

Revisiting Instanton Calculations in Broken Phase

青木 隆文 (Takafumi Aoki)

東京大学 宇宙線研究所, D2

2604.02987 [hep-th] (JHEP 07, 2026) with M. Ibe and S. Shirai.

- ゲージ理論のインスタントン
 - 経路積分におけるインスタントン
 - 破れた相でのインスタントン
- スカラーモデルの類似物: 質量をもつ $-\lambda\phi^4$ 模型
 - 無質量：インスタントン
 - 有質量：インスタントンが存在しない
 - 拘束の導入
 - 解の構成：漸近マッチングとパズル
- 我々の研究：パズルの解消 ～具体的な解の構成とともに～

ゲージ理論のインスタントン

4 次元 Euclid 空間上の非可換ゲージ理論に現れるトポロジカルソリトン.

- 巻き付き数 (インスタントン数) $w = 0, \pm 1, \dots$ で分類される:

$$\begin{aligned} w &= (\text{constant}) \times \int d^4x \operatorname{tr} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \\ &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{for } S_{\text{Euclidean}} < \infty). \end{aligned}$$

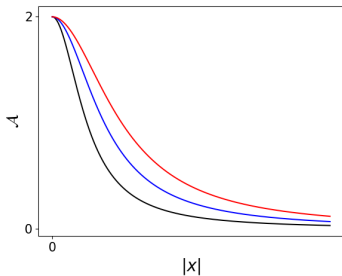
- 作用の極小である.

$$S_{\text{Euclidean}} = \frac{8\pi^2}{g^2} |w|.$$

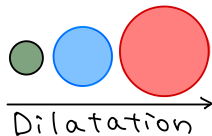
インスタントン

作用はインスタントンの「サイズ」 ρ によらない。

インスタントン (in 特異ゲージ) : $A_{\mu}^a = \bar{\eta}_{\mu\nu}^a \frac{x_{\nu}}{|x|^2} \mathcal{A}(|x|)$, $\mathcal{A}(|x|) = \frac{2\rho^2}{|x|^2 + \rho^2}$.



Instanton profile function



経路積分におけるインスタントン

準古典近似

注意: $\hbar$ 展開 $\simeq g^2$ 展開 $\rightarrow$ 強結合 $g \gtrsim 1$ で破綻.

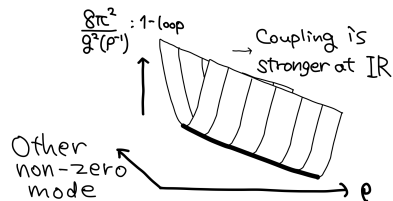
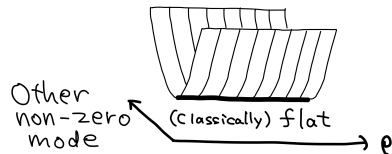
$Z = \int \mathcal{D}A \exp(-S[A]/\hbar)$ の $\hbar$ 展開:

$S \simeq$ 作用の極小 + [極小周りの揺らぎ] 2 .

揺らぎを積分 [e.g. G. 't Hooft (1976)],

bare $g \rightarrow$ renormalized $g(\rho^{-1})$.

ρ は量子論込みだと「平坦方向」ではない.



破れた相でのインスタントン

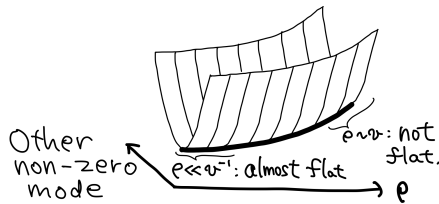
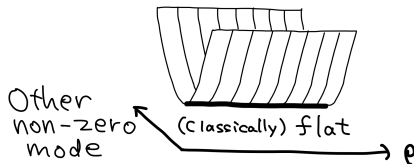
ゲージ対称性の自発的破れがある場合は？ [I. Affleck (1980)]

$$\mathcal{L}_{\text{YMH}} = \frac{1}{2g^2} \text{Tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + |D_\mu H|^2 + \frac{\lambda}{4} (H^\dagger H - v^2)^2. \quad (\text{SU(2) gauge theory with SU(2) doublet } H.)$$

- インスタントンの配位の作用は、サイズとともに増大する。

なぜ?: $|H| \sim v$ at $|x| \gg \rho \rightarrow |A_\mu H|^2$ が A_μ の $|x| \gg \rho$ での値を拾う。

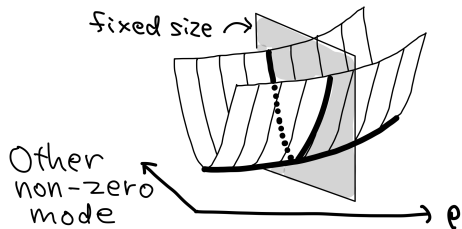
- $A_\mu \neq 0$ の厳密な極小は無いことが示せる。
- しかし、小さいインスタントン ($\rho \ll v^{-1}$) には破れが実質的に見えない。



Constrained Instanton

- 大きくない ($\rho \lesssim v^{-1}$) インスタントンの寄与は無視できない.
- 計算のためには, 極小ではないこれらの配位を取り出す必要がある.

サイズの拘束下での極小として $\rho \neq 0$ の配位を取り出せる.



Constrained Instanton

経路積分への拘束導入

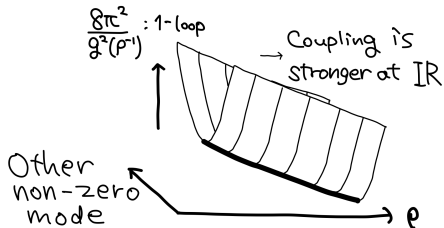
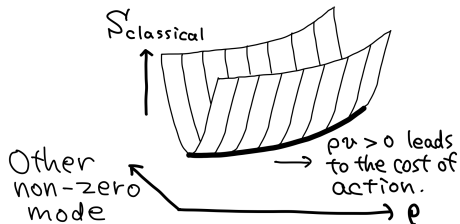
Constrained instanton の手続き = 経路積分への「1 の挿入」.

- (配位空間全体) = $\sum_{\rho}$ (サイズ ρ 固定のスライス)

(漸近的自由な場合,) **サイズ依存の2つの効果が競合する:**

古典: ρv とともに作用が増大.

量子効果: 有効結合 $g(\rho^{-1})$ がサイズ ρ に依存.



スカラーモデルの類似物: 質量をもつ $-\lambda\phi^4$ 模型

Euclidean $-\lambda\phi^4$ 模型

Euclid 空間でのラグランジアン:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{1}{4!} \phi^4 \right]$$

(結合定数 λ は ϕ のスケーリングによって全体係数へ.)

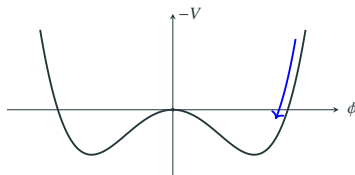
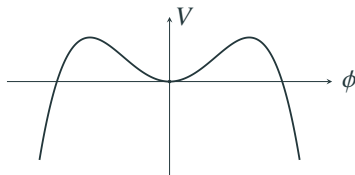
$$\text{ポテンシャル: } V(\phi) = \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{1}{4!} \phi^4$$

Euler-Lagrange 方程式

$$\phi''(r) = -\frac{3}{r} \phi'(r) + V'(\phi)$$

($m \ddot{x} = \text{friction} - U'(x)$)

反転したポテンシャル下での質点の運動.

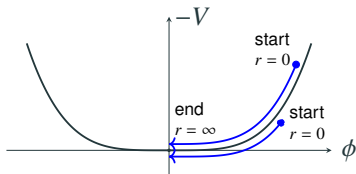


$-\lambda\phi^4$ 模型でのインスタントン

無質量の場合：インスタントン

$$\phi(r) = \frac{4\sqrt{3}\rho}{r^2 + \rho^2}, \quad \rho \text{ は "サイズ" (自由パラメタ)}$$

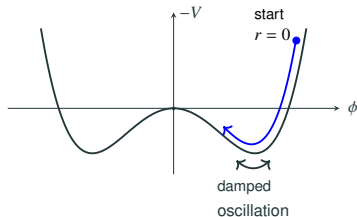
$$\begin{cases} \phi(0) = \frac{4\sqrt{3}}{\rho} & \text{任意の初期位置} \\ \phi'(0) = 0 & \text{初速度なし} \end{cases}$$



有質量の場合: どの **初期位置** から始めても、質点は $\phi = 0$ へ到達せず、減衰振動.



インスタントン解が存在しない. ($S \rightarrow \infty$)



拘束の導入

解の障壁である「傾き」 $\frac{d}{d\phi}S \neq 0$ は**拘束導入**で除去できる：

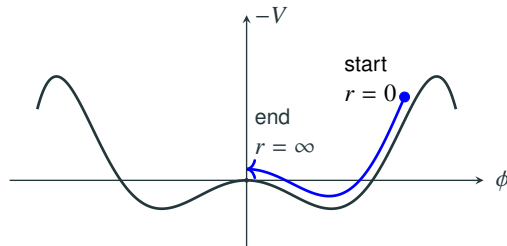
Lagrange multiplier 法:

$$S_{\text{tot}}[\phi; \sigma] := S[\phi] + \sigma \left[\int d^4x O(\phi) - (\text{const.}) \right]$$

ϕ, σ の Euler-Lagrange 方程式：

拘束下の停留点.

$$\begin{cases} \frac{\delta}{\delta\phi} : \text{EOM with } V(\phi) \rightarrow V(\phi) + \sigma O(\phi) \\ \frac{d}{d\sigma} : \text{拘束} : \int d^4x O = (\text{const.}) \end{cases}$$



例: $O = \phi^6$

「拘束下の解」 = 「変形されたポテンシャル $V + \sigma O$ の下での運動」

解の解析的な構成

考える状況: $\rho \ll m^{-1} (\iff \phi(0) \gg m)$

($\rightarrow$ 変形 $\propto \sigma$ が小さい.)

$r \rightarrow 0$ (インスタントン中心)

質点は $m \neq 0$ を実質感知しない $\rightarrow$

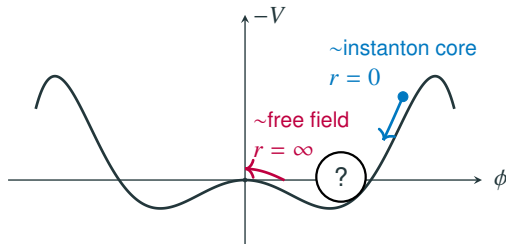
$$\phi \sim \frac{4\sqrt{3}\rho}{r^2 + \rho^2} \quad (m=0 \text{ でのインスタントン})$$

$r \rightarrow \infty$ (インスタントン遠方)

$V(\phi)$ のうち、質量項が支配的:

$$[\partial^2 + m^2]\phi = 0 \rightarrow \phi(r) \sim e^{-mr} r^{-3/2}$$

相互作用による補正は、 $[e^{-mr}]^n$ の指数関数で抑制される.

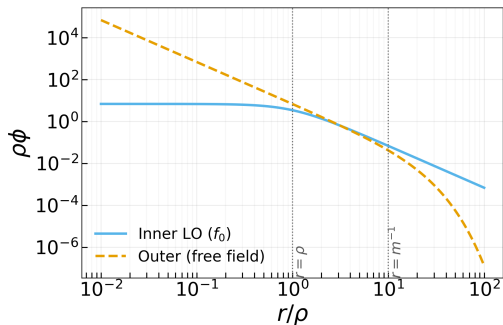


漸近マッチングの Leading Order

インスタントン解と自由場のマッチング

$$\begin{cases} \text{インスタントン解: } \frac{4\sqrt{3}\rho}{r^2+\rho^2} \sim 4\sqrt{3}\frac{\rho}{r^2} & \rho \ll r (\ll m^{-1}) \\ \text{自由場: } \frac{K_1(mr)}{r} \sim m^{-1}\frac{1}{r^2} & (\rho \ll) r \ll m^{-1} \end{cases}$$

同じ r^{-2} の振る舞い → 内側($r \ll m^{-1}$)解
と 外側($r \gg \rho$)解 のマッチングが可能.



パズル

インスタントン内側解への $\rho m (\ll 1)$ 摂動補正と自由場外側解はマッチング可能？

→ Nielsen and Nielsen (1999) はマッチングができないことを示唆した.

我々の研究: パズルの解消

～具体的な解の構成とともに～

$r \rightarrow \infty$ での解をより詳しく見ると...

インスタントンの局在領域外 $r \gg \rho$ では、相互作用は $\rho\phi$ のべきで抑制される

$$[\partial^2 + m^2]\phi \simeq 0 \quad \rightarrow \quad \phi(r) \simeq (\text{const.}) \frac{K_1(mr)}{r} \stackrel{r \gg m^{-1}}{\sim} (\text{const.}) \frac{e^{-mr}}{r^{3/2}} .$$

インスタントン解への ρm 摂動補正と自由場解とのマッチング

$r \rightarrow \infty$ での解をより詳しく見ると...

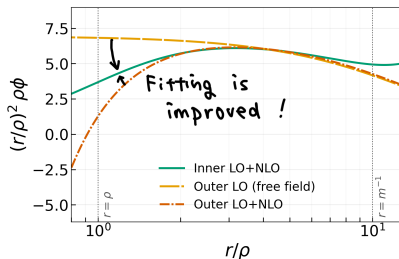
インスタントンの局在領域外 $r \gg \rho$ では、相互作用は $\rho\phi$ のべきで抑制される

$$[\partial^2 + m^2]\phi \simeq 0 \quad \rightarrow \quad \phi(r) \simeq (\text{const.}) \frac{K_1(mr)}{r} \quad r \gg m^{-1} \quad (\text{const.}) \frac{e^{-mr}}{r^{3/2}}.$$

インスタントン解への ρm 摂動補正と ~~自由場解~~ のマッチング

自由場解 + 相互作用補正

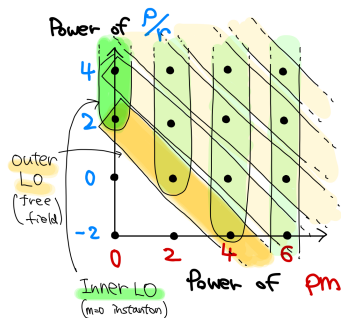
$$\phi(r) = (\text{const.}) \frac{K_1(mr)}{r} + (\rho m)^2 \underbrace{g_2(mr)} + \dots$$
$$\begin{cases} \propto e^{-2mr} & (r \gg m^{-1}) \\ \text{指数抑制なし} & (r \lesssim m^{-1}) \end{cases}$$



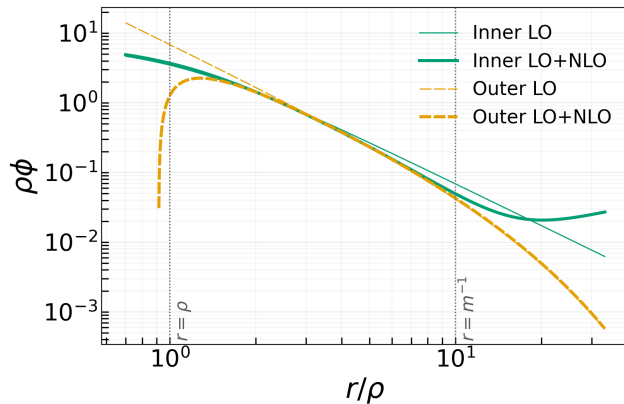
二重展開：マッチング確認

ある二重展開によって、内側のインスタントンの解と外側の自由場の解の**共通の展開**が $\rho \ll |x| \ll m^{-1}$ にて可能.

- $(\rho m)^2$ と $(\frac{\rho}{r})^2$ による二重展開
- 内側での ρm 勘定: 垂直の帯 が同じ冪
外側での ρm 勘定: 斜めの帯 が同じ冪
- Nielsen and Nielsen (1999) が mismatches を指摘した ρm 摂動オーダーで、マッチングを確かめた.



マッチング確認



($\rho m = 0.1$)

具体的な ρm 摂動の NLO までの解も、初めて構成できた.

ゲージ理論に戻ると...

$$S_{\text{YMH}} = \frac{1}{2g^2} \int d^4x \left[\text{Tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + |D_\mu H|^2 + \frac{\lambda}{4} (H^\dagger H - v^2)^2 \right]$$

質量を持つ $-\lambda\phi^4$ 模型と同様に,

- Nielsen & Nielsen (1999) により **マッチングの失敗** が指摘された.

(インスタントン解への ρm 摂動補正 ~~vs~~ **自由場解**)
ミスマッチ

- 二重展開と外側解への相互作用補正により **マッチングが整合** (特に, 我々が確かめたオーダーまでの結果は O の選択によらない.)

ゲージ理論の場合, 拘束の演算子 O の例は

$$S_{\text{tot}} := S_{\text{YMH}} + \sigma \left[\int d^4x O - (\text{const.}) \right], \quad O = \left(\frac{1}{2} \text{Tr} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \right)^2$$

拘束演算子はサイズ依存性を持つ: $\int d^4x O \propto \rho^{-4}$.

- **Constrained instanton** はインスタントンの配位で、ゲージ理論の破れた相でサイズ固定の拘束下で作用の極小点である.
- Nielsen and Nielsen (1999) は, ρm で摂動展開された解には, **内側/外側での解にマッチングの不整合がある**と指摘した.
- 我々は, 展開とマッチングのパラメタを適切に取れば, **指摘されたマッチングの不整合は解消される**ことを確かめた.
- **解を $(\rho m)^2$ オーダーまで具体的に求め**, 高次のオーダーのマッチングの手続きも明らかにした.
- この成果を経て, 作用の 2 次揺らぎを含んだ準古典近似の計算ができる!

補足

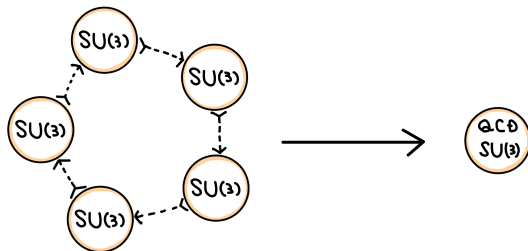
破れた相でのインスタントンの応用

アクション質量の増大?: [P. Agrawal & K. Howe (2017)]

直積群のトイ模型: $[\mathrm{SU}(3)]^{n_s}$ ゲージ対称性と n_s 個のアクション.

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n_s} \mathrm{tr} \left[-\frac{1}{2} F_i F_i + \left(\theta_i + \frac{a_i}{f_i} \right) \frac{g_i^2}{16\pi^2} F_i \tilde{F}_i \right] + (\text{対称性を破るスカラー})$$

双基本表現スカラーでゲージ対称性を破る: $[\mathrm{SU}(3)]^{n_s} \rightarrow \mathrm{SU}(3)_{\mathrm{QCD}}$



各 $SU(3)_i$ からの小サイズインスタントン効果: $\Delta V(a_i) \propto -v^4 \exp\left(-\frac{8\pi^2}{g_i^2(v)}\right) \cos\left(\frac{a_i}{f_i}\right)$.
(v : 対称性の破れのスケール)

トイ模型での**アクシオン質量増大**. [P. Agrawal & K. Howe (2017), C. Csaki et al (2020)]

注意:

強い CP 問題を「自然に」解きつつ、小サイズインスタントンでアクシオン質量を増大するには困難がある [TA, M.Ibe, S.Shirai and K.Watanabe (2024)].

古典論での拘束付き最小化: Lagrange multiplier 法

$$S_{\text{total}}[A, H; \sigma] = S_{\text{YMH}}[A, H] + \sigma(S_{\text{constraint}} - f(\rho)),$$

$$S_{\text{constraint}} = \int d^4x O_{\text{constraint}}.$$

手続き:

- **Lagrange multiplier 法:**

$f(\rho)$ を固定し, $S_{\text{total}}[A, H; \sigma]$ の停留点を求める.

拘束項:

- 例: $O_{\text{constraint}} = \left(\frac{1}{2} \text{Tr } F \tilde{F}\right)^2$, $\int d^4x O_{\text{constraint}} = \frac{384\pi^2}{7} \rho^{-4} (1 + O(\rho^2 v^2))$

Constrained Instanton: 手続き

量子論での拘束の手続き [Gervais, Neveu and Virasoro (1977)]

Constrained instanton の手続きは Z への「**1 の挿入**」と理解できる.

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\Phi \, df \, \delta(f - S_{\text{constraint}}) \exp(-S_{\text{YMH}}) \\ &= \int \mathcal{D}\Phi \, df \, \delta(f - S_{\text{constraint}}) \exp\left(\overbrace{-S_{\text{YMH}} - \sigma(S_{\text{constraint}} - f(\rho))}^{-S_{\text{total}}}\right) \quad (0 \text{ を加えただけ}) \\ &= \dots = \int \overbrace{\mathcal{D}\varphi}^{\phi =: \varphi + (\text{停留点})} df \frac{d\mu}{2\pi} \exp\left(\overbrace{-S_{\text{total}}^{\text{classical}}(f)}^{\text{停留点での値}} - i\mu \int \frac{\delta S_{\text{constraint}}}{\delta \Phi} \varphi - \frac{1}{2} \int \varphi \frac{\delta^2 S_{\text{total}}}{\delta \Phi^2} \varphi + O(\varphi^3)\right) \\ &= \dots = \int \mathcal{D}\tilde{\varphi} \, df \exp\left(-S_{\text{total}}^{\text{classical}}(f) - \frac{1}{2} \int \tilde{\varphi} \frac{\delta^2 S_{\text{total}}}{\delta \Phi^2} \tilde{\varphi} + O(\tilde{\varphi}^3)\right) \int \frac{d\mu}{2\pi} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2} \left(-\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)\right) \\ &\simeq \int df \left(-\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^{-1/2} \exp(-S_{\text{total}}^{\text{classical}}(f)) \int \mathcal{D}\tilde{\varphi} \exp\left(-\frac{1}{2} \int \tilde{\varphi} \frac{\delta^2 S_{\text{total}}}{\delta \Phi^2} \tilde{\varphi}\right) \end{aligned}$$

内側領域での解

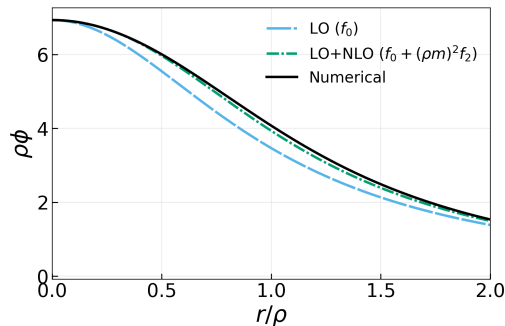
質量（の長さ）スケール内部 $r \ll m^{-1}$ での ρm による摂動:

$$\phi(r) = f_0\left(\frac{r}{\rho}\right) + (\rho m)^2 f_2\left(\frac{r}{\rho}\right) + \dots$$

(ρm = 「質量項が作る山」の $\phi(r=0)$ と比べた大きさ)

EOM (ϕ の無次元化として $\rho\phi$ を使う):

$$\underbrace{\rho \left[\frac{d}{d\hat{r}} \right]^2 \phi + \frac{3}{\hat{r}} \rho \frac{d}{d\hat{r}} \phi + \frac{1}{6} [\rho\phi]^3}_{\text{"=0" for } \phi = \frac{4\sqrt{3}\rho}{\rho^2 + r^2}} - (\rho m)^2 \rho\phi - \rho^3 \sigma \frac{\delta \mathcal{O}}{\delta \phi(\hat{r})} = 0$$



($\rho m = 0.2$)

二重展開

ρm のべき勘定は内側/外側解で異なる.

→ 内側 (インスタント的) / 外側 (自由場的) を二重展開でマッチすべき.

展開パラメタ: ρm と r (の無次元化) ($\frac{\rho}{r}$ または mr , どちらでも良い)

例: Leading (自由場) 外側解:

$$\left(\rho m \frac{K_1(mr)}{r} = \rho^{-1} \left[\underbrace{\frac{\rho^2}{r^2}}_{\substack{\text{インスタントン解} \\ \text{(無摂動) とマッチング} \\ (\rho m)^0 \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}} - \underbrace{\frac{(\rho m)^2}{2} \left(\log \frac{\rho}{r} - \log \rho m \right) - \frac{(\rho m)^2}{4} (1 - 2\gamma_E + 2 \log 2) + O((\rho m)^4)}_{\substack{\text{インスタントン解への } \rho m \text{ 摂動補正とマッチング} \\ (\rho m)^2 \left(\frac{\rho}{r}\right)^0}} \right] \right)$$

ゲージ理論における Constrained Instanton の具体的構成

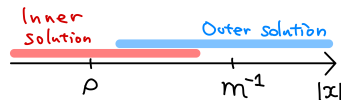
Constrained Instanton: 具体的構成

プロファイル関数 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{H}$:

$$A_{\mu}^a = \bar{\eta}_{\mu\nu}^a \frac{x_{\nu}}{x^2} \mathcal{A}(|x|), \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \mathcal{H}(|x|)$$

$\mathcal{A}$ の解析的な摂動解の構成法 ($\mathcal{H}$ も同様): (注意: $m = gv/\sqrt{2}$)

1. 内側 ($|x| \ll m^{-1}$) と 外側 ($|x| \gg \rho$) の EOM をそれぞれ無次元変数 $|x|/\rho$ と $m|x|$ を用いて書き直す.
2. 内側/外側で, $\rho m \ll 1$ の摂動を次数ごとに解く.
3. $\rho \ll |x| \ll m^{-1}$ で 内側/外側解をマッチング.



Constrained Instanton: 具体的構成

上の手続きを実行:

1. 内側/外側の EOM を書く .

2. ρm の Leading Order (LO):

$$\mathcal{A}(|x|) = \begin{cases} \frac{2\rho^2}{x^2 + \rho^2} & |x| \ll m^{-1} \\ (\text{const}) \times K_2(m|x|) & |x| \gg \rho \end{cases} \quad m = gv/\sqrt{2}.$$

$$\left(\text{「有質量自由場」の解: } K_2(m|x|) \sim \begin{cases} \frac{2}{m^2 x^2} & |x| \ll m^{-1} \\ \sqrt{\frac{\pi}{2mx}} e^{-m|x|} & |x| \gg m^{-1} \end{cases} \right)$$

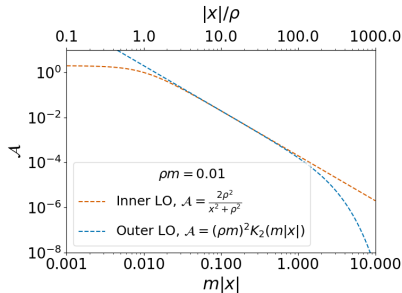
高次の ρm についても, 内側/外側解を逐次的に求められる.

Constrained Instanton: 具体的構成

3. ρm の LO 内側/外側解のマッチング

$$\mathcal{A}(|x|) = \begin{cases} \frac{2\rho^2}{x^2 + \rho^2} & |x| \ll m^{-1} \\ c_0 \times K_2(m|x|) & |x| \gg \rho \end{cases}$$

マッチング $\rightarrow c_0 = (\rho m)^2$



内側/外側解は高次でも整合的にマッチするか？

- M. Nielsen and N. K. Nielsen (1999) は、次の次数 ($[\rho m]^2$ 補正) でマッチングが破綻すると指摘した。従来用いられてきた**ほぼ全ての拘束**について起こる。

より正確には, ρm に加えて $|x|/\rho$ による二重展開を行う.

重要な帰結: 外側 ($|x| \gg \rho$) 解の精密化.

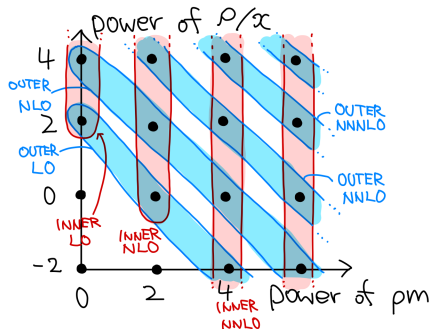
- 素朴には, 遠方で $\mathcal{A} \propto K_2(m|x|)$ (有質量自由場) と考える.
- $|x| \gg m^{-1}$ では成立するが, マッチング領域 $\rho \ll |x| \ll m^{-1}$ では破綻.

より正確には,

- $\mathcal{A}(|x|) \propto K_2(m|x|) \rho m$ の全次数で一様に, 十分外側の領域 $|x| \gg v^{-1}$ で成立.
- 一方, $\rho \ll |x| \ll v^{-1}$ では振る舞いが次数に依存.

我々の研究: マッチング

ρm と ρ/x の二重展開によりマッチングできる.



例: ρm の LO 外側解

外側 LO

$$\mathcal{A}(|x|) \sim (\rho m)^2 K_2(mx)$$

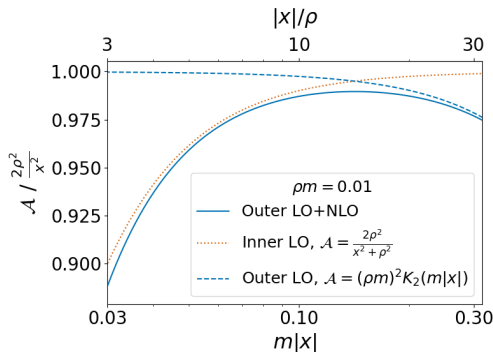
$$= (\rho m)^2 \left[\frac{2}{m^2 x^2} - \frac{1}{2} + O(m^2 x^2) \right] \quad (x \ll m^{-1})$$

$$= \underbrace{\frac{2\rho^2}{x^2}}_{\text{内側 LO}} - \underbrace{\frac{1}{2}(\rho m)^2}_{\text{内側 NLO}} + \underbrace{O(\rho^4 m^4)}_{\text{内側 NNLO}}$$

- 高次でも整合的にマッチングできる.
- 特に, $(\rho m)^2$ 次まで解を具体的に構成した.
- 数値解を用いて, 展開の整合性も確認した.

我々の研究: マッチング

例: 外側 ($x \gg \rho$) 解の LO (- - -) と LO+NLO (—)



1. NLO 外側解は $|x| \gtrsim m^{-1}$ では LO 外側解への $O(\rho^2 m^2) = O(10^{-4})$ の小さな補正にすぎない.
2. しかし, NLO 補正はマッチング領域では不可欠 $\rho \ll |x| \ll m^{-1}$.
3. NLO 外側解は 内側解とのマッチングに内側 LO の段階ですでに必要 (.....).

内側と外側での ρm の次数の違いがマッチングに本質的.

→ ρm に加え $|x|/\rho$ の二重展開で扱う.

我々の研究: マッチング

具体的には, ρm と ρ/x の二重展開は次のようにマッチする:

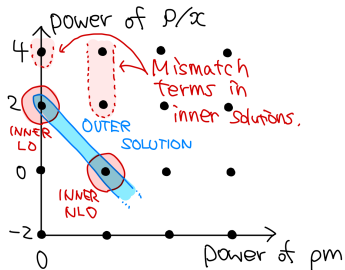
$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{inner}}^{(\text{LO})}(\rho^2/x^2) + \mathcal{A}_{\text{inner}}^{(\text{NLO})}(\rho^2/x^2) \\ = \frac{2\rho^2}{x^2} - \frac{2\rho^4}{x^4} + (\rho m_A)^2 \left[-\left(c_2 - \frac{1}{12}\right) \hat{r}^2 - 6c_2 + \left(12c_2 \log \frac{\rho^2}{x^2} - 36c_2 - \frac{1}{12}\right) \frac{\rho^2}{x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\rho^4}{x^4}\right) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{outer}}^{(\text{LO})}(m^2 x^2) + \mathcal{A}_{\text{outer}}^{(\text{NLO})}(m^2 x^2) \\ = \frac{2\rho^2}{x^2} - \frac{2\rho^4}{x^4} + (\rho m)^2 \left[-\frac{1}{2} + \frac{\rho^2}{x^2} \ln \frac{\rho^2}{x^2} + c_{\text{out}} \frac{\rho^2}{x^2} \right] + \mathcal{O}(\rho^4 m^4). \end{aligned}$$

- c_2 と c_{out} を調整すればマッチング可能. 例えば $c_1 = 1/12$.
- 他の定数も, 例えば $r = 0$ で $S < \infty$ を課すことで整合的に決まる.

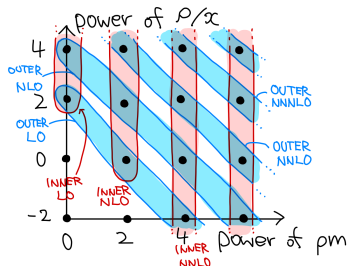
我々の研究: マッチング

先行研究



- マッチング領域での外側解の多様な振る舞いを取りこぼす.
- ミスマッチを避けるため, $O_{\text{constraint}}$ が強く制限される.

我々の研究



- マッチング領域での二重展開.
- $O_{\text{constraint}}$ の選び方によらず (NLO まで) マッチングできる.