動論の有効性が保証されている**必要がある

ヘテロティック弦理論の有効理論におけるゲージ結合定数を用いて以下の不等式を評価する

$$\text{ツリーレベル} > 1\text{ループレベル}$$

結論

1. $b_a^{\mathcal{N}=2}$ 大きい
2. $\text{Im}S$ が小さい
3. T と U の比が大きくなる



弦理論からの制限が厳しくなる

弦理論からの制限は、モジュラーフレーバー模型を構築する際に興味深い洞察を与えうる

Future work

弦理論からの制限と整合するモジュラーフレーバー模型やモジュラーインフレーション模型

Back up

モジュライ

10次元時空の計量

$$G_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & g_{\mu n} \\ g_{m\nu} & g_{mn} \end{pmatrix}$$

($M, N = 0, \dots, 9$, $\mu, \nu = 0, \dots, 3$, $m, n = 4, \dots, 9$)

Kählerモジュライ (real (1,1)-form)

$$\delta g_{i\bar{j}} dz^i \wedge \overline{dz^j}$$

複素構造モジュライ (complex (2,1)-form)

$$\Omega_{ijk} g^{k\bar{l}} \delta g_{\bar{l}m} dz^i \wedge dz^j \wedge \overline{dz^m}$$

$i, j, k, l, m = 1, \dots, 3$

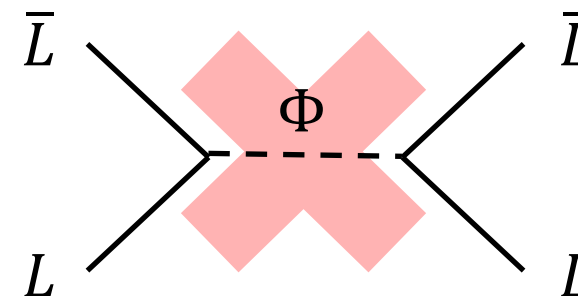
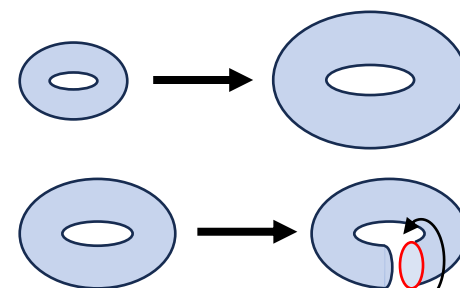
低エネルギー有効理論に計量に由来したスカラー場として現れる

→ **モジュライ場**

モジュライ場は、標準模型に現れる素粒子との未知の相互作用を引き起こす

余剰次元空間の変形

$$g_{mn} \rightarrow g_{mn} + \delta g_{mn}$$



モジュラーフレーバーモデル

Feruglio, 1706.08749

従来のフレーバーモデルの問題点

- フレーバー観測量を再現するために多くのパラメータを導入
- 複雑な真空の配列 (vacuum alignment)

e.g. $\langle \varphi_T \rangle = (u, 0, 0)$

モジュラー対称性に基づくフレーバーモデルによってこれらの問題を解決できる可能性がある

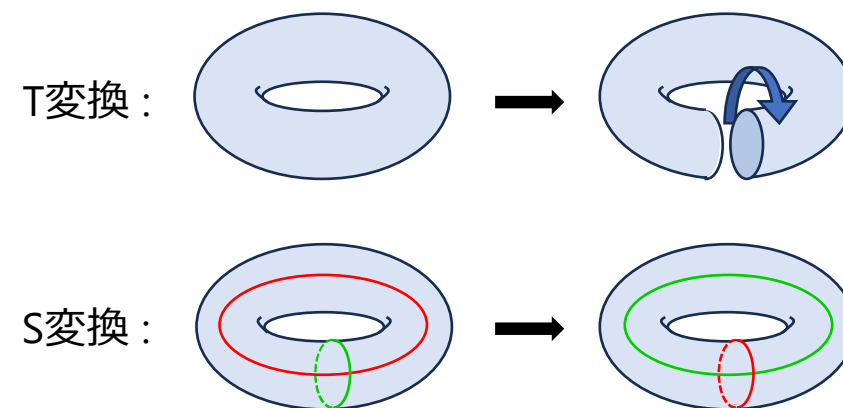
モジュラー対称性

$PSL(2, \mathbb{Z})$ の生成子

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad S^2 = \mathbb{I}, \quad (ST)^3 = \mathbb{I}.$$

$$S : \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}, \quad T : \tau \rightarrow \tau + 1.$$

トーラスの幾何的な変換



Large volume limit

Large volume regime $T \gg 1$ は、弦理論におけるコンパクト化やモジュラーフレーバー模型の文脈において非常に興味深い

Abe, Kobayashi, Otsuka, *JHEP* **04** (2015) 160

Ding, Jiang, Zhao, *JCAP* **10** (2024) 016

King, Wang, *JCAP* **07** (2024) 073

弦理論からの制限

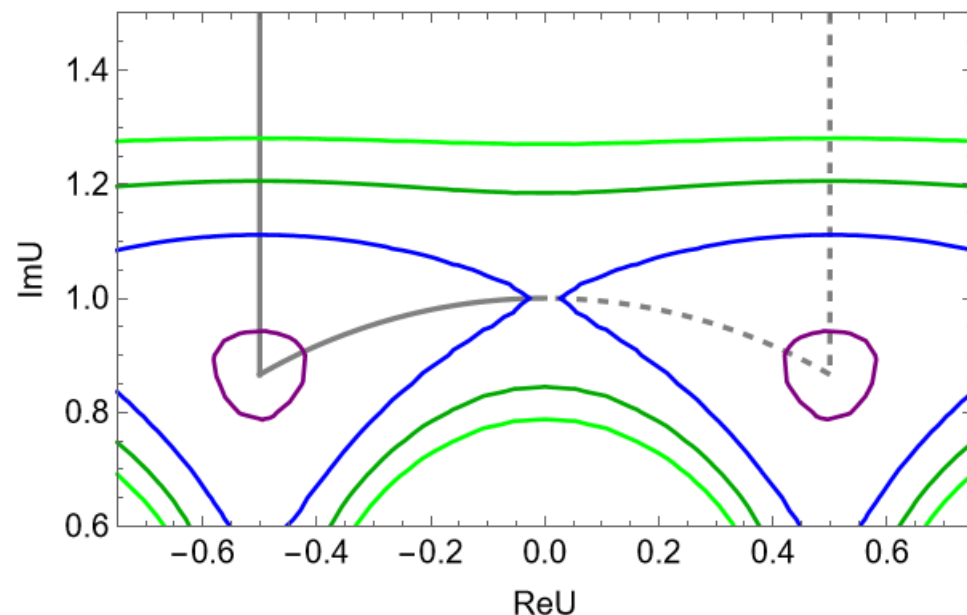
$$\frac{3\sqrt{3}}{8\pi} e^{-1+\gamma_E} \exp \left[-\frac{16\pi^2 k_a \text{Im}S}{b_a^{\mathcal{N}=2}} \right] < T_2 |\eta(T)|^4 U_2 |\eta(U)|^4$$

Dilaton : $\text{Im}S = 2$

β 関数の係数 : $b_a^{\mathcal{N}=2} = 60$

複素構造モジュラスに対して許容されている領域は、**非常に強く制限されている**

Ishiguro, TK, Kobayashi, Otsuka, 2508.12392



黄緑、緑、青、紫の色の境界は、それぞれ $T = 10i$, $T = 10.02i$, $T = 10.04i$, $T = 10.06i$ の境界を表している摂動論に関する有効性はこれらの曲線の内側において保証されている

Constraints based on other modular symmetries

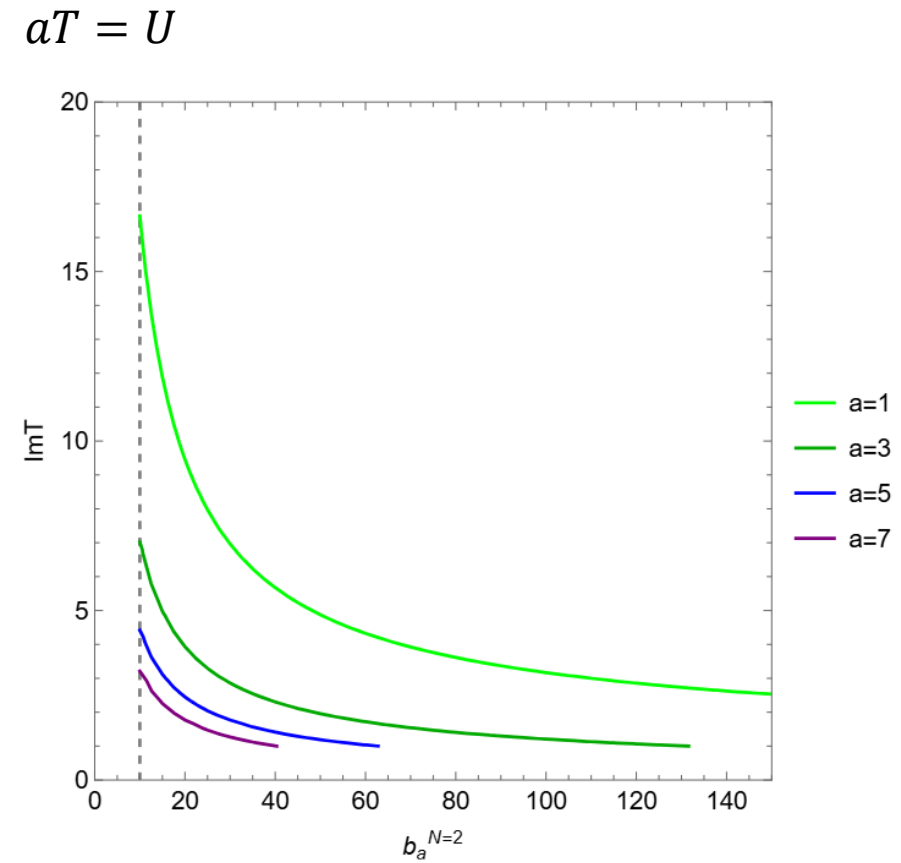
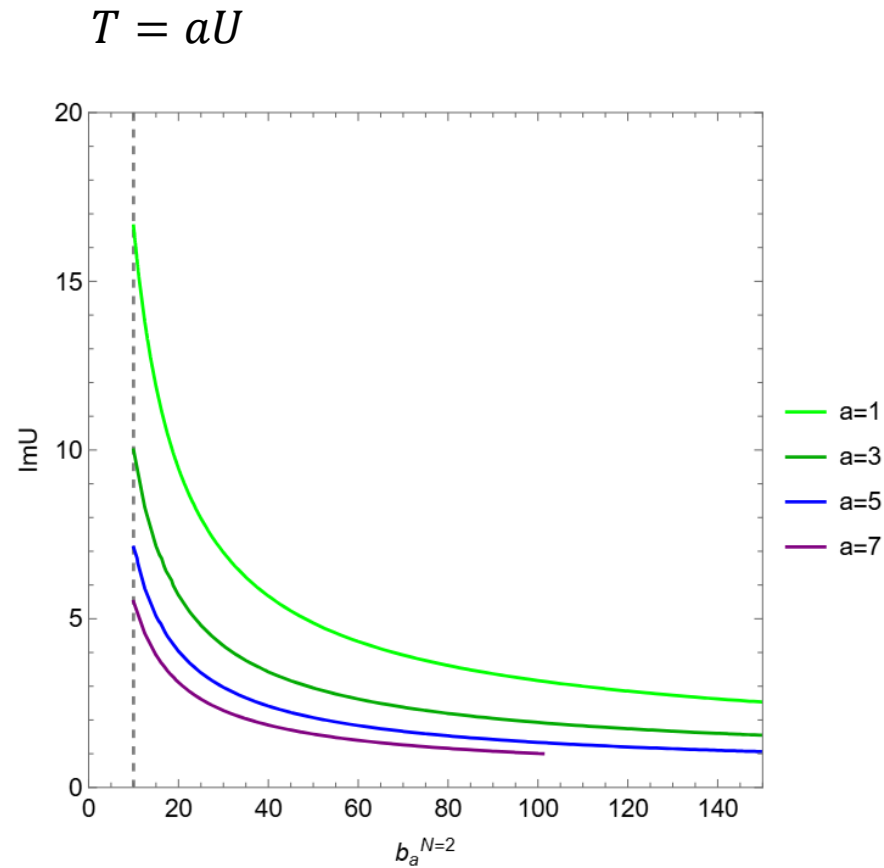
- $T = aU$

$$U_2 < -\frac{8}{(a+2)\pi} W_{-1} \left(-\frac{(a+2)\pi}{8\sqrt{a}} \left(\frac{8\pi}{3\sqrt{3}} e^{1-\gamma_E} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{8\pi^2 \text{Im} S}{b_a^{\mathcal{N}=2}}} \right),$$

- $aT = U$

$$T_2 < -\frac{8}{(1+2a)\pi} W_{-1} \left(-\frac{(1+2a)\pi}{8\sqrt{a}} \left(\frac{8\pi}{3\sqrt{3}} e^{1-\gamma_E} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{8\pi^2 \text{Im} S}{b_a^{\mathcal{N}=2}}} \right),$$

Constraints based on other modular symmetries



Constraints based on other modular symmetries

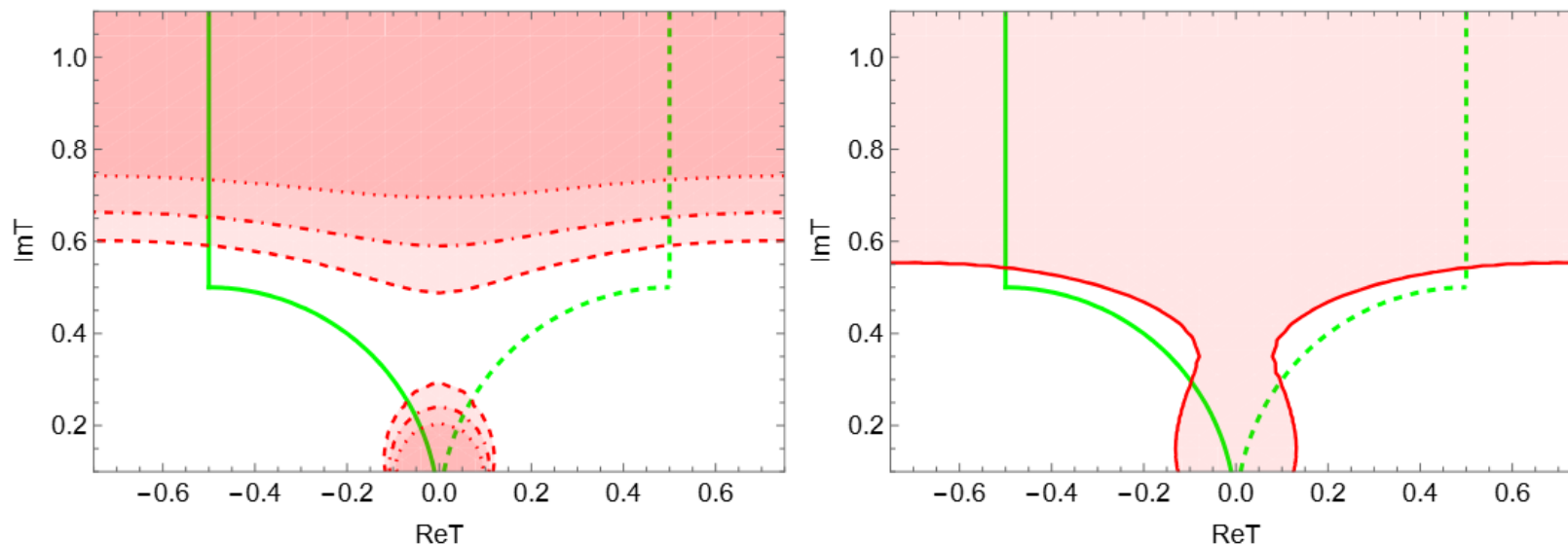


Figure 10: These are the boundaries concerning $7T = U$ and $\text{Im}S = 2$. Dotted red, dash-dotted red, dashed red curves are respectively the boundaries with $b_a^{N=2} = 60$, $b_a^{N=2} = 70$, $b_a^{N=2} = 80$ in the left panel, and solid red curve is the boundary with $b_a^{N=2} = 90$ in the right panel. In both panels, the shaded regions are outside the perturbative theory, and in the left panel, when the $b_a^{N=2}$ increases, the lighter the color is. The region framed by the green curve is the fundamental region of $\Gamma_0(2)$.

Constraints based on other modular symmetries

- $T = aU, \hat{T} = bU, \hat{U} = bcU$

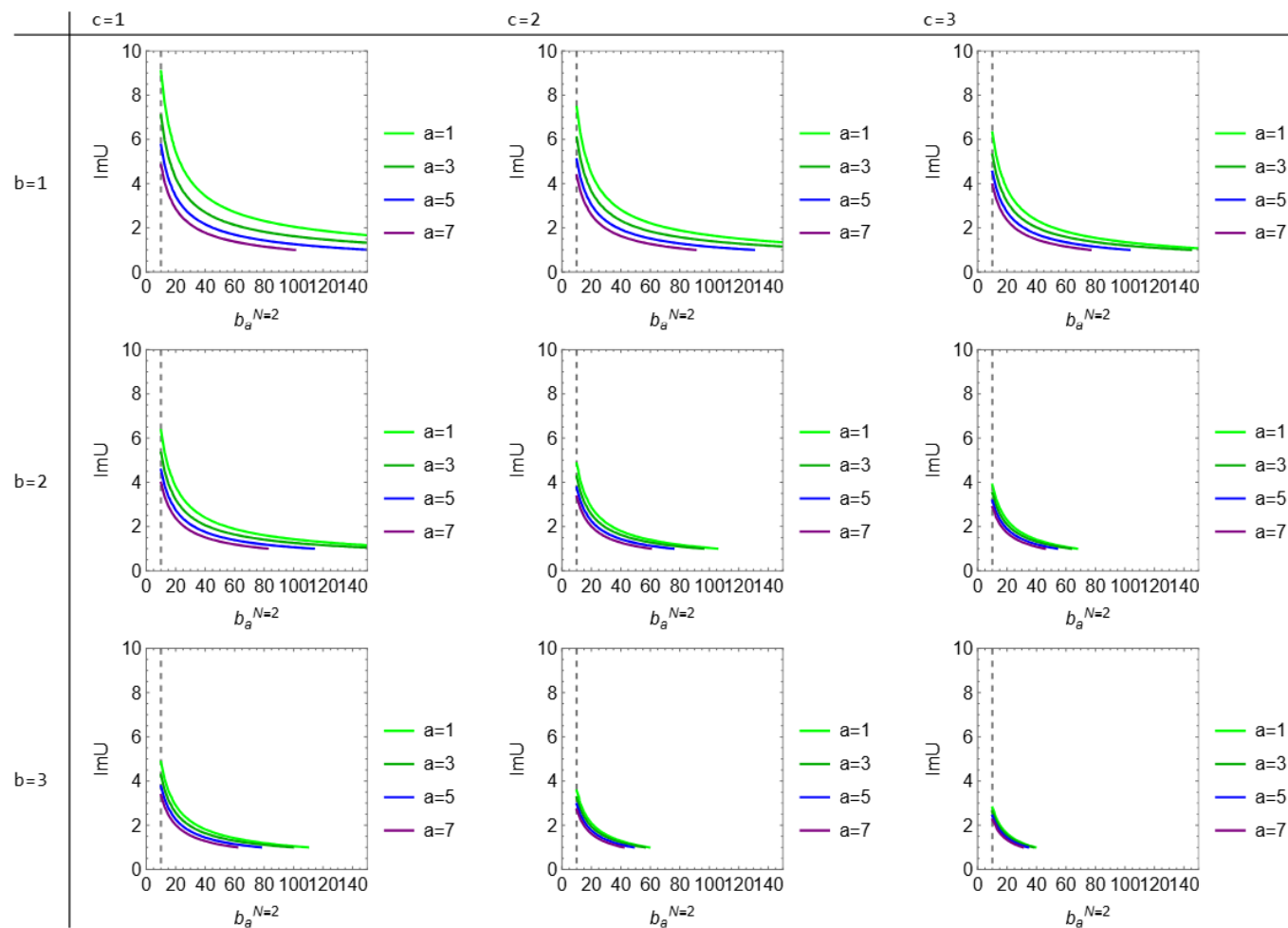
$$U_2 < -\frac{36}{(2a + 6 + 3b(c + 1))\pi} \times W_{-1} \left(-\frac{(2a + 6 + 3b(c + 1))\pi}{36a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}} \left(\frac{8\pi}{3\sqrt{3}} e^{1-\gamma_E} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{4\pi^2 \text{Im} S}{b\mathcal{N}=2}} \right), \quad (5.17)$$

- $aT = U, \hat{T} = bT, \hat{U} = bcT$

$$T_2 < -\frac{36}{(2 + 6a + 3b(c + 1))\pi} \times W_{-1} \left(-\frac{(2 + 6a + 3b(c + 1))\pi}{36a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}} \left(\frac{8\pi}{3\sqrt{3}} e^{1-\gamma_E} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{4\pi^2 \text{Im} S}{b\mathcal{N}=2}} \right), \quad (5.18)$$

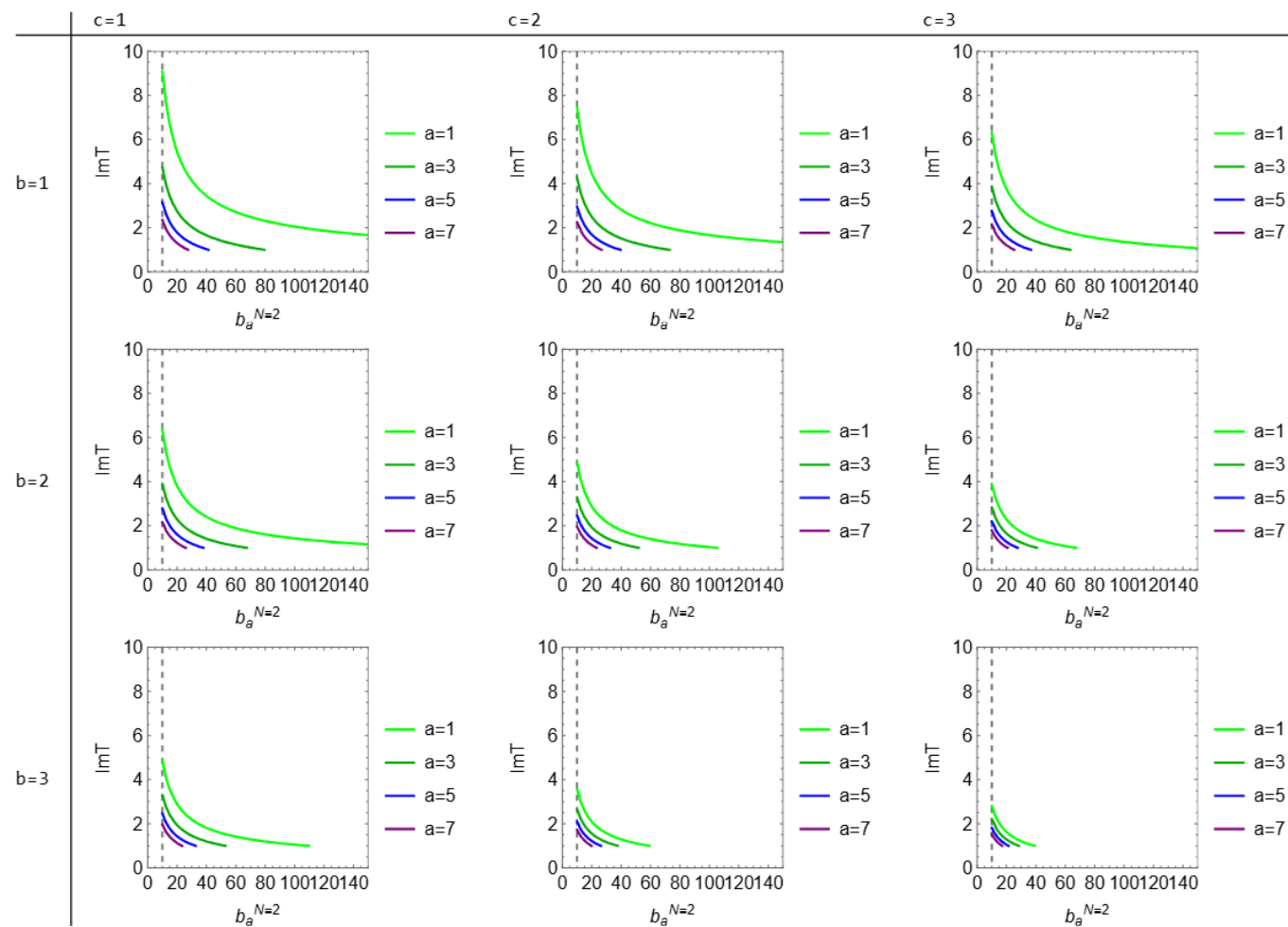
Constraints based on other modular symmetries

$$\begin{aligned} T &= aU, \\ \hat{T} &= bU, \\ \hat{U} &= bcU \end{aligned}$$



Constraints based on other modular symmetries

$$\begin{aligned} aT &= U, \\ \hat{T} &= bU, \\ \hat{U} &= bcU \end{aligned}$$



Constraints based on other modular symmetries

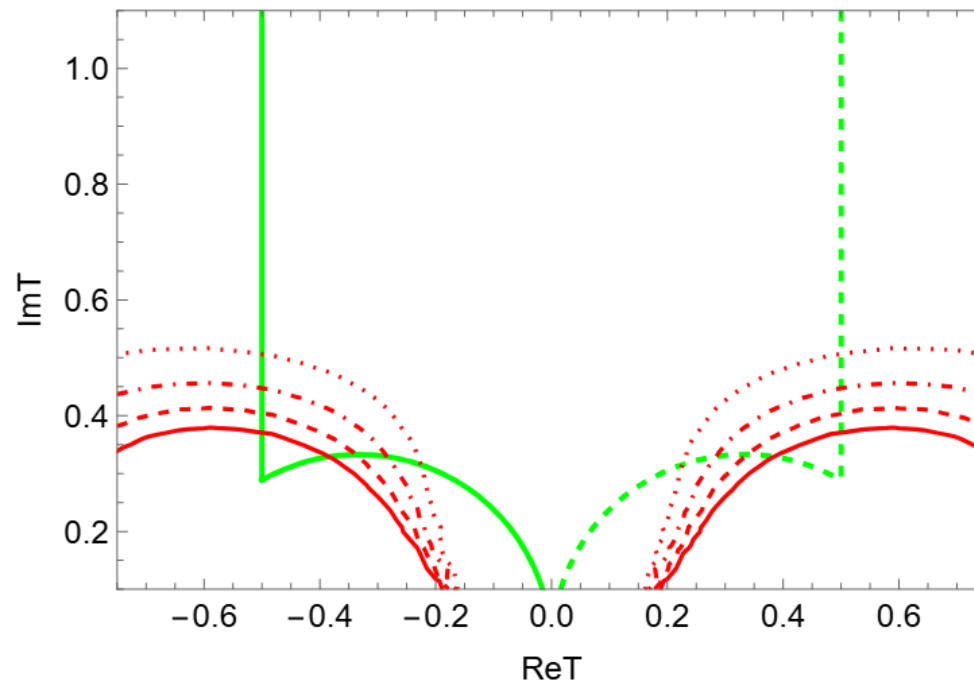


Figure 13: These are the boundaries concerning $7T = U$, $\hat{T} = T$, $\hat{U} = T$ and $\text{Im}S = 2$. Dotted red, dash-dotted red, dashed red and solid red curves are respectively the boundaries with $b_a^{\mathcal{N}=2} = 60$, $b_a^{\mathcal{N}=2} = 70$, $b_a^{\mathcal{N}=2} = 80$ and $b_a^{\mathcal{N}=2} = 90$. The region framed by the green curve is the fundamental region of $\Gamma_0(3)$. The perturbative description is valid below these curves.