

Bounds on nonlinear effective field theories via resummed relative entropy

基研研究会 『素粒子物理学の進展2026』

August 27, 2026

Daiki Ueda (Technion — Israel Institute of Technology)

Based on **arXiv:2604.24286** and **arXiv:2606.23323** with Pietro Conzino (INFN, Naples)

Outline

- 相対エントロピーとEFTの関係のreview

我々の先行研究: [*Phys.Rev.D* 108 (2023) 2, 025011, *JHEP* 07 (2023) 111, *JHEP* 06 (2025) 105]

- nonlinear EFTへの応用 (非線形電磁理論を例として)

我々の最近の研究: [2604.24286, and 2606.23323]

- Summary

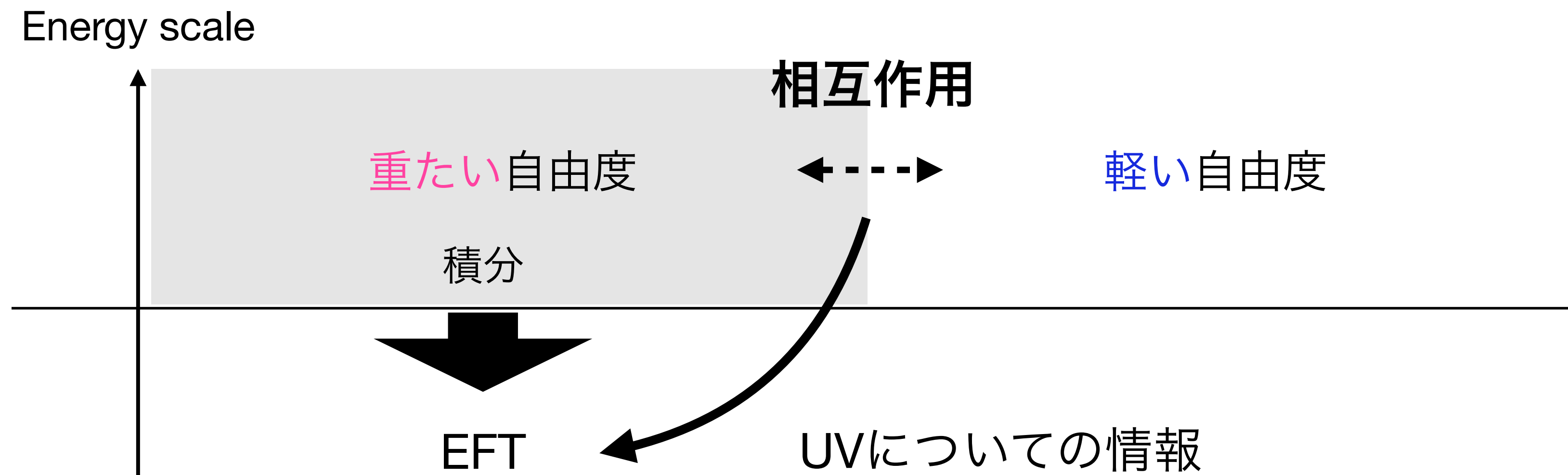
Introduction

- Effective Field Theory (EFT):
 - EFTは 重たい自由度を積分することで生成



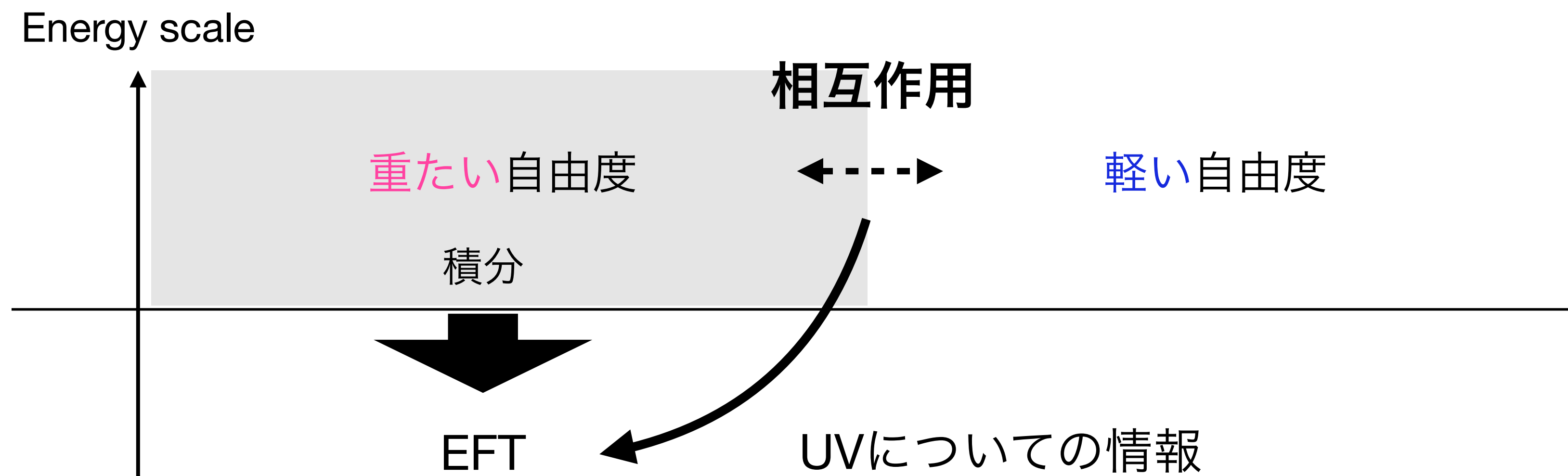
Introduction

- Effective Field Theory (EFT):
 - EFTは 重たい自由度を積分することで生成
 - UVについての情報は重たい自由度と軽い自由度の間の相互作用を通して EFTへ移る



Introduction

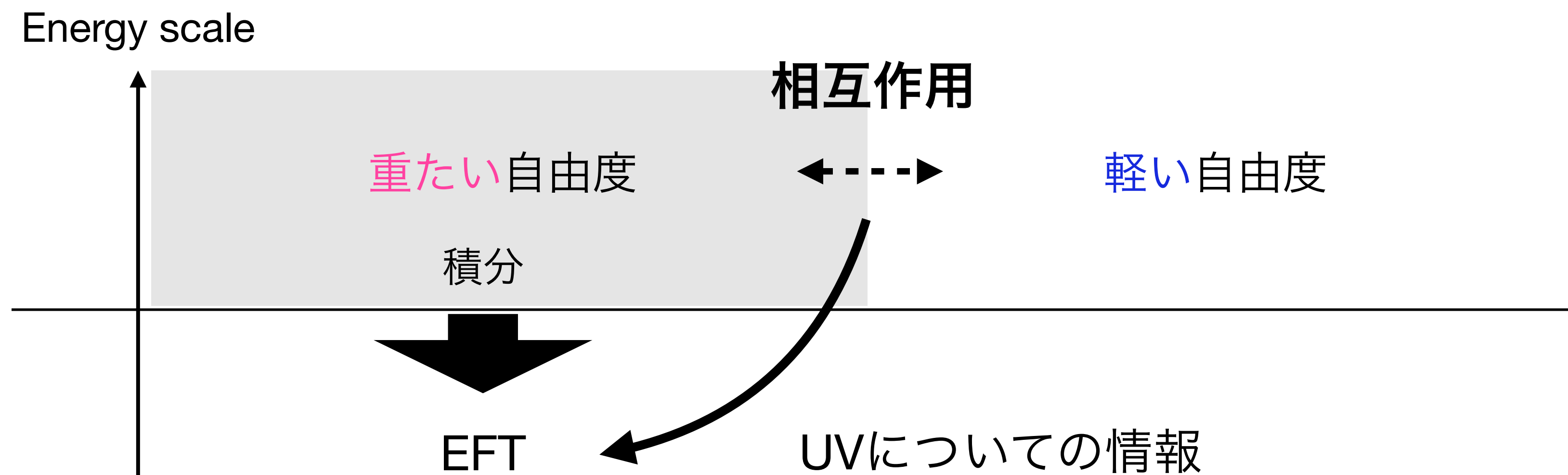
- Effective Field Theory (EFT):
 - EFTは 重たい自由度を積分することで生成
 - UVについての情報は重たい自由度と軽い自由度の間の相互作用を通して EFTへ移る



重軽自由度間の相互作用を含む理論と含まない理論間の違いがUVの情報を特徴付ける

Introduction

- Effective Field Theory (EFT):
 - EFTは 重たい自由度を積分することで生成
 - UVについての情報は重たい自由度と軽い自由度の間の相互作用を通して EFTへ移る



重軽自由度間の相互作用を含む理論と含まない理論間の違いがUVの情報を特徴付ける

⇒ 相対エントロピーはこの違いを定量化する

相対エントロピー

- 相対エントロピーは二つの確率分布関数 ρ_A と ρ_B に対して定義される

相対エントロピー

- 相対エントロピーは二つの確率分布関数 ρ_A と ρ_B に対して定義される

$$\text{Tr}[\rho_A] = \text{Tr}[\rho_B] = 1, \quad \rho_A = \rho_A^\dagger, \quad \rho_B = \rho_B^\dagger$$

相対エントロピー

- 相対エントロピーは二つの確率分布関数 ρ_A と ρ_B に対して定義される

$$S(\rho_A || \rho_B) \equiv \text{Tr} [\rho_A \ln \rho_A - \rho_A \ln \rho_B]$$

$$\text{Tr}[\rho_A] = \text{Tr}[\rho_B] = 1, \quad \rho_A = \rho_A^\dagger, \quad \rho_B = \rho_B^\dagger$$

相対エントロピー

- 相対エントロピーは二つの確率分布関数 ρ_A と ρ_B に対して定義される

$$S(\rho_A || \rho_B) \equiv \text{Tr} [\rho_A \ln \rho_A - \rho_A \ln \rho_B] \quad \text{Tr}[\rho_A] = \text{Tr}[\rho_B] = 1, \quad \rho_A = \rho_A^\dagger, \quad \rho_B = \rho_B^\dagger$$

- 重要な性質: 相対エントロピーは**非負の量**

相対エントロピー

- 相対エントロピーは二つの確率分布関数 ρ_A と ρ_B に対して定義される

$$S(\rho_A || \rho_B) \equiv \text{Tr} [\rho_A \ln \rho_A - \rho_A \ln \rho_B]$$

$$\text{Tr}[\rho_A] = \text{Tr}[\rho_B] = 1, \quad \rho_A = \rho_A^\dagger, \quad \rho_B = \rho_B^\dagger$$

- 重要な性質: 相対エントロピーは**非負の量**

証明

凸関数 $f(x)$ の性質: $f(x_A) - f(x_B) - (x_A - x_B) \cdot f'(x_B) \leq 0$

相対エントロピー

- 相対エントロピーは二つの確率分布関数 ρ_A と ρ_B に対して定義される

$$S(\rho_A || \rho_B) \equiv \text{Tr} [\rho_A \ln \rho_A - \rho_A \ln \rho_B]$$

$$\text{Tr}[\rho_A] = \text{Tr}[\rho_B] = 1, \quad \rho_A = \rho_A^\dagger, \quad \rho_B = \rho_B^\dagger$$

- 重要な性質: 相対エントロピーは**非負の量**

証明

凸関数 $f(x)$ の性質: $f(x_A) - f(x_B) - (x_A - x_B) \cdot f'(x_B) \leq 0$



$$\text{Tr}[f(\rho_A) - f(\rho_B) - (\rho_A - \rho_B)f'(\rho_B)] \leq 0$$

相対エントロピー

- 相対エントロピーは二つの確率分布関数 ρ_A と ρ_B に対して定義される

$$S(\rho_A || \rho_B) \equiv \text{Tr} [\rho_A \ln \rho_A - \rho_A \ln \rho_B] \quad \text{Tr}[\rho_A] = \text{Tr}[\rho_B] = 1, \quad \rho_A = \rho_A^\dagger, \quad \rho_B = \rho_B^\dagger$$

- 重要な性質: 相対エントロピーは**非負の量**

証明

凸関数 $f(x)$ の性質: $f(x_A) - f(x_B) - (x_A - x_B) \cdot f'(x_B) \leq 0$



$$\text{Tr}[f(\rho_A) - f(\rho_B) - (\rho_A - \rho_B)f'(\rho_B)] \leq 0$$



$f(x) \rightarrow -x \ln x$ (凸関数)

$$S(\rho_A || \rho_B) \geq 0$$

相対エントロピー

- 相対エントロピーは二つの確率分布関数 ρ_A と ρ_B に対して定義される

$$S(\rho_A || \rho_B) \equiv \text{Tr} [\rho_A \ln \rho_A - \rho_A \ln \rho_B] \quad \text{Tr}[\rho_A] = \text{Tr}[\rho_B] = 1, \quad \rho_A = \rho_A^\dagger, \quad \rho_B = \rho_B^\dagger$$

- 重要な性質: 相対エントロピーは**非負の量**

証明

凸関数 $f(x)$ の性質: $f(x_A) - f(x_B) - (x_A - x_B) \cdot f'(x_B) \leq 0$



$$\text{Tr}[f(\rho_A) - f(\rho_B) - (\rho_A - \rho_B)f'(\rho_B)] \leq 0$$



$f(x) \rightarrow -x \ln x$ (凸関数)

$$S(\rho_A || \rho_B) \geq 0$$

等号は $\rho_A = \rho_B$ のときのみ成り立つ ($-x \ln x$ が狭義凸関数のため)

相対エントロピー

- 相対エントロピーは二つの確率分布関数 ρ_A と ρ_B に対して定義される

$$S(\rho_A || \rho_B) \equiv \text{Tr} [\rho_A \ln \rho_A - \rho_A \ln \rho_B] \quad \text{Tr}[\rho_A] = \text{Tr}[\rho_B] = 1, \quad \rho_A = \rho_A^\dagger, \quad \rho_B = \rho_B^\dagger$$

- 重要な性質: 相対エントロピーは**非負の量**

証明

凸関数 $f(x)$ の性質: $f(x_A) - f(x_B) - (x_A - x_B) \cdot f'(x_B) \leq 0$



$$\text{Tr}[f(\rho_A) - f(\rho_B) - (\rho_A - \rho_B)f'(\rho_B)] \leq 0$$



$f(x) \rightarrow -x \ln x$ (凸関数)

$$S(\rho_A || \rho_B) \geq 0$$

等号は $\rho_A = \rho_B$ のときのみに成り立つ ($-x \ln x$ が狭義凸関数のため)

相対エントロピーは二つの確率分布間の違いを特徴付ける

Our idea

- 相対エントロピーは二つの確率分布間の違いを定量化する

$$S(\rho_A || \rho_B) \equiv \text{Tr} [\rho_A \ln \rho_A - \rho_A \ln \rho_B] \geq 0$$

等号は $\rho_A = \rho_B$ のときのみ成り立つ

Our idea

- 相対エントロピーは二つの確率分布間の違いを定量化する

$$S(\rho_A || \rho_B) \equiv \text{Tr} [\rho_A \ln \rho_A - \rho_A \ln \rho_B] \geq 0$$

等号は $\rho_A = \rho_B$ のときのみ成り立つ

- 相対エントロピーは確率分布関数で定義される二つのものの間の定量的な違いを表す

Our idea

- 相対エントロピーは二つの確率分布間の違いを定量化する

$$S(\rho_A || \rho_B) \equiv \text{Tr} [\rho_A \ln \rho_A - \rho_A \ln \rho_B] \geq 0$$

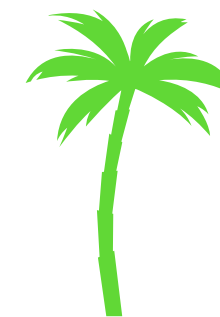
等号は $\rho_A = \rho_B$ のときのみ成り立つ

- 相対エントロピーは確率分布関数で定義される二つのものの間の定量的な違いを表す

Ex.



ρ_A



ρ_B

Our idea

- 相対エントロピーは二つの確率分布間の違いを定量化する

$$S(\rho_A || \rho_B) \equiv \text{Tr} [\rho_A \ln \rho_A - \rho_A \ln \rho_B] \geq 0$$

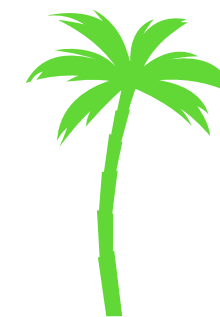
等号は $\rho_A = \rho_B$ のときのみ成り立つ

- 相対エントロピーは確率分布関数で定義される二つのものの間の定量的な違いを表す

Ex.



$\mapsto \rho_A$



$\mapsto \rho_B$

$$S(\text{tree} || \text{palm}) > 0$$

$$S(\text{tree} || \text{tree}) = 0$$

Our idea

- 相対エントロピーは二つの確率分布間の違いを定量化する

$$S(\rho_A || \rho_B) \equiv \text{Tr} [\rho_A \ln \rho_A - \rho_A \ln \rho_B] \geq 0$$

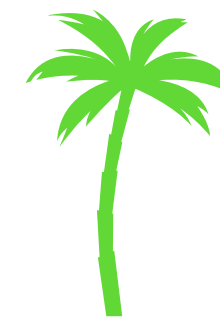
等号は $\rho_A = \rho_B$ のときのみ成り立つ

- 相対エントロピーは確率分布関数で定義される二つのものの間の定量的な違いを表す

Ex.



$\mapsto \rho_A$



$\mapsto \rho_B$

$$S(\text{tree} || \text{palm}) > 0$$

$$S(\text{tree} || \text{tree}) = 0$$

相互作用を含む理論とそうでない理論の間の相対エントロピーを考えるのはどうか？

理論に対する確率密度演算子

理論に対する確率密度演算子

- ハミルトニアン H で定義される理論の確率分布関数を次のように定義

$$\text{確率密度演算子: } \rho = e^{-\beta H} / Z, \text{ 分配関数: } Z = \text{Tr } e^{-\beta H}$$

以下の議論ではゼロ温度 $\beta \rightarrow \infty$ の場合を主に考える

理論に対する確率密度演算子

- ハミルトニアン H で定義される理論の確率分布関数を次のように定義

$$\text{確率密度演算子: } \rho = e^{-\beta H} / Z, \text{ 分配関数: } Z = \text{Tr } e^{-\beta H}$$

以下の議論ではゼロ温度 $\beta \rightarrow \infty$ の場合を主に考える

- 二つの理論の間の相対エントロピー

$$S(\rho_A || \rho_B) \equiv \text{Tr} [\rho_A \ln \rho_A - \rho_A \ln \rho_B] \geq 0$$

理論に対する確率密度演算子

- ハミルトニアン H で定義される理論の確率分布関数を次のように定義

$$\text{確率密度演算子: } \rho = e^{-\beta H} / Z, \text{ 分配関数: } Z = \text{Tr } e^{-\beta H}$$

以下の議論ではゼロ温度 $\beta \rightarrow \infty$ の場合を主に考える

- 二つの理論の間の相対エントロピー

$$S(\rho_A || \rho_B) \equiv \text{Tr} [\rho_A \ln \rho_A - \rho_A \ln \rho_B] \geq 0$$

$$\text{where } \rho_A = e^{-\beta H_A} / Z_A, \quad \rho_B = e^{-\beta H_B} / Z_B$$

二つの理論

- 次のようなハミルトニアンで表せる理論を考える $H_0 + H_I$

二つの理論

重軽自由度間の相互作用を含まない

- 次のようなハミルトニアンで表せる理論を考える $H_0 + H_I$

二つの理論

重軽自由度間の相互作用を含まない

重軽自由度間の相互作用

- 次のようなハミルトニアンで表せる理論を考える

$$H_0 + H_I$$

二つの理論

重軽自由度間の相互作用を含まない

重軽自由度間の相互作用

- 次のようなハミルトニアンで表せる理論を考える $H_0 + H_I$
- パラメータ g を導入してハミルトニアン $H_0 + g H_I$ について考える

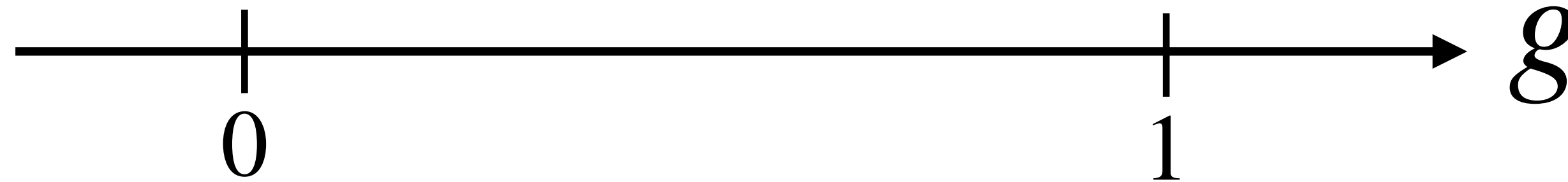
二つの理論

重軽自由度間の相互作用を含まない

重軽自由度間の相互作用

- 次のようなハミルトニアンで表せる理論を考える $H_0 + H_I$
- パラメータ g を導入してハミルトニアン $H_0 + g H_I$ について考える

A : H_0



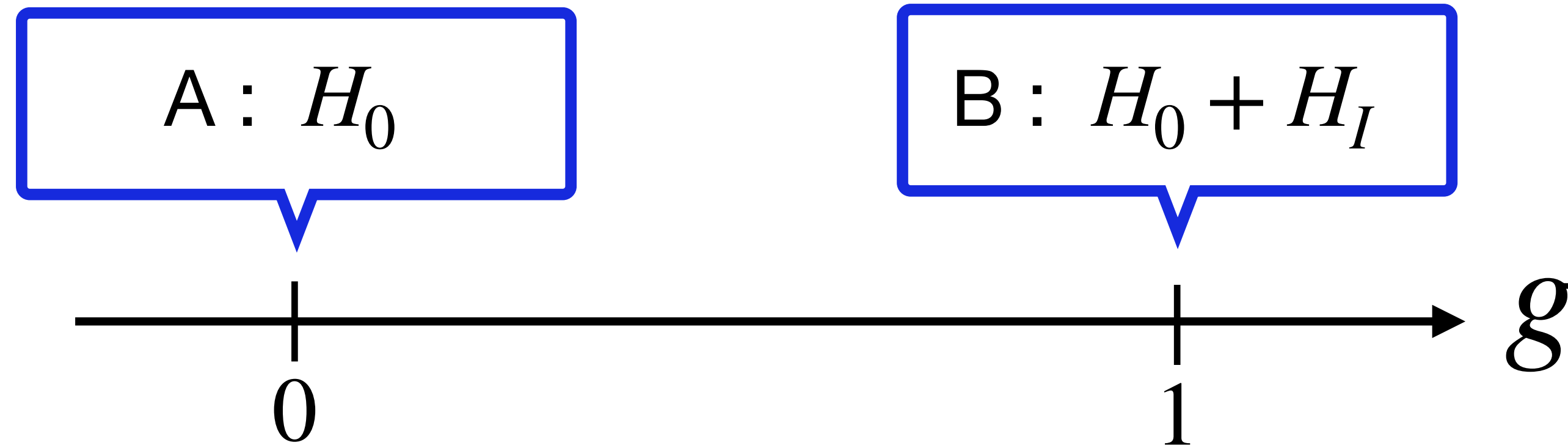
二つの理論

重軽自由度間の相互作用を含まない

重軽自由度間の相互作用

- 次のようなハミルトニアンで表せる理論を考える $H_0 + H_I$

- パラメータ g を導入してハミルトニアン $H_0 + g H_I$ について考える



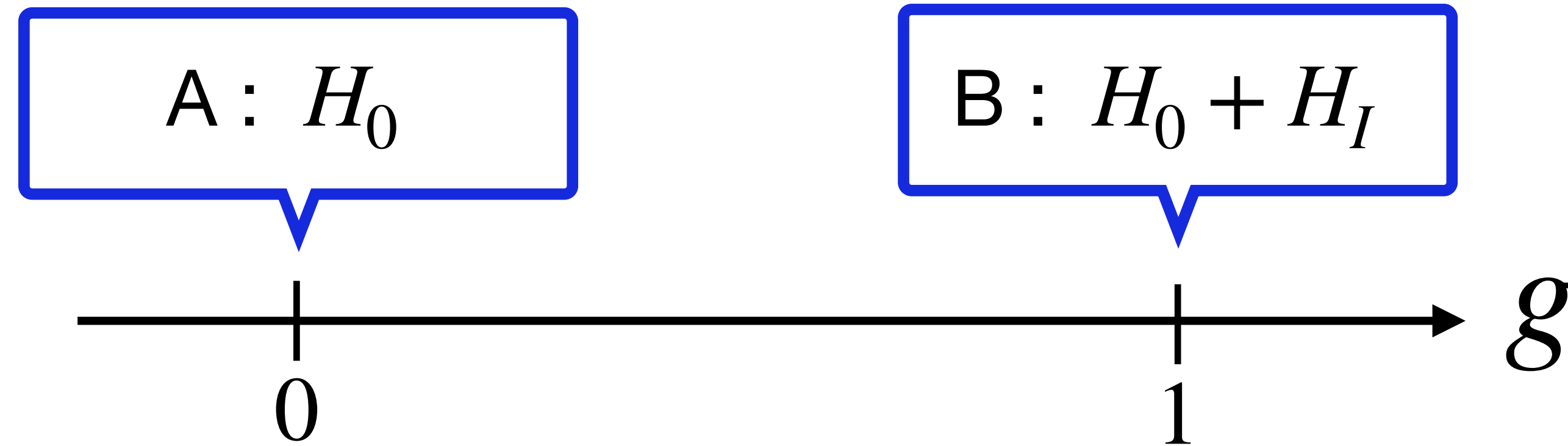
二つの理論

重軽自由度間の相互作用を含まない

重軽自由度間の相互作用

- 次のようなハミルトニアンで表せる理論を考える $H_0 + H_I$

- パラメータ g を導入してハミルトニアン $H_0 + g H_I$ について考える



相対エントロピー $S(\rho_A || \rho_B)$ を考える

Example: Euler-Heisenberg理論

- A_μ : U(1)ゲージ場(軽い場), ψ : 電子場(重たい場)

理論	ミンコフスキ時空での作用	分配関数	有効作用
A	$I_0 = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi \right)$		
B	$I_g = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi - g \cdot e (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) A^\mu \right)$		

Example: Euler-Heisenberg理論

- A_μ : U(1)ゲージ場(軽い場), ψ : 電子場(重たい場)

理論	ミンコフスキ時空での作用	分配関数	有効作用
A	$I_0 = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi \right)$	$Z_0 = \int d[A^\mu] d[\psi] d[\bar{\psi}] e^{-I_0[A^\mu, \psi]}$	$W_0 = -\ln Z_0$
B	$I_g = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi - g \cdot e (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) A^\mu \right)$	$Z_g = \int d[A^\mu] d[\psi] d[\bar{\psi}] e^{-I_g[A^\mu, \psi]}$	$W_g = -\ln Z_g$

Example: Euler-Heisenberg理論

- A_μ : U(1)ゲージ場(軽い場), ψ : 電子場(重たい場)

理論	ミンコフスキ時空での作用	分配関数	有効作用
A	$I_0 = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi \right)$	$Z_0 = \int d[A^\mu] d[\psi] d[\bar{\psi}] e^{-I_0[A^\mu, \psi]}$	$W_0 = -\ln Z_0$
B	$I_g = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi - g \cdot e (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) A^\mu \right)$	$Z_g = \int d[A^\mu] d[\psi] d[\bar{\psi}] e^{-I_g[A^\mu, \psi]}$	$W_g = -\ln Z_g$

- 相対エントロピー:

$$S(\rho_A || \rho_B) = W_0 - W_g + g \cdot \left(\frac{dW_g}{dg} \right)_{g=0} = \int (d^4x)_E \left(\frac{1}{2} \frac{g^4 e^4}{6! \pi^2 m^4} (\bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}^{\mu\nu})^2 + \frac{7}{8} \frac{g^4 e^4}{6! \pi^2 m^4} (\bar{F}_{\mu\nu} \widetilde{\bar{F}}^{\mu\nu})^2 + \mathcal{O}(m^{-6}) \right) \geq 0$$

EFTに生じる**dim-8 operators**

Example: Euler-Heisenberg理論

- A_μ : U(1)ゲージ場(軽い場), ψ : 電子場(重たい場)

理論	ミンコフスキ時空での作用	分配関数	有効作用
A	$I_0 = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi \right)$	$Z_0 = \int d[A^\mu] d[\psi] d[\bar{\psi}] e^{-I_0[A^\mu, \psi]}$	$W_0 = -\ln Z_0$
B	$I_g = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi - g \cdot e (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) A^\mu \right)$	$Z_g = \int d[A^\mu] d[\psi] d[\bar{\psi}] e^{-I_g[A^\mu, \psi]}$	$W_g = -\ln Z_g$

- 相対エントロピー:

$$S(\rho_A || \rho_B) = W_0 - W_g + g \cdot \left(\frac{dW_g}{dg} \right)_{g=0} = \int (d^4x)_E \left(\frac{1}{2} \frac{g^4 e^4}{6! \pi^2 m^4} (\bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}^{\mu\nu})^2 + \frac{7}{8} \frac{g^4 e^4}{6! \pi^2 m^4} (\bar{F}_{\mu\nu} \widetilde{\bar{F}}^{\mu\nu})^2 + \mathcal{O}(m^{-6}) \right) \geq 0$$

EFTに生じる**dim-8 operators**

相対エントロピーの非負性は高次演算子の係数の非負性を表す

Example: Euler-Heisenberg理論

- A_μ : U(1)ゲージ場(軽い場), ψ : 電子場(重たい場)

理論	ミンコフスキ時空での作用	分配関数	有効作用
A	$I_0 = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi \right)$	$Z_0 = \int d[A^\mu] d[\psi] d[\bar{\psi}] e^{-I_0[A^\mu, \psi]}$	$W_0 = -\ln Z_0$
B	$I_g = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi - g \cdot e (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) A^\mu \right)$	$Z_g = \int d[A^\mu] d[\psi] d[\bar{\psi}] e^{-I_g[A^\mu, \psi]}$	$W_g = -\ln Z_g$

- 相対エントロピー:

$$S(\rho_A || \rho_B) = W_0 - W_g + g \cdot \left(\frac{dW_g}{dg} \right)_{g=0} = \int (d^4x)_E \left(\frac{1}{2} \frac{g^4 e^4}{6! \pi^2 m^4} (\bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}^{\mu\nu})^2 + \frac{7}{8} \frac{g^4 e^4}{6! \pi^2 m^4} (\bar{F}_{\mu\nu} \widetilde{\bar{F}}^{\mu\nu})^2 + \mathcal{O}(m^{-6}) \right) \geq 0$$

EFTに生じる**dim-8 operators**

相対エントロピーの非負性は高次演算子の係数の非負性を表す

⇒ EFTが重軽自由度の相互作用から生成される場合、SU(N)ゲージ場に対しても同様な結果が成り立つ

SMEFTゲージボソン演算子に生じる制約

- 相対エントロピーの非負性:

$$S(\rho_A || \rho_B) = W_0 - W_g + g \cdot (dW_g/dg)_{g=0} = \int (d^4x)_E \frac{1}{\Lambda^4} \sum_i c_i \mathcal{O}_i \geq 0$$

$\mathcal{O}_1^{F^4} = (F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu})(F_{\rho\sigma}^b F^{b,\rho\sigma})$	$\mathcal{O}_6^{F^4} = d^{abe} d^{cde} (F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{b,\mu\nu})(F_{\rho\sigma}^c \tilde{F}^{d,\rho\sigma})$	$\tilde{\mathcal{O}}_3^{F^4} = d^{abe} d^{cde} (F_{\mu\nu}^a F^{b,\mu\nu})(F_{\rho\sigma}^c \tilde{F}^{d,\rho\sigma})$
$\mathcal{O}_2^{F^4} = (F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{a,\mu\nu})(F_{\rho\sigma}^b \tilde{F}^{b,\rho\sigma})$	$\mathcal{O}_7^{F^4} = d^{ace} d^{bde} (F_{\mu\nu}^a F^{b,\mu\nu})(F_{\rho\sigma}^c F^{d,\rho\sigma})$	$\tilde{\mathcal{O}}_4^{F^4} = d^{ace} d^{bde} (F_{\mu\nu}^a F^{b,\mu\nu})(F_{\rho\sigma}^c \tilde{F}^{d,\rho\sigma})$
$\mathcal{O}_3^{F^4} = (F_{\mu\nu}^a F^{b,\mu\nu})(F_{\rho\sigma}^a F^{b,\rho\sigma})$	$\mathcal{O}_8^{F^4} = d^{ace} d^{bde} (F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{b,\mu\nu})(F_{\rho\sigma}^c \tilde{F}^{d,\rho\sigma})$	
$\mathcal{O}_4^{F^4} = (F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{b,\mu\nu})(F_{\rho\sigma}^a \tilde{F}^{b,\rho\sigma})$	$\tilde{\mathcal{O}}_1^{F^4} = (F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu})(F_{\rho\sigma}^b \tilde{F}^{b,\rho\sigma})$	T^a : generator of $SU(N)$ Lie algebra
$\mathcal{O}_5^{F^4} = d^{abe} d^{cde} (F_{\mu\nu}^a F^{b,\mu\nu})(F_{\rho\sigma}^c F^{d,\rho\sigma})$	$\tilde{\mathcal{O}}_2^{F^4} = (F_{\mu\nu}^a F^{b,\mu\nu})(F_{\rho\sigma}^a \tilde{F}^{b,\rho\sigma})$	$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c$
		$\{T^a, T^b\} = \delta^{ab} \hat{1}/N + d^{abc} T^c$

SMEFTゲージボソン演算子に生じる制約

- 相対エントロピーの非負性:

$$S(\rho_A || \rho_B) = W_0 - W_g + g \cdot (dW_g/dg)_{g=0} = \int (d^4x)_E \frac{1}{\Lambda^4} \sum_i c_i \mathcal{O}_i \geq 0$$

- 運動方程式 $\partial^\mu F_{\mu\nu}^a + g f^{abc} A^{\mu,b} F_{\mu\nu}^c = 0$ の古典解: $A_\mu^a = u_1^a \epsilon_{1\mu} w_1 + u_2^a \epsilon_{2\mu} w_2$ with $f^{abc} u_1^a u_2^b = 0$, $\partial_\mu w_1 = l_\mu$, and $\partial_\mu w_2 = k_\mu$



※ l_μ, k_μ : 定数ベクトル

- $U(1)_Y$: $c_1^{B^4} \geq 0, c_2^{B^4} \geq 0, 4c_1^{B^4} c_2^{B^4} \geq (\tilde{c}_1^{B^4})^2,$
- $SU(2)_L$: $c_1^{W^4} + c_3^{W^4} \geq 0, c_2^{W^4} + c_4^{W^4} \geq 0, 4(c_1^{W^4} + c_3^{W^4})(c_2^{W^4} + c_4^{W^4}) \geq (\tilde{c}_1^{W^4} + \tilde{c}_2^{W^4})^2,$

U(1)とSU(2)についてはユニタリー性と因果律から得られる制約と一致

[G.N. Remmen, and N.L. Rodd, arXiv:1908.09845]

- $SU(3)_C$: $2c_1^{G^4} + c_3^{G^4} \geq 0, 3c_2^{G^4} + 2c_5^{G^4} \geq 0, 3c_2^{G^4} + 3c_4^{G^4} + c_6^{G^4} \geq 0, 3c_4^{G^4} + 2c_6^{G^4} \geq 0,$

$$4(3c_1^{G^4} + 3c_3^{G^4} + c_5^{G^4})(3c_2^{G^4} + 3c_4^{G^4} + c_6^{G^4}) \geq (3\tilde{c}_1^{G^4} + 3\tilde{c}_2^{G^4} + \tilde{c}_3^{G^4})^2$$

$$4(3c_3^{G^4} + 2c_5^{G^4})(3c_4^{G^4} + 2c_6^{G^4}) \geq (3\tilde{c}_2^{G^4} + 2\tilde{c}_3^{G^4})^2$$

SU(3)についてはユニタリー性と因果律より強い制約が生じた

Summary of review part

- 相対エントロピー: 重軽自由度間の相互作用から生じた補正を定量化

Summary of review part

- 相対エントロピー: 重軽自由度間の相互作用から生じた補正を定量化

⇒ 高次演算子以外が禁止されたEFT, e.g., $\mathcal{L}_{\text{EFT}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{nonlin}}$

Summary of review part

- 相対エントロピー: 重軽自由度間の相互作用から生じた補正を定量化

⇒ 高次演算子以外が禁止されたEFT, e.g., $\mathcal{L}_{\text{EFT}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{nonlin}}$

高次演算子の和 = 相対エントロピー > 0

Summary of review part

- 相対エントロピー: 重軽自由度間の相互作用から生じた補正を定量化

⇒ 高次演算子以外が禁止されたEFT, e.g., $\mathcal{L}_{\text{EFT}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{nonlin}}$

高次演算子の和 = 相対エントロピー > 0 ⇒ 高次演算子に対してboundが生じる

Summary of review part

- 相対エントロピー: 重軽自由度間の相互作用から生じた補正を定量化

⇒ 高次演算子以外が禁止されたEFT, e.g., $\mathcal{L}_{\text{EFT}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{nonlin}}$

高次演算子の和 = 相対エントロピー > 0 ⇒ 高次演算子に対してboundが生じる

[これまでの研究] EFT展開が有効だと仮定し、高次演算子の主要項のみを考えてきた

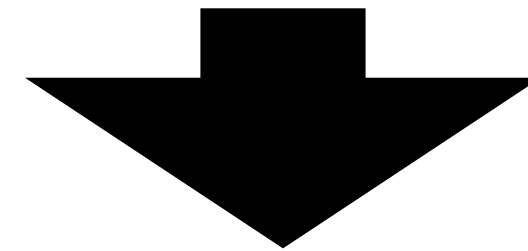
Summary of review part

- 相対エントロピー: 重軽自由度間の相互作用から生じた補正を定量化

⇒ 高次演算子以外が禁止されたEFT, e.g., $\mathcal{L}_{\text{EFT}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{nonlin}}$

高次演算子の和 = 相対エントロピー > 0 ⇒ 高次演算子に対してboundが生じる

[これまでの研究] EFT展開が有効だと仮定し、高次演算子の主要項のみを考えてきた



[今回の研究]

相対エントロピーの非負性は、高次演算子の主要項を超える効果(非線形効果)にどのようなboundを与えるか?

摂動的に解析したEuler-Heisenberg theory

- Fermionic QED: $I = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi - e (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) A^\mu \right)$ (ミンコフスキー時空の作用)

摂動的に解析したEuler-Heisenberg theory

- Fermionic QED: $I = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi - e (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) A^\mu \right)$ (ミンコフスキー時空の作用)
 - 定数磁場 ($\vec{E} = 0, \vec{B} = \text{const.}$):

摂動的に解析したEuler-Heisenberg theory

- Fermionic QED: $I = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi - e (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) A^\mu \right)$ (ミンコフスキー時空の作用)
 - 定数磁場 ($\vec{E} = 0, \vec{B} = \text{const.}$):

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}}$$

$$\text{EFT Lagrangian: } \mathcal{L}_{\text{EFT}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{nonlin}}$$

摂動的に解析したEuler-Heisenberg theory

- Fermionic QED: $I = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi - e (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) A^\mu \right)$ (ミンコフスキー時空の作用)

- 定数磁場 ($\vec{E} = 0, \vec{B} = \text{const.}$):

N 次で打ち切り(摂動的な解析)

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \simeq m^4 \int d^4x_E \sum_{n=2}^N c_n \left(e |\vec{B}| / m^2 \right)^{2n}$$

EFT Lagrangian: $\mathcal{L}_{\text{EFT}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{nonlin}}$

摂動的に解析したEuler-Heisenberg theory

- Fermionic QED: $I = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi - e (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) A^\mu \right)$ (ミンコフスキー時空の作用)

- 定数磁場 ($\vec{E} = 0, \vec{B} = \text{const.}$):

N 次で打ち切り(摂動的な解析)

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \simeq m^4 \int d^4x_E \sum_{n=2}^N c_n \left(e |\vec{B}| / m^2 \right)^{2n}$$

$$c_2 = \frac{1}{45} \frac{1}{8\pi^2}$$

摂動的に解析したEuler-Heisenberg theory

- Fermionic QED: $I = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi - e (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) A^\mu \right)$ (ミンコフスキー時空の作用)

- 定数磁場 ($\vec{E} = 0, \vec{B} = \text{const.}$):

N 次で打ち切り(摂動的な解析)

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \simeq m^4 \int d^4x_E \sum_{n=2}^N c_n \left(e |\vec{B}| / m^2 \right)^{2n}$$

$$c_2 = \frac{1}{45} \frac{1}{8\pi^2}, \quad c_3 = -\frac{4}{315} \frac{1}{8\pi^2},$$

摂動的に解析したEuler-Heisenberg theory

- Fermionic QED: $I = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi - e (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) A^\mu \right)$ (ミンコフスキー時空の作用)

- 定数磁場 ($\vec{E} = 0, \vec{B} = \text{const.}$):

N 次で打ち切り(摂動的な解析)

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \simeq m^4 \int d^4x_E \sum_{n=2}^N c_n \left(e |\vec{B}| / m^2 \right)^{2n}$$

$$c_2 = \frac{1}{45} \frac{1}{8\pi^2}, c_3 = -\frac{4}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_4 = \frac{8}{315} \frac{1}{8\pi^2}, \dots$$

摂動的に解析したEuler-Heisenberg theory

- Fermionic QED: $I = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi - e (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) A^\mu \right)$ (ミンコフスキー時空の作用)

- 定数磁場 ($\vec{E} = 0, \vec{B} = \text{const.}$):

N 次で打ち切り(摂動的な解析)

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \simeq m^4 \int d^4x_E \sum_{n=2}^N c_n \left(e |\vec{B}| / m^2 \right)^{2n}$$

$$c_2 = \frac{1}{45} \frac{1}{8\pi^2}, c_3 = -\frac{4}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_4 = \frac{8}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_5 = -\frac{32}{297} \frac{1}{8\pi^2},$$

摂動的に解析したEuler-Heisenberg theory

- Fermionic QED: $I = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi - e (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) A^\mu \right)$ (ミンコフスキー時空の作用)

- 定数磁場 ($\vec{E} = 0, \vec{B} = \text{const.}$):

N 次で打ち切り(摂動的な解析)

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \simeq m^4 \int d^4x_E \sum_{n=2}^N c_n \left(e |\vec{B}| / m^2 \right)^{2n}$$

$$c_2 = \frac{1}{45} \frac{1}{8\pi^2}, c_3 = -\frac{4}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_4 = \frac{8}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_5 = -\frac{32}{297} \frac{1}{8\pi^2}, c_6 = \frac{176896}{225225} \frac{1}{8\pi^2}, \dots$$

摂動的に解析したEuler-Heisenberg theory

- Fermionic QED: $I = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi - e (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) A^\mu \right)$ (ミンコフスキー時空の作用)

- 定数磁場 ($\vec{E} = 0, \vec{B} = \text{const.}$):

N 次で打ち切り(摂動的な解析)

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \simeq m^4 \int d^4x_E \sum_{n=2}^N c_n \left(e |\vec{B}| / m^2 \right)^{2n}$$

$$c_2 = \frac{1}{45} \frac{1}{8\pi^2}, c_3 = -\frac{4}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_4 = \frac{8}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_5 = -\frac{32}{297} \frac{1}{8\pi^2}, c_6 = \frac{176896}{225225} \frac{1}{8\pi^2}, \dots$$

摂動的に解析したEuler-Heisenberg theory

- Fermionic QED: $I = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi - e (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) A^\mu \right)$ (ミンコフスキー時空の作用)

- 定数磁場 ($\vec{E} = 0, \vec{B} = \text{const.}$):

N 次で打ち切り(摂動的な解析)

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \simeq m^4 \int d^4x_E \sum_{n=2}^N c_n \left(e |\vec{B}| / m^2 \right)^{2n}$$

$$c_2 = \frac{1}{45} \frac{1}{8\pi^2}, c_3 = -\frac{4}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_4 = \frac{8}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_5 = -\frac{32}{297} \frac{1}{8\pi^2}, c_6 = \frac{176896}{225225} \frac{1}{8\pi^2}, \dots$$

摂動計算が有効 $\rightarrow S(\rho_A || \rho_B) > 0$

摂動的に解析したEuler-Heisenberg theory

- Fermionic QED: $I = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi - e (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) A^\mu \right)$ (ミンコフスキー時空の作用)

- 定数磁場 ($\vec{E} = 0, \vec{B} = \text{const.}$):

N 次で打ち切り(摂動的な解析)

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \simeq m^4 \int d^4x_E \sum_{n=2}^N c_n \left(e |\vec{B}| / m^2 \right)^{2n}$$

$$c_2 = \frac{1}{45} \frac{1}{8\pi^2}, c_3 = -\frac{4}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_4 = \frac{8}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_5 = -\frac{32}{297} \frac{1}{8\pi^2}, c_6 = \frac{176896}{225225} \frac{1}{8\pi^2}, \dots$$

摂動計算が有効 $\rightarrow S(\rho_A || \rho_B) > 0$, 摂動計算が無効 $\rightarrow$ 非負性が破れうる

摂動的に解析したEuler-Heisenberg theory

- Fermionic QED: $I = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi - e(\bar{\psi}\gamma_\mu \psi)A^\mu \right)$ (ミンコフスキー時空の作用)

- 定数磁場 ($\vec{E} = 0, \vec{B} = \text{const.}$):

N 次で打ち切り(摂動的な解析)

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \simeq m^4 \int d^4x_E \sum_{n=2}^N c_n \left(e |\vec{B}| / m^2 \right)^{2n}$$

$$c_2 = \frac{1}{45} \frac{1}{8\pi^2}, c_3 = -\frac{4}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_4 = \frac{8}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_5 = -\frac{32}{297} \frac{1}{8\pi^2}, c_6 = \frac{176896}{225225} \frac{1}{8\pi^2}, \dots$$

摂動計算が有効 $\rightarrow S(\rho_A || \rho_B) > 0$, 摂動計算が無効 $\rightarrow$ 非負性が破れうる

$$\Downarrow \quad \vec{B} \rightarrow i\vec{E}$$

- 定数電場 ($\vec{E} = \text{const.}, \vec{B} = 0$):

$$c_2 = \frac{1}{45} \frac{1}{8\pi^2}, c_3 = \frac{4}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_4 = \frac{8}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_5 = \frac{32}{297} \frac{1}{8\pi^2}, c_6 = \frac{176896}{225225} \frac{1}{8\pi^2}, \dots$$

摂動的に解析したEuler-Heisenberg theory

- Fermionic QED: $I = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi - e(\bar{\psi}\gamma_\mu \psi)A^\mu \right)$ (ミンコフスキー時空の作用)

- 定数磁場 ($\vec{E} = 0, \vec{B} = \text{const.}$):

N 次で打ち切り(摂動的な解析)

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \simeq m^4 \int d^4x_E \sum_{n=2}^N c_n \left(e |\vec{B}| / m^2 \right)^{2n}$$

$$c_2 = \frac{1}{45} \frac{1}{8\pi^2}, c_3 = -\frac{4}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_4 = \frac{8}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_5 = -\frac{32}{297} \frac{1}{8\pi^2}, c_6 = \frac{176896}{225225} \frac{1}{8\pi^2}, \dots$$

摂動計算が有効 $\rightarrow S(\rho_A || \rho_B) > 0$, 摂動計算が無効 $\rightarrow$ 非負性が破れうる

$$\Downarrow \quad \vec{B} \rightarrow i\vec{E}$$

- 定数電場 ($\vec{E} = \text{const.}, \vec{B} = 0$):

$$c_2 = \frac{1}{45} \frac{1}{8\pi^2}, c_3 = \frac{4}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_4 = \frac{8}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_5 = \frac{32}{297} \frac{1}{8\pi^2}, c_6 = \frac{176896}{225225} \frac{1}{8\pi^2}, \dots$$

$S(\rho_A || \rho_B) > 0$ は高次演算子の和へのboundとEFT展開の有効性の指標を与える

摂動的に解析したEuler-Heisenberg theory

- Fermionic QED: $I = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi - e (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) A^\mu \right)$ (ミンコフスキー時空の作用)

- 定数磁場 ($\vec{E} = 0, \vec{B} = \text{const.}$):

N 次で打ち切り(摂動的な解析)

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \simeq m^4 \int d^4x_E \sum_{n=2}^N c_n \left(e |\vec{B}| / m^2 \right)^{2n}$$

$$c_2 = \frac{1}{45} \frac{1}{8\pi^2}, c_3 = -\frac{4}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_4 = \frac{8}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_5 = -\frac{32}{297} \frac{1}{8\pi^2}, c_6 = \frac{176896}{225225} \frac{1}{8\pi^2}, \dots \Rightarrow c_n = \frac{1}{4\pi^2} \zeta(n) (i\pi)^{-2n} (2n-3)!$$

摂動計算が有効 $\rightarrow S(\rho_A || \rho_B) > 0$, 摂動計算が無効 $\rightarrow$ 非負性が破れうる

- 定数電場 ($\vec{E} = \text{const.}, \vec{B} = 0$):

$$\vec{B} \rightarrow i\vec{E}$$

$$c_2 = \frac{1}{45} \frac{1}{8\pi^2}, c_3 = \frac{4}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_4 = \frac{8}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_5 = \frac{32}{297} \frac{1}{8\pi^2}, c_6 = \frac{176896}{225225} \frac{1}{8\pi^2}, \dots \Rightarrow c_n = \frac{1}{4\pi^2} \zeta(n) (\pi)^{-2n} (2n-3)!$$

$S(\rho_A || \rho_B) > 0$ は高次演算子の和へのboundとEFT展開の有効性の指標を与える

摂動的に解析したEuler-Heisenberg theory

- Fermionic QED: $I = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi - e(\bar{\psi}\gamma_\mu \psi)A^\mu \right)$ (ミンコフスキー時空の作用)

- 定数磁場 ($\vec{E} = 0, \vec{B} = \text{const.}$):

N 次で打ち切り(摂動的な解析)

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \simeq m^4 \int d^4x_E \sum_{n=2}^N c_n \left(e |\vec{B}| / m^2 \right)^{2n}$$

$$c_2 = \frac{1}{45} \frac{1}{8\pi^2}, c_3 = -\frac{4}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_4 = \frac{8}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_5 = -\frac{32}{297} \frac{1}{8\pi^2}, c_6 = \frac{176896}{225225} \frac{1}{8\pi^2}, \dots \Rightarrow c_n = \frac{1}{4\pi^2} \zeta(n) (i\pi)^{-2n} (2n-3)!$$

$$\Downarrow \quad \vec{B} \rightarrow i\vec{E}$$

- 定数電場 ($\vec{E} = \text{const.}, \vec{B} = 0$):

$$c_2 = \frac{1}{45} \frac{1}{8\pi^2}, c_3 = \frac{4}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_4 = \frac{8}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_5 = \frac{32}{297} \frac{1}{8\pi^2}, c_6 = \frac{176896}{225225} \frac{1}{8\pi^2}, \dots \Rightarrow c_n = \frac{1}{4\pi^2} \zeta(n) (\pi)^{-2n} (2n-3)!$$

摂動的に解析したEuler-Heisenberg theory

- Fermionic QED: $I = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi - e(\bar{\psi}\gamma_\mu \psi)A^\mu \right)$ (ミンコフスキー時空の作用)

- 定数磁場 ($\vec{E} = 0, \vec{B} = \text{const.}$):

N 次で打ち切り(摂動的な解析)

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \simeq m^4 \int d^4x_E \sum_{n=2}^N c_n \left(e |\vec{B}| / m^2 \right)^{2n}$$

$$c_2 = \frac{1}{45} \frac{1}{8\pi^2}, c_3 = -\frac{4}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_4 = \frac{8}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_5 = -\frac{32}{297} \frac{1}{8\pi^2}, c_6 = \frac{176896}{225225} \frac{1}{8\pi^2}, \dots \Rightarrow c_n = \frac{1}{4\pi^2} \zeta(n) (i\pi)^{-2n} (2n-3)!$$

$$\Downarrow \quad \vec{B} \rightarrow i\vec{E}$$

- 定数電場 ($\vec{E} = \text{const.}, \vec{B} = 0$):

$$c_2 = \frac{1}{45} \frac{1}{8\pi^2}, c_3 = \frac{4}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_4 = \frac{8}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_5 = \frac{32}{297} \frac{1}{8\pi^2}, c_6 = \frac{176896}{225225} \frac{1}{8\pi^2}, \dots \Rightarrow c_n = \frac{1}{4\pi^2} \zeta(n) (\pi)^{-2n} (2n-3)!$$

- 級数の収束半径: $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n / c_{n+1}| = 0$ (係数の階乗発散 $c_n \propto (2n-3)!$ のため)

摂動的に解析したEuler-Heisenberg theory

- Fermionic QED: $I = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi - e(\bar{\psi}\gamma_\mu \psi)A^\mu \right)$ (ミンコフスキー時空の作用)

- 定数磁場 ($\vec{E} = 0, \vec{B} = \text{const.}$):

N 次で打ち切り(摂動的な解析)

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \simeq m^4 \int d^4x_E \sum_{n=2}^N c_n \left(e |\vec{B}| / m^2 \right)^{2n}$$

$$c_2 = \frac{1}{45} \frac{1}{8\pi^2}, c_3 = -\frac{4}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_4 = \frac{8}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_5 = -\frac{32}{297} \frac{1}{8\pi^2}, c_6 = \frac{176896}{225225} \frac{1}{8\pi^2}, \dots \Rightarrow c_n = \frac{1}{4\pi^2} \zeta(n) (i\pi)^{-2n} (2n-3)!$$

$$\Downarrow \quad \vec{B} \rightarrow i\vec{E}$$

- 定数電場 ($\vec{E} = \text{const.}, \vec{B} = 0$):

$$c_2 = \frac{1}{45} \frac{1}{8\pi^2}, c_3 = \frac{4}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_4 = \frac{8}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_5 = \frac{32}{297} \frac{1}{8\pi^2}, c_6 = \frac{176896}{225225} \frac{1}{8\pi^2}, \dots \Rightarrow c_n = \frac{1}{4\pi^2} \zeta(n) (\pi)^{-2n} (2n-3)!$$

- 級数の収束半径: $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n / c_{n+1}| = 0$ (係数の階乗発散 $c_n \propto (2n-3)!$ のため)

$N \rightarrow \infty$: 級数は任意の電磁場に対して発散

摂動的に解析したEuler-Heisenberg theory

- Fermionic QED: $I = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi - e(\bar{\psi}\gamma_\mu \psi)A^\mu \right)$ (ミンコフスキー時空の作用)

- 定数磁場 ($\vec{E} = 0, \vec{B} = \text{const.}$):

N 次で打ち切り(摂動的な解析)

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \simeq m^4 \int d^4x_E \sum_{n=2}^N c_n \left(e |\vec{B}| / m^2 \right)^{2n}$$

$$c_2 = \frac{1}{45} \frac{1}{8\pi^2}, c_3 = -\frac{4}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_4 = \frac{8}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_5 = -\frac{32}{297} \frac{1}{8\pi^2}, c_6 = \frac{176896}{225225} \frac{1}{8\pi^2}, \dots \Rightarrow c_n = \frac{1}{4\pi^2} \zeta(n) (i\pi)^{-2n} (2n-3)!$$

$$\Downarrow \quad \vec{B} \rightarrow i\vec{E}$$

- 定数電場 ($\vec{E} = \text{const.}, \vec{B} = 0$):

$$c_2 = \frac{1}{45} \frac{1}{8\pi^2}, c_3 = \frac{4}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_4 = \frac{8}{315} \frac{1}{8\pi^2}, c_5 = \frac{32}{297} \frac{1}{8\pi^2}, c_6 = \frac{176896}{225225} \frac{1}{8\pi^2}, \dots \Rightarrow c_n = \frac{1}{4\pi^2} \zeta(n) (\pi)^{-2n} (2n-3)!$$

- 級数の収束半径: $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n / c_{n+1}| = 0$ (係数の階乗発散 $c_n \propto (2n-3)!$ のため)

$N \rightarrow \infty$: 級数は任意の電磁場に対して発散 $\rightarrow$ 階乗発散級数の再総和は特別な手法が必要

Borel-Laplace再総和したEuler-Heisenberg theory

- 階乗発散する級数をresumする手法 (Borel-Laplace resummation):

Borel-Laplace再総和したEuler-Heisenberg theory

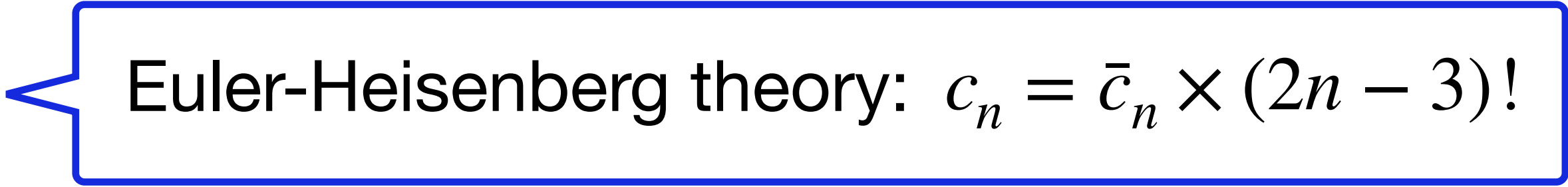
- 階乗発散する級数をresumする手法 (Borel-Laplace resummation):

- 階乗発散する級数: $\sum_{n=2}^{\infty} c_n x^{2n}$

Euler-Heisenberg theory: $c_n = \bar{c}_n \times (2n - 3)!$

Borel-Laplace再総和したEuler-Heisenberg theory

- 階乗発散する級数をresumする手法 (Borel-Laplace resummation):

- 階乗発散する級数: $\sum_{n=2}^{\infty} c_n x^{2n}$  Euler-Heisenberg theory: $c_n = \bar{c}_n \times (2n - 3)!$

- Borel変換 (階乗発散しない級数)を定義: $\mathcal{B}(\tau) \equiv \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n}{(2n - 3)!} \tau^{2n-3} = \sum_{n=2}^{\infty} \bar{c}_n \tau^{2n-3}$

Borel-Laplace再総和したEuler-Heisenberg theory

- 階乗発散する級数をresumする手法 (Borel-Laplace resummation):

- 階乗発散する級数: $\sum_{n=2}^{\infty} c_n x^{2n}$ Euler-Heisenberg theory: $c_n = \bar{c}_n \times (2n-3)!$

- Borel変換 (階乗発散しない級数)を定義: $\mathcal{B}(\tau) \equiv \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n}{(2n-3)!} \tau^{2n-3} = \sum_{n=2}^{\infty} \bar{c}_n \tau^{2n-3}$

Borel変換の収束半径: $\lim_{n \rightarrow \infty} |\bar{c}_n / \bar{c}_{n+1}| = \pi^2$ where $\bar{c}_n = \frac{1}{4\pi^2} (i\pi)^{-2n}$ for $n \rightarrow \infty$

Borel-Laplace再総和したEuler-Heisenberg theory

- 階乗発散する級数をresumする手法 (Borel-Laplace resummation):

- 階乗発散する級数: $\sum_{n=2}^{\infty} c_n x^{2n}$ Euler-Heisenberg theory: $c_n = \bar{c}_n \times (2n-3)!$

- Borel変換 (階乗発散しない級数)を定義: $\mathcal{B}(\tau) \equiv \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n}{(2n-3)!} \tau^{2n-3} = \sum_{n=2}^{\infty} \bar{c}_n \tau^{2n-3}$

Borel変換の収束半径: $\lim_{n \rightarrow \infty} |\bar{c}_n / \bar{c}_{n+1}| = \pi^2$ where $\bar{c}_n = \frac{1}{4\pi^2} (i\pi)^{-2n}$ for $n \rightarrow \infty$

最近接特異点 $\tau = i\pi$ と原点近傍: $\tau^3 \mathcal{B}(\tau) \simeq \frac{1}{4\pi^2} \frac{(\tau/\pi)^4}{1 + (\tau/\pi)^2}$ ($n \rightarrow \infty$ の振る舞いから)

Borel-Laplace再総和したEuler-Heisenberg theory

- 階乗発散する級数をresumする手法 (Borel-Laplace resummation):

- 階乗発散する級数: $\sum_{n=2}^{\infty} c_n x^{2n}$ Euler-Heisenberg theory: $c_n = \bar{c}_n \times (2n-3)!$

- Borel変換 (階乗発散しない級数)を定義: $\mathcal{B}(\tau) \equiv \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n}{(2n-3)!} \tau^{2n-3} = \sum_{n=2}^{\infty} \bar{c}_n \tau^{2n-3}$

Borel変換の収束半径: $\lim_{n \rightarrow \infty} |\bar{c}_n / \bar{c}_{n+1}| = \pi^2$ where $\bar{c}_n = \frac{1}{4\pi^2} (i\pi)^{-2n}$ for $n \rightarrow \infty$

最近接特異点 $\tau = i\pi$ と原点近傍: $\tau^3 \mathcal{B}(\tau) \simeq \frac{1}{4\pi^2} \frac{(\tau/\pi)^4}{1 + (\tau/\pi)^2}$ ($n \rightarrow \infty$ の振る舞いから)

- Laplace積分: $\int_0^{\infty} e^{-t} \mathcal{B}(xt) dt \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n x^{2n-3}}{(2n-3)!} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{2n-3} dt = x^{-3} \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^{2n}$

$(2n-3)!$

Borel-Laplace再総和したEuler-Heisenberg theory

- 階乗発散する級数をresumする手法 (Borel-Laplace resummation):

- 階乗発散する級数: $\sum_{n=2}^{\infty} c_n x^{2n}$ Euler-Heisenberg theory: $c_n = \bar{c}_n \times (2n-3)!$

- Borel変換 (階乗発散しない級数)を定義: $\mathcal{B}(\tau) \equiv \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n}{(2n-3)!} \tau^{2n-3} = \sum_{n=2}^{\infty} \bar{c}_n \tau^{2n-3}$

Borel変換の収束半径: $\lim_{n \rightarrow \infty} |\bar{c}_n / \bar{c}_{n+1}| = \pi^2$ where $\bar{c}_n = \frac{1}{4\pi^2} (i\pi)^{-2n}$ for $n \rightarrow \infty$

最近接特異点 $\tau = i\pi$ と原点近傍: $\tau^3 \mathcal{B}(\tau) \simeq \frac{1}{4\pi^2} \frac{(\tau/\pi)^4}{1 + (\tau/\pi)^2}$ ($n \rightarrow \infty$ の振る舞いから)

- Laplace積分: $\int_0^{\infty} e^{-t} \mathcal{B}(xt) dt \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n x^{2n-3}}{(2n-3)!} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{2n-3} dt = x^{-3} \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^{2n}$ ← もとの発散級数

$(2n-3)!$

Borel-Laplace再総和したEuler-Heisenberg theory

- 階乗発散する級数をresumする手法 (Borel-Laplace resummation):

- 階乗発散する級数: $\sum_{n=2}^{\infty} c_n x^{2n}$ Euler-Heisenberg theory: $c_n = \bar{c}_n \times (2n-3)!$

- Borel変換 (階乗発散しない級数)を定義: $\mathcal{B}(\tau) \equiv \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n}{(2n-3)!} \tau^{2n-3} = \sum_{n=2}^{\infty} \bar{c}_n \tau^{2n-3}$

Borel変換の収束半径: $\lim_{n \rightarrow \infty} |\bar{c}_n / \bar{c}_{n+1}| = \pi^2$ where $\bar{c}_n = \frac{1}{4\pi^2} (i\pi)^{-2n}$ for $n \rightarrow \infty$

最近接特異点 $\tau = i\pi$ と原点近傍: $\tau^3 \mathcal{B}(\tau) \simeq \frac{1}{4\pi^2} \frac{(\tau/\pi)^4}{1 + (\tau/\pi)^2}$ ($n \rightarrow \infty$ の振る舞いから)

- Laplace積分: $\int_0^{\infty} e^{-t} \mathcal{B}(xt) dt \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n x^{2n-3}}{(2n-3)!} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{2n-3} dt = x^{-3} \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^{2n}$ ← もとの発散級数

発散級数を定量的に意味のある関数(Borel変換)の積分として表せる

Borel-Laplace再総和したEuler-Heisenberg theory

- 定数磁場 ($\vec{E} = 0, \vec{B} = \text{const.}$):

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \simeq \frac{m^4}{4\pi^2} \int d^4x_E \int_0^\infty e^{-t} t^{-3} \frac{(e |\vec{B}| t/m^2 \pi)^4}{1 + (e |\vec{B}| t/m^2 \pi)^2} dt \geq 0 \quad \Rightarrow \mathcal{L}_{\text{nonlin}} > 0 \text{ under } \vec{B}$$

Borel-Laplace再総和したEuler-Heisenberg theory

- 定数磁場 ($\vec{E} = 0, \vec{B} = \text{const.}$):

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \simeq \frac{m^4}{4\pi^2} \int d^4x_E \int_0^\infty e^{-t} t^{-3} \frac{(e |\vec{B}| t/m^2 \pi)^4}{1 + (e |\vec{B}| t/m^2 \pi)^2} dt \geq 0 \quad \Rightarrow \mathcal{L}_{\text{nonlin}} > 0 \text{ under } \vec{B}$$

→摂動計算の破綻による**非負性の破れが回復**

Borel-Laplace再総和したEuler-Heisenberg theory

- 定数磁場 ($\vec{E} = 0, \vec{B} = \text{const.}$):

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \simeq \frac{m^4}{4\pi^2} \int d^4x_E \int_0^\infty e^{-t} t^{-3} \frac{(e |\vec{B}| t/m^2 \pi)^4}{1 + (e |\vec{B}| t/m^2 \pi)^2} dt \geq 0 \quad \Rightarrow \mathcal{L}_{\text{nonlin}} > 0 \text{ under } \vec{B}$$

→摂動計算の破綻による非負性の破れが回復

Ressumed relative entropyの非負性は再総和した非線形なEFTへboundを提供する

Borel-Laplace再総和したEuler-Heisenberg theory

- 定数磁場 ($\vec{E} = 0, \vec{B} = \text{const.}$):

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \simeq \frac{m^4}{4\pi^2} \int d^4x_E \int_0^\infty e^{-t} t^{-3} \frac{(e |\vec{B}| t/m^2 \pi)^4}{1 + (e |\vec{B}| t/m^2 \pi)^2} dt \geq 0 \quad \Rightarrow \mathcal{L}_{\text{nonlin}} > 0 \text{ under } \vec{B}$$

→ 摂動計算の破綻による**非負性の破れが回復**

Ressummed relative entropyの非負性は再総和した非線形なEFTへboundを提供する

- Schwinger proper time methodによる非摂動的解析:

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} = \frac{m^4}{4\pi^2} \int d^4x_E \sum_{p=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-t} t^{-3} \frac{(e |\vec{B}| t/m^2 p \pi)^4}{1 + (e |\vec{B}| t/m^2 p \pi)^2} dt \geq 0$$

Schwinger proper timeの最近接特異点の結果はresummationの結果と一致

Borel-Laplace再総和したEuler-Heisenberg theory

- 定数磁場 ($\vec{E} = 0, \vec{B} = \text{const.}$):

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \simeq \frac{m^4}{4\pi^2} \int d^4x_E \int_0^\infty e^{-t} t^{-3} \frac{(e |\vec{B}| t/m^2 \pi)^4}{1 + (e |\vec{B}| t/m^2 \pi)^2} dt \geq 0 \quad \Rightarrow \mathcal{L}_{\text{nonlin}} > 0 \text{ under } \vec{B}$$

→ 摂動計算の破綻による**非負性の破れが回復**

Ressumed relative entropyの非負性は再総和した非線形なEFTへboundを提供する

- Schwinger proper time methodによる非摂動的解析:

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} = \frac{m^4}{4\pi^2} \int d^4x_E \sum_{p=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-t} t^{-3} \frac{(e |\vec{B}| t/m^2 p \pi)^4}{1 + (e |\vec{B}| t/m^2 p \pi)^2} dt \geq 0$$

Schwinger proper timeの最近接特異点の結果はresummationの結果と一致

相対エントロピーは非負性はEFTにおけるBorel-Laplace resummationした非線形効果の符号を定める

Borel-Laplace再総和したEuler-Heisenberg theory

- 定数電場 ($\vec{E} = \text{const.}, \vec{B} = 0$):

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \simeq \frac{m^4}{4\pi^2} \int d^4x_E \mathcal{P} \int_0^\infty e^{-t} t^{-3} \frac{(e |\vec{E}| t/m^2 \pi)^4}{1 - (e |\vec{E}| t/m^2 \pi)^2} dt$$

↑
特異点を避ける主値積分

Borel-Laplace再総和したEuler-Heisenberg theory

- 定数電場 ($\vec{E} = \text{const.}, \vec{B} = 0$):

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \simeq \frac{m^4}{4\pi^2} \int d^4x_E \mathcal{P} \int_0^\infty e^{-t} t^{-3} \frac{(e |\vec{E}| t/m^2 \pi)^4}{1 - (e |\vec{E}| t/m^2 \pi)^2} dt$$

(弱場領域)

$\geq 0 \text{ for } |\pi m^2/eE| \geq 1$

↑
特異点を避ける主値積分

Borel-Laplace再総和したEuler-Heisenberg theory

- 定数電場 ($\vec{E} = \text{const.}, \vec{B} = 0$):

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \simeq \frac{m^4}{4\pi^2} \int d^4x_E \mathcal{P} \int_0^\infty e^{-t} t^{-3} \frac{(e |\vec{E}| t/m^2 \pi)^4}{1 - (e |\vec{E}| t/m^2 \pi)^2} dt \geq 0 \text{ for } |\pi m^2/eE| \geq 1$$

(弱場領域)

↑
特異点を避ける主値積分

→ 弱場領域 $|\pi m^2/eE| \geq 1$: 摂動的に $S(\rho_A || \rho_B) > 0$ を満たし、非線形EFTへ bounds

Borel-Laplace再総和したEuler-Heisenberg theory

- 定数電場 ($\vec{E} = \text{const.}, \vec{B} = 0$):

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \simeq \frac{m^4}{4\pi^2} \int d^4x_E \mathcal{P} \int_0^\infty e^{-t} t^{-3} \frac{(e |\vec{E}| t/m^2 \pi)^4}{1 - (e |\vec{E}| t/m^2 \pi)^2} dt \geq 0 \text{ for } |\pi m^2/eE| \geq 1$$

(弱場領域)

↑
特異点を避ける主値積分

→ 弱場領域 $|\pi m^2/eE| \geq 1$: 摂動的に $S(\rho_A || \rho_B) > 0$ を満たし、非線形EFTへbounds

強場領域 $|\pi m^2/eE| < 1$: $S(\rho_A || \rho_B) > 0$ が破れる (非摂動的な系の不安定性)

Borel-Laplace再総和したEuler-Heisenberg theory

- 定数電場 ($\vec{E} = \text{const.}, \vec{B} = 0$):

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \simeq \frac{m^4}{4\pi^2} \int d^4x_E \mathcal{P} \int_0^\infty e^{-t} t^{-3} \frac{(e |\vec{E}| t/m^2 \pi)^4}{1 - (e |\vec{E}| t/m^2 \pi)^2} dt \geq 0 \text{ for } |\pi m^2/eE| \geq 1 \quad (\text{弱場領域})$$

↑
特異点を避ける主値積分

→ 弱場領域 $|\pi m^2/eE| \geq 1$: 摂動的に $S(\rho_A || \rho_B) > 0$ を満たし、非線形EFTへbounds

強場領域 $|\pi m^2/eE| < 1$: $S(\rho_A || \rho_B) > 0$ が破れる (非摂動的な系の不安定性)

- Schwinger proper time methodによる非摂動的解析:

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} = \frac{m^4}{4\pi^2} \int d^4x_E \sum_{p=1}^{\infty} \left[\mathcal{P} \int_0^\infty e^{-t} t^{-3} \frac{(e |\vec{E}| t/m^2 p \pi)^4}{1 - (e |\vec{E}| t/m^2 p \pi)^2} dt + i \frac{\pi}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi p m^2/e|E|}}{(\pi p m^2/e|E|)^2} \right]$$

Borel-Laplace再総和したEuler-Heisenberg theory

- 定数電場 ($\vec{E} = \text{const.}, \vec{B} = 0$):

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \simeq \frac{m^4}{4\pi^2} \int d^4x_E \mathcal{P} \int_0^\infty e^{-t} t^{-3} \frac{(e |\vec{E}| t/m^2 \pi)^4}{1 - (e |\vec{E}| t/m^2 \pi)^2} dt \geq 0 \text{ for } |\pi m^2/eE| \geq 1$$

(弱場領域)

↑
特異点を避ける主値積分

→ 弱場領域 $|\pi m^2/eE| \geq 1$: 摂動的に $S(\rho_A || \rho_B) > 0$ を満たし、非線形EFTへbounds

強場領域 $|\pi m^2/eE| < 1$: $S(\rho_A || \rho_B) > 0$ が破れる (非摂動的な系の不安定性)

- Schwinger proper time methodによる非摂動的解析:

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} = \frac{m^4}{4\pi^2} \int d^4x_E \sum_{p=1}^{\infty} \left[\mathcal{P} \int_0^\infty e^{-t} t^{-3} \frac{(e |\vec{E}| t/m^2 p \pi)^4}{1 - (e |\vec{E}| t/m^2 p \pi)^2} dt + i \frac{\pi}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi p m^2/e|E|}}{(\pi p m^2/e|E|)^2} \right]$$

Schwinger効果

Borel-Laplace再総和したEuler-Heisenberg theory

- 定数電場 ($\vec{E} = \text{const.}, \vec{B} = 0$):

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \simeq \frac{m^4}{4\pi^2} \int d^4x_E \mathcal{P} \int_0^\infty e^{-t} t^{-3} \frac{(e |\vec{E}| t/m^2 \pi)^4}{1 - (e |\vec{E}| t/m^2 \pi)^2} dt \geq 0 \text{ for } |\pi m^2/eE| \geq 1$$

(弱場領域)

↑
特異点を避ける主値積分

→ 弱場領域 $|\pi m^2/eE| \geq 1$: 摂動的に $S(\rho_A || \rho_B) > 0$ を満たし、非線形EFTへbounds

強場領域 $|\pi m^2/eE| < 1$: $S(\rho_A || \rho_B) > 0$ が破れる (非摂動的な系の不安定性)

- Schwinger proper time methodによる非摂動的解析:

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} = \frac{m^4}{4\pi^2} \int d^4x_E \sum_{p=1}^{\infty} \left[\mathcal{P} \int_0^\infty e^{-t} t^{-3} \frac{(e |\vec{E}| t/m^2 p \pi)^4}{1 - (e |\vec{E}| t/m^2 p \pi)^2} dt + i \frac{\pi}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi p m^2/e|E|}}{(\pi p m^2/e|E|)^2} \right]$$

Schwinger効果

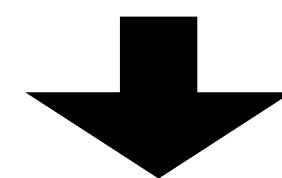
Schwinger proper timeの最近接特異点の結果はresummationの結果と一致

UV理論を知らない立場から言えること

- Ex. U(1)ゲージ理論の非線形EFTを考える: $\mathcal{L}_{\text{EFT}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{nonlin}}$

相対エントロピーの非負性 $\rightarrow S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \geq 0$ 高次演算子の無限和へのbound

- EFT展開の挙動を仮定, e.g., 階乗発散 $\rightarrow \mathcal{L}_{\text{nonlin}} = m^4 \sum_{n=2}^{\infty} c_n o^{2n}$ $\left\{ c_n = C (\tau_{\text{pole}})^{-2n} \times (2n - \ell)! \right.$



Borel-Laplace resummation

- $(o/\tau_{\text{pole}})^2 > 0$ (e.g., QEDの**定数電場**に場合) ≥ 0 for $|\tau_{\text{pole}}/(4 - \ell)o| \geq 1$

$$S(\rho_A || \rho_B) = \int (d^4x)_E \mathcal{L}_{\text{nonlin}} \simeq C m^4 \int d^4x_E \mathcal{P} \int_0^\infty e^{-t} t^{-\ell} \frac{(ot/\tau_{\text{pole}})^4}{1 - (ot/\tau_{\text{pole}})^2} dt \Rightarrow C > 0$$

摂動的な相対エントロピーの非負性はEFT展開の**階乗発散の係数符号**を定める

Summary

- 相対エントロピーを **高次演算子の無限個(非線形)** の効果を考えた
 - **安定な系 (e.g., 背景磁場):** resummed relative entropyの非負性 = **非線形EFTへbound**
 - 非摂動的に **不安定な系 (e.g., 背景電場):**
 - **弱結合領域:** resummed relative entropyの非負性が満たされる = **非線形EFTへbound**
 - **強結合領域:** resummed relative entropyの非負性が破れる = **不安定性**

相対エントロピーの方法は、**理論の整合性(e.g., positivity bound)**と系に生じる非摂動的不安定性を統一的に理解できる可能性がある