

格子QCDとCP非保存の物理

素粒子物理学の進展 2026

2026年8月24-28日

富井 正明 (理研 R-CCS)



理化学研究所
計算科学研究センター
RIKEN Center for Computational Science

自己紹介

- 名大 (修士, 2013)
- 総研大 (博士, 2016)
- 米国 (RBC/UKQCD)
 - Columbia
 - Connecticut
 - BNL
- 理研 R-CCS

[BNL & RBRC](#)

Peter Boyle
Taku Izubuchi
Chulwoo Jung
Christopher Kelly
Patrick Oare
Amarjit Soni (emeritus)
Xin-Yu Tuo
Tianle Wang
Shuhei Yamamoto

[CERN](#)

Matteo Di Carlo
Felix Erben
Andreas Jüttner (Southampton)

[Columbia University](#)

Ryan Abbott
Norman Christ
Jonah Eick
Rajiv Eranki
Sarah Fields
Ceran Hu
Yikai Huo
Erik Lundstrum
Robert Mawhinney

[University of Connecticut](#)

Thomas Blum
Jonas Hildebrand
Luchang Jin
Vaishakhi Moningi
Anton Shcherbakov

The RBC & UKQCD collaborations

Douglas Stewart
Joshua Swain

[DESY Zeuthen](#)

Raoul Hodgson

[University of Edinburgh](#)

Matthew Black
Luigi Del Debbio
Vera Gülpers
Maxwell T. Hansen
Nils Hermansson Truedsson
Ryan Hill
Rajnandini Mukherjee
Antonin Portelli
Teseo San Jose

[Johannes Gutenberg University of Mainz](#)

Alessandro Barone

[KEK](#)

Shigemi Ohta (emeritus)

[Liverpool Hope](#)

Nicolas Garron (Liverpool)

[University of Liverpool](#)

Tobias Tsang
Aurelia Zuchanke

[Massachusetts Institute of Technology](#)

En-Hung Chao

[University of Milano Bicocca](#)

Francesca A. Bresciani
Mattia Bruno
Gabriele Morandi

[Peking University](#)

Xu Feng

[University of Regensburg](#)

Daniel Knüttel
Christoph Lehner
Julian Parrino
Andreas Völklein
Haoyu Wang

[RIKEN R-CCS](#)

Masaaki Tomii

[University of Siegen](#)

Oliver Witzel

[University of Southampton](#)

Bipasha Chakraborty
Ahmed Elgaziari
Jonathan Flynn
Ollie Heald
Joe McKeon
Chris Sachrajda

[Stony Brook University](#)

Sergey Syritsyn (RBRC)

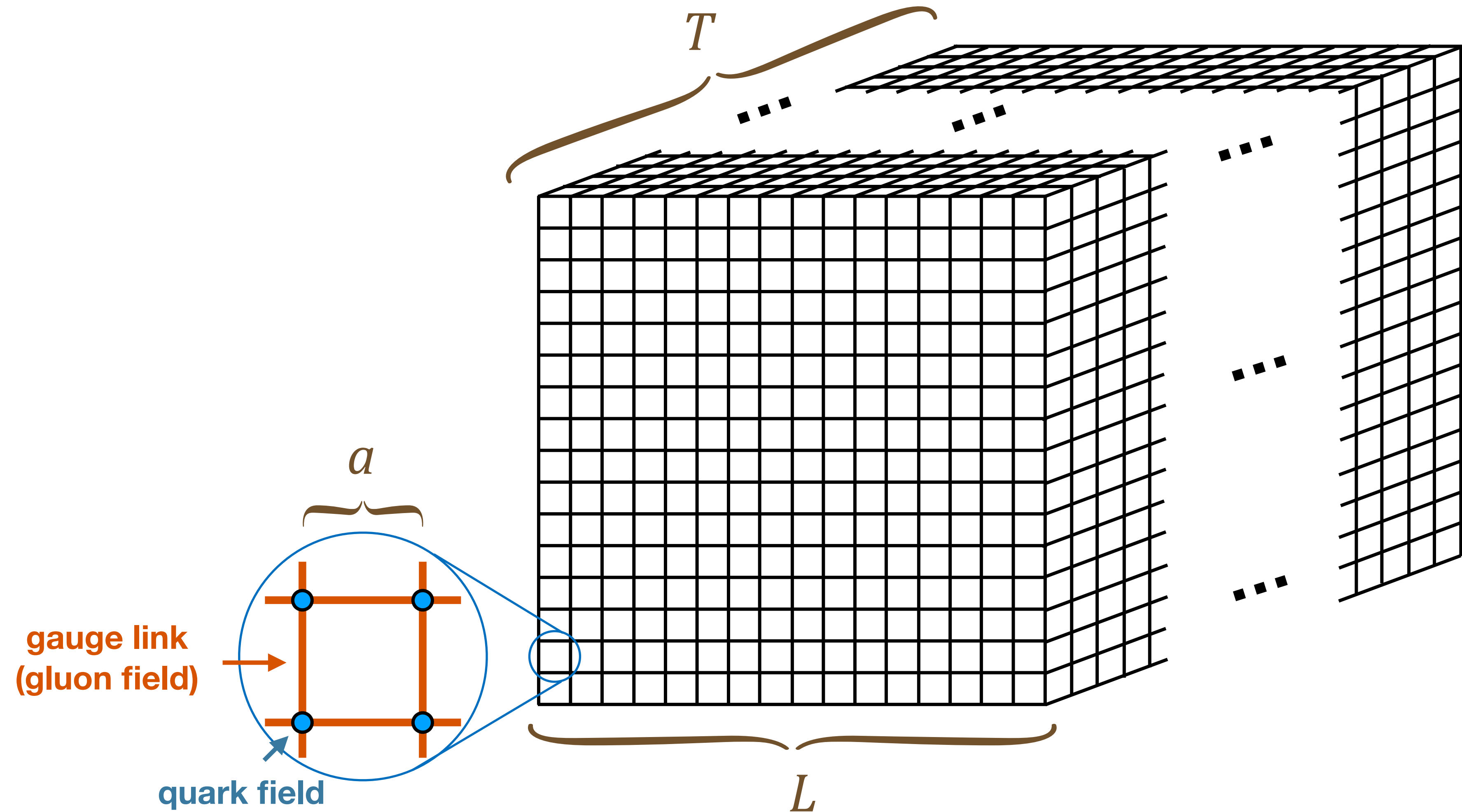
発表内容

- 格子QCDのイントロ
- $K \rightarrow \pi\pi$ 崩壊のイントロ
- 計算のハイライト
- 実験精度に追いつくために
- まとめ

格子QCDのイントロ

格子QCD

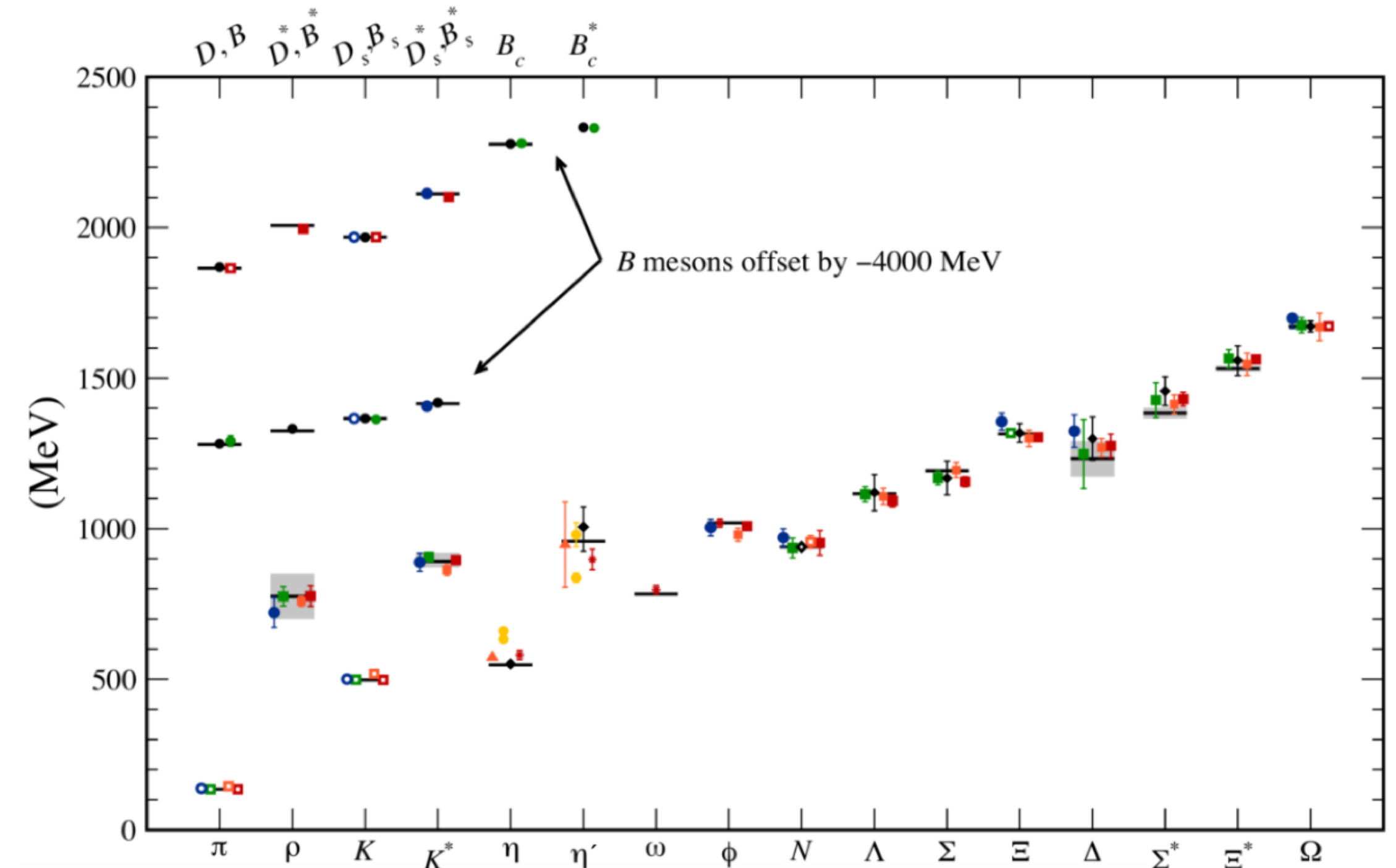
- 時空の離散化
 - 格子間隔 a
- 体積 $L^3 \times T$
- 有限自由度



格子QCDの予言能力

例：ハドロン質量

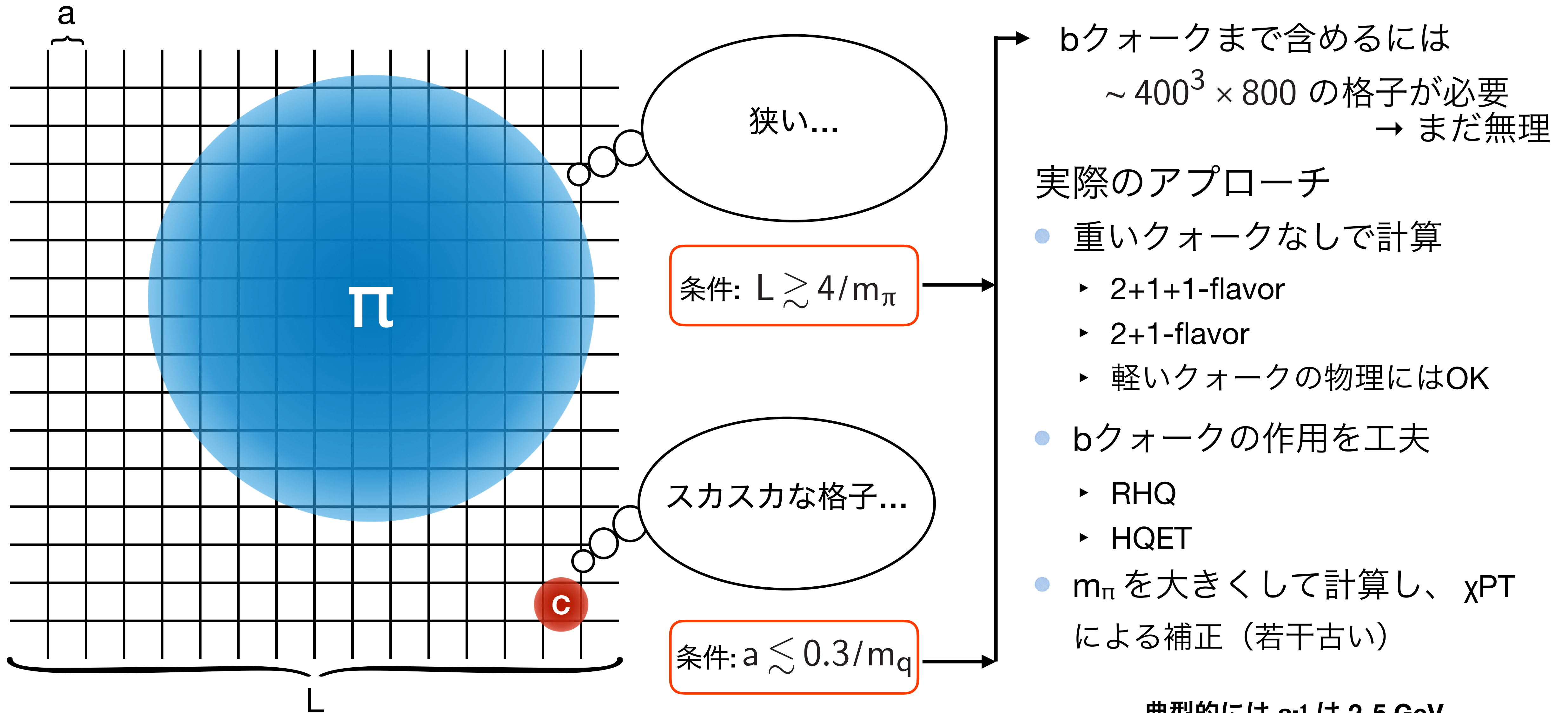
- インプット
 - ▶ 実験値 3, 4 個
 - ▶ e.g. m_π , m_K , m_Ω
 - ▶ クォーク質量と格子間隔
- アウトプット
 - ▶ QCD に関連する多種多様な量



A. Kronfeld: Ann.Rev.Nucl.Part.Sci. 62 (2012) 265

格子QCDでできること：標準模型のテスト、QCDなどの非摂動現象の理解

体積 vs 格子間隔



典型的には a^{-1} は 2-5 GeV

格子QCD計算の流れ

- ユークリッド時空で経路積分 → モンテカルロ法

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}U \mathcal{O}(\bar{\psi}, \psi, U) e^{-S(\bar{\psi}, \psi, U)}$$

相関関数など

$$= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U \hat{\mathcal{O}}(U) \underbrace{\det D(U) e^{-S_G(U)}}_{\text{Boltzmann weight}}$$

フェルミオン場を積分

importance sampling

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\mathcal{O}}(U_i)$$

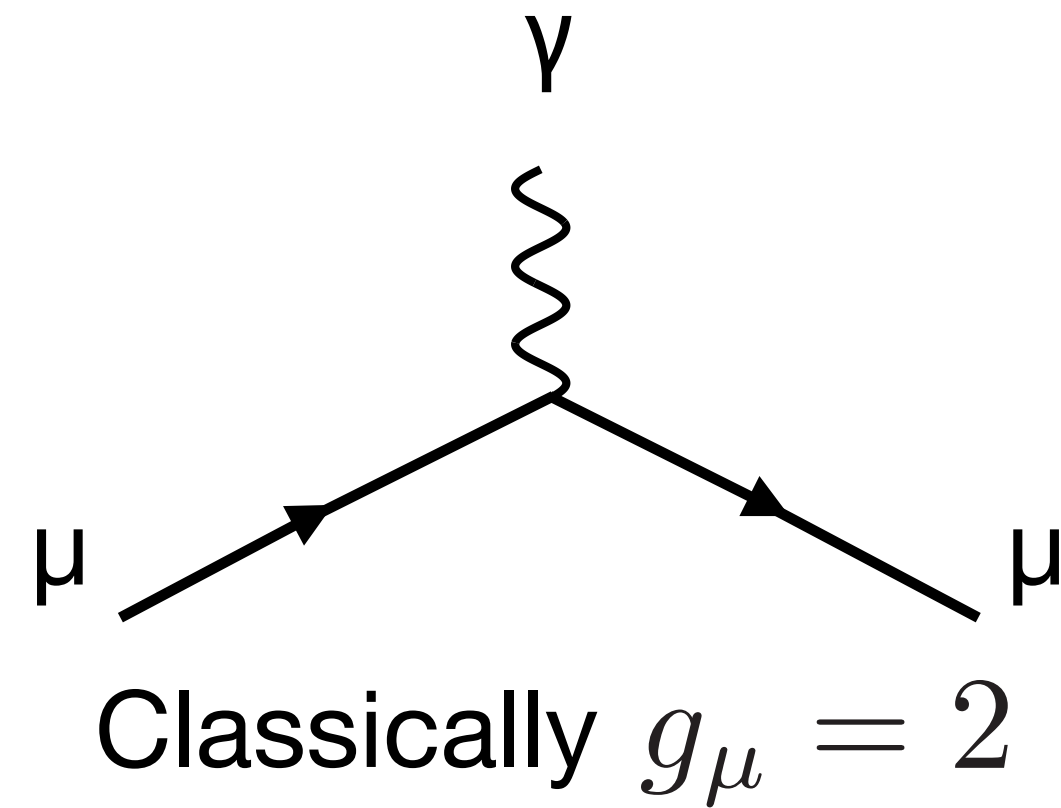
- 計算の流れ
 - ▶ Boltzmann weight に従ってゲージ配位 $U_1, U_2, \dots, U_N$ を生成
 - ▶ 各配位 U_i での測定量 $\hat{\mathcal{O}}(U_i)$ を計算
 - ▶ 統計解析

モンテカルロ法で可能な計算量の

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}(\bar{\psi}, \psi, U) & \xrightarrow{\text{フェルミオン場の積分}} & \hat{\mathcal{O}}(D(U)^{-1}, U) \\
 \text{場の汎関数} & & \begin{array}{c} \text{ディラック演算子の逆} \\ \downarrow \\ \text{ゲージ場の汎関数} \end{array}
 \end{array}$$

- n点グリーン関数 $\mathcal{O}(\bar{\psi}, \psi, U) = O_1(x_1)O_2(x_2)\dots O_n(x_n)$
- O_i : クォーク・グルーオン場でできた複合演算子
 - ▶ 例1: 軸性カレント $\bar{u}(x)\gamma_\mu\gamma_5 d(x)$
 - ▶ 例2: 4クォーク演算子 $\bar{s}(x)(1-\gamma_5)\gamma_\mu u(x) \cdot \bar{u}(x)(1-\gamma_5)\gamma_\mu d(x)$
 - ▶ 実践的にめっちゃ多種多様—このバリエーションで色々な物理を見る
 - ▶ 多くの場合ゲージ不変

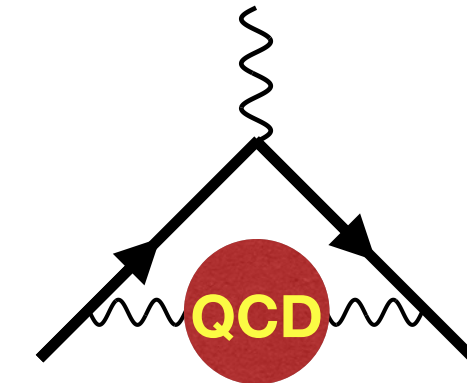
ミューオン異常磁気能率



Electromagnetic (5 loops)

$$116584718.8(2) \times 10^{-11}$$

Hadronic vacuum polarization (HVP)

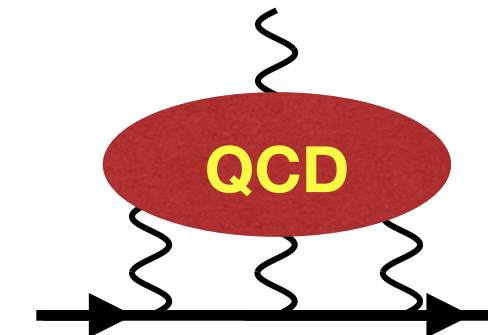


$$7045(61) \times 10^{-11}$$

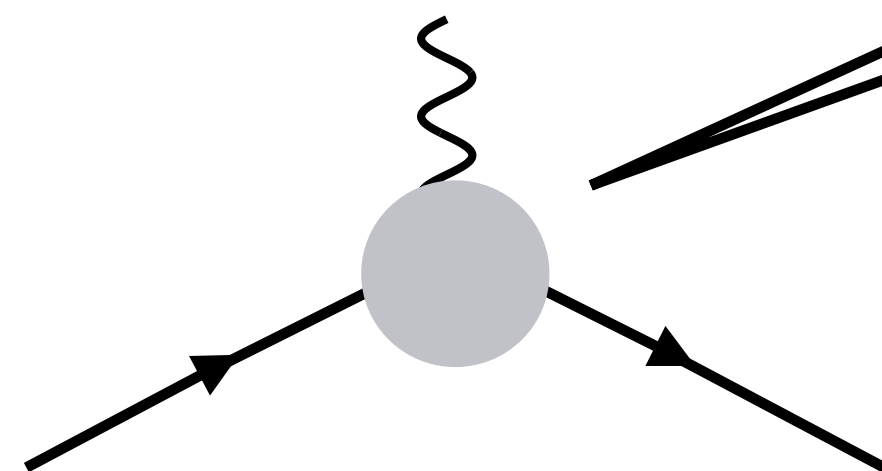
Weak (2 loops)

$$154.4(4) \times 10^{-11}$$

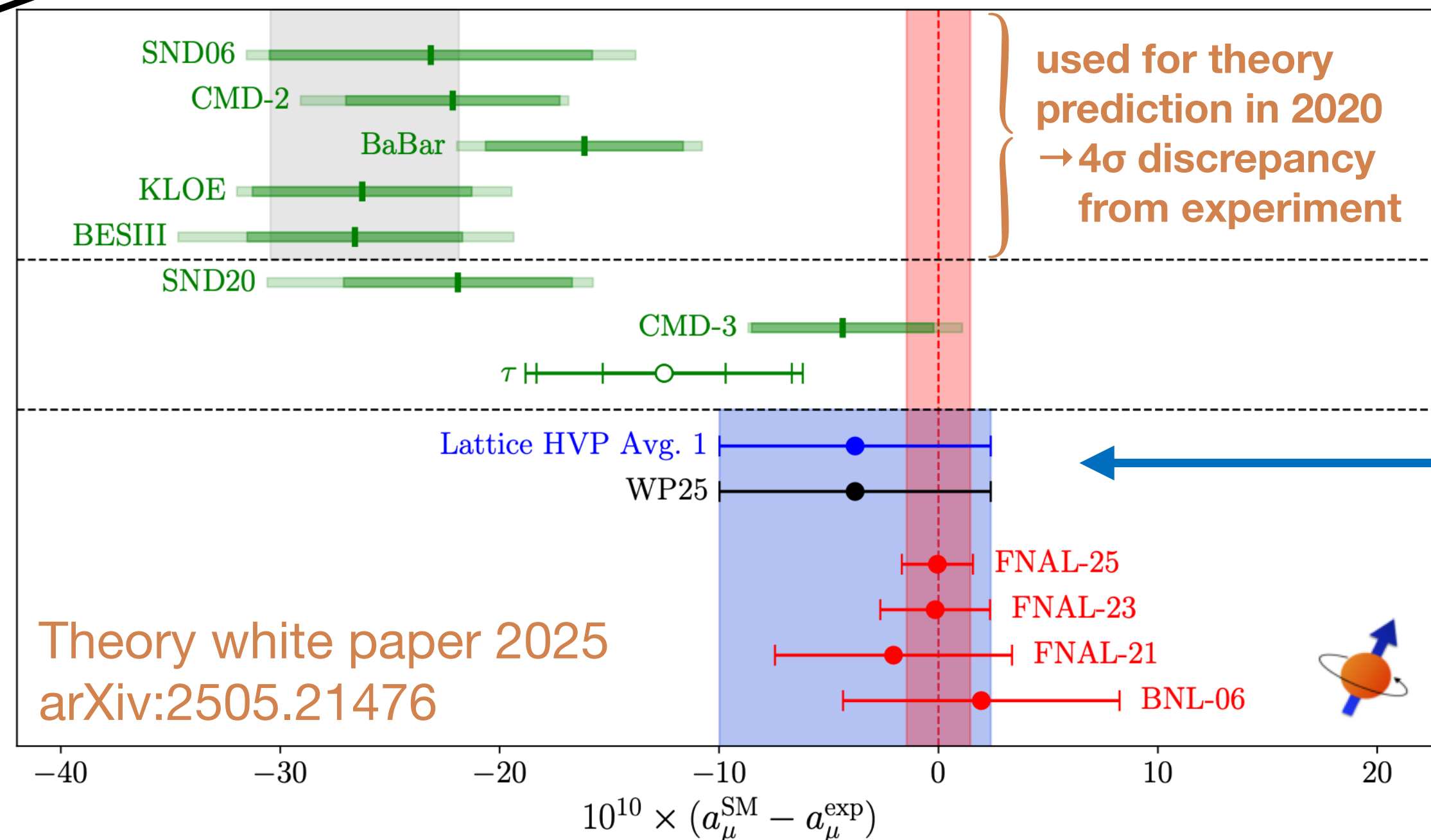
Hadronic light by light (HLbL)



$$115.5(9.9) \times 10^{-11}$$



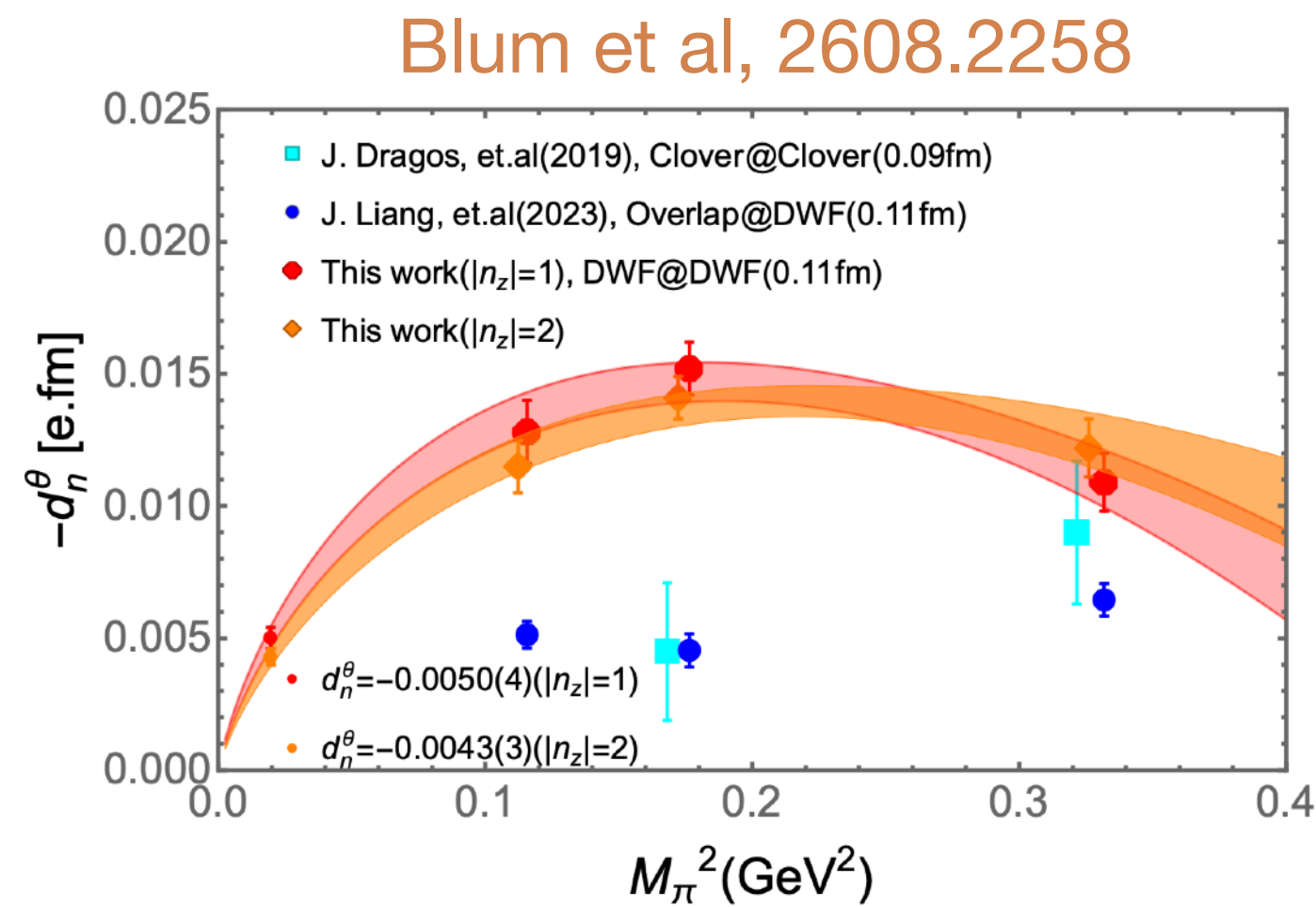
$$a_\mu = \frac{g_\mu - 2}{2} = 0.00116 \dots$$



今後意義のある計算- CP 関連

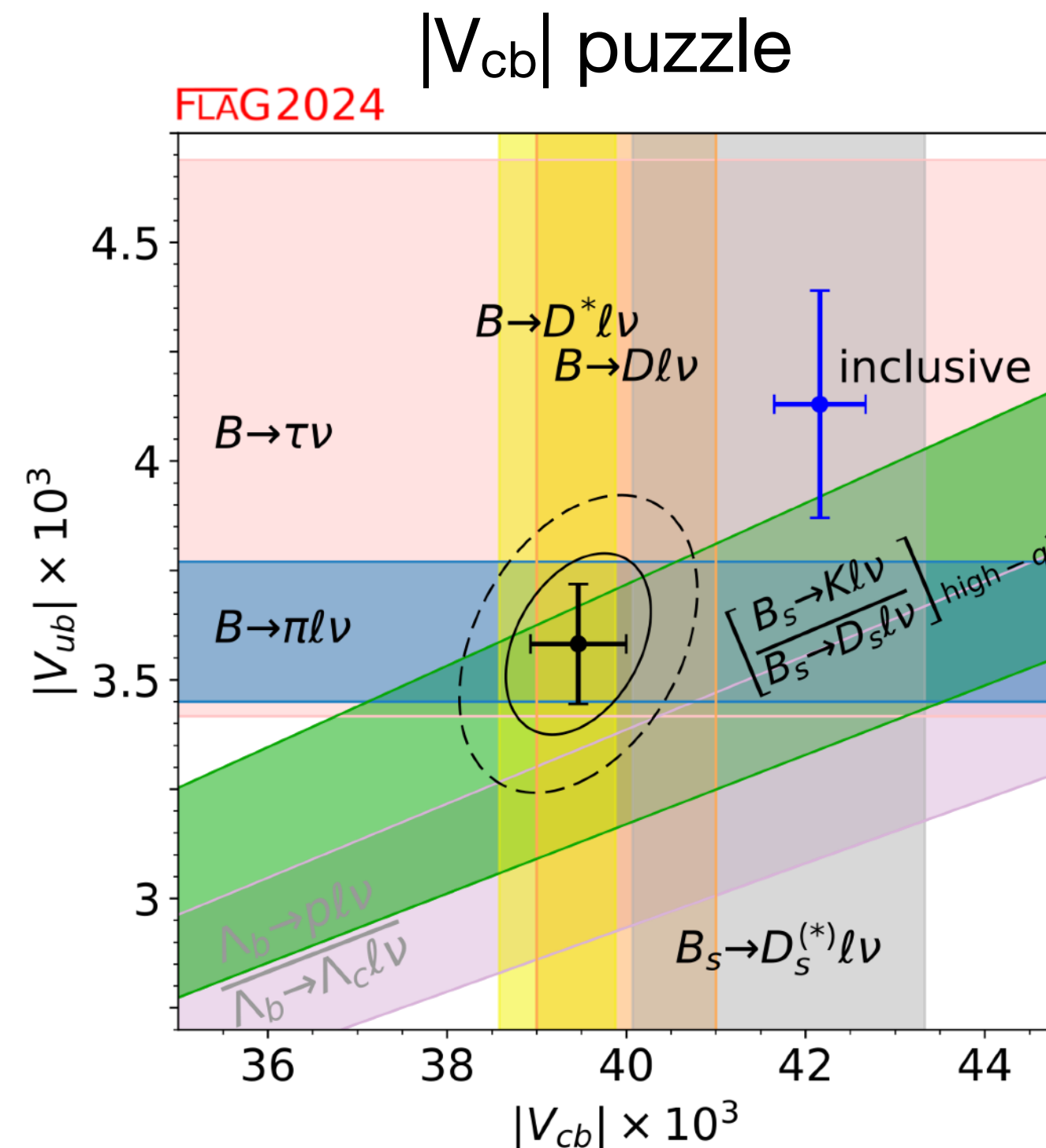
Strong CP

- θ 項への制限

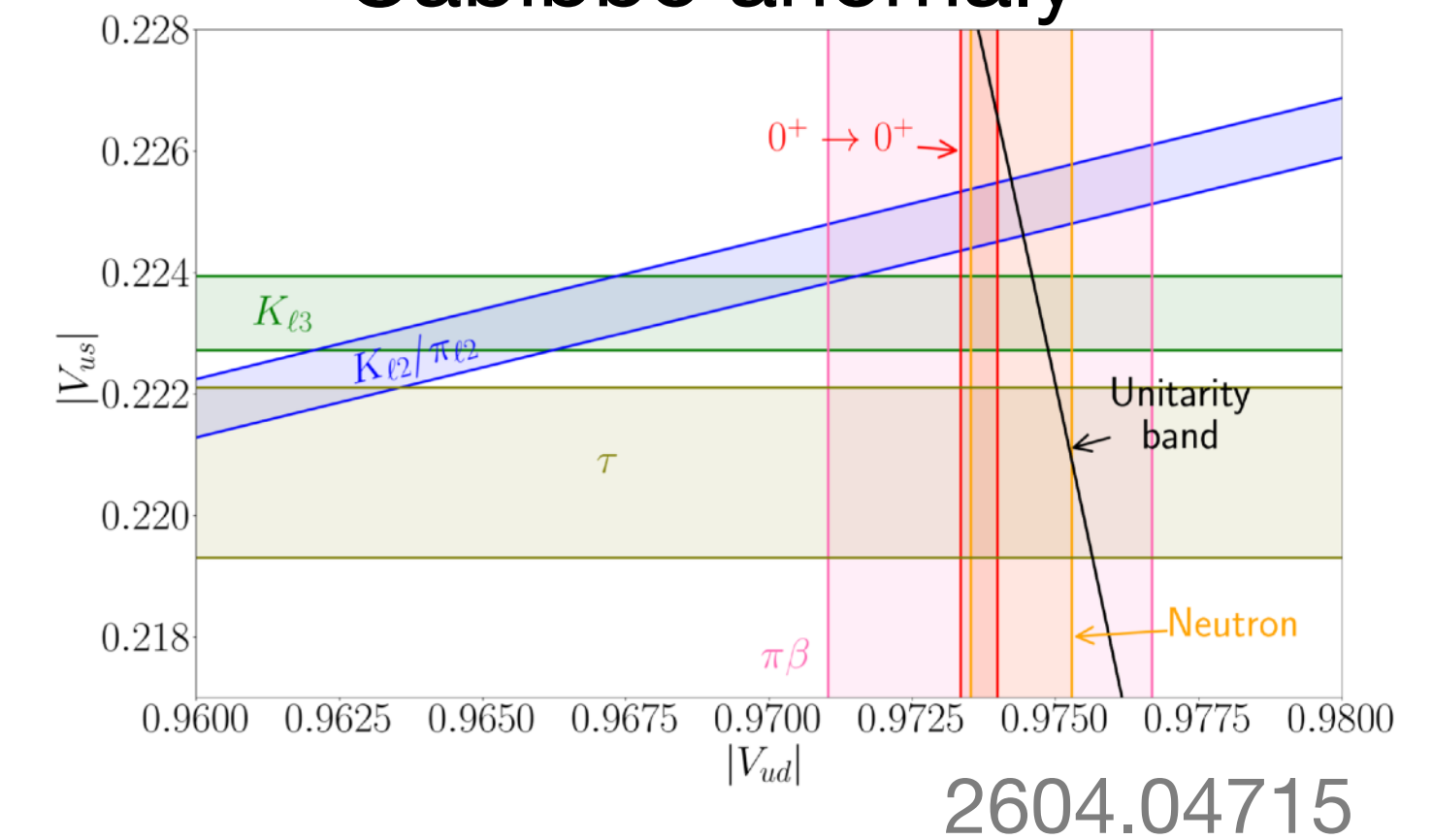


- BSM 相互作用への制限
qEDM, cEDM など

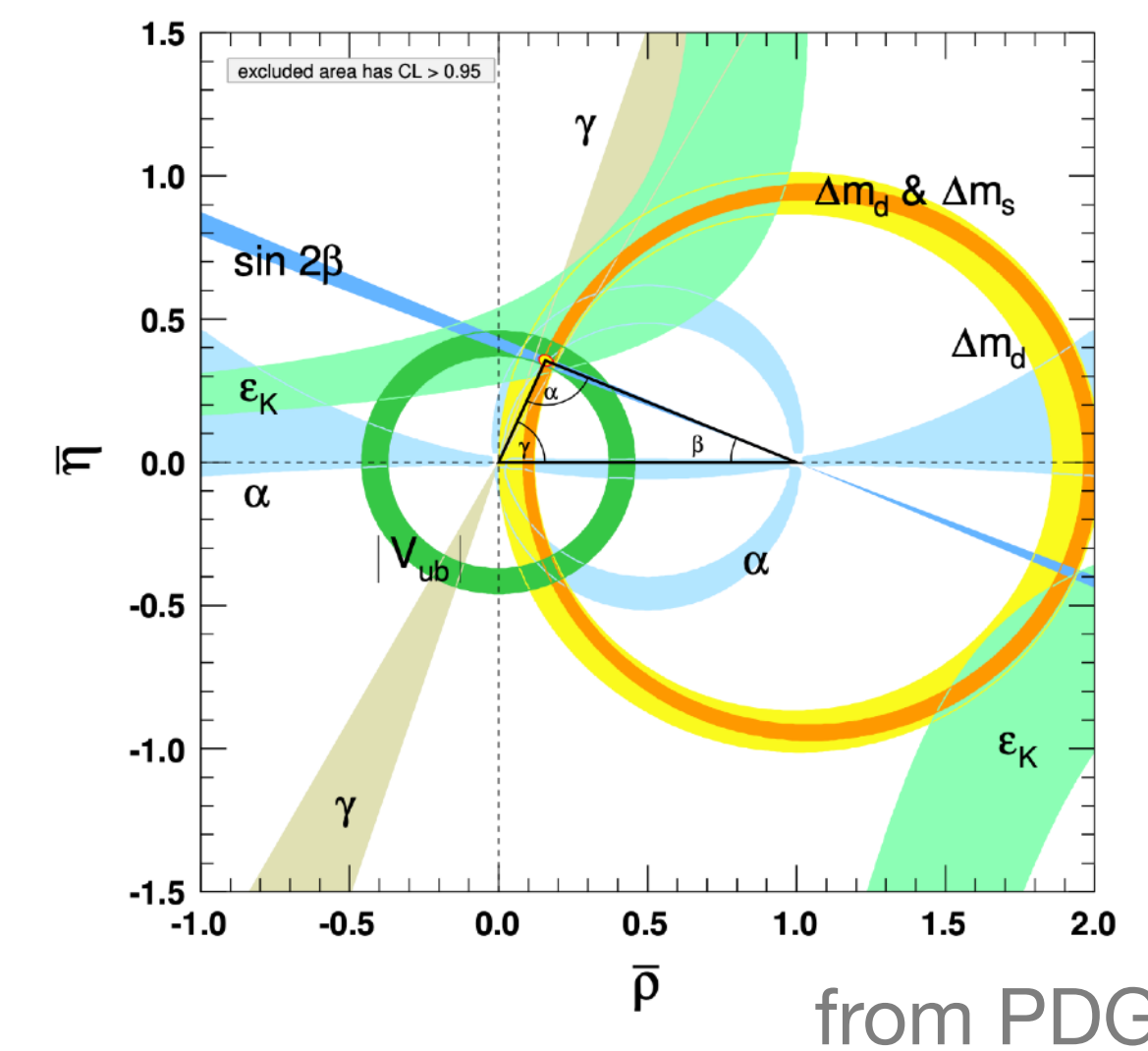
フレーバー物理



Cabibbo anomaly



UT fit



$K \rightarrow \pi\pi$ 崩壊のイントロ

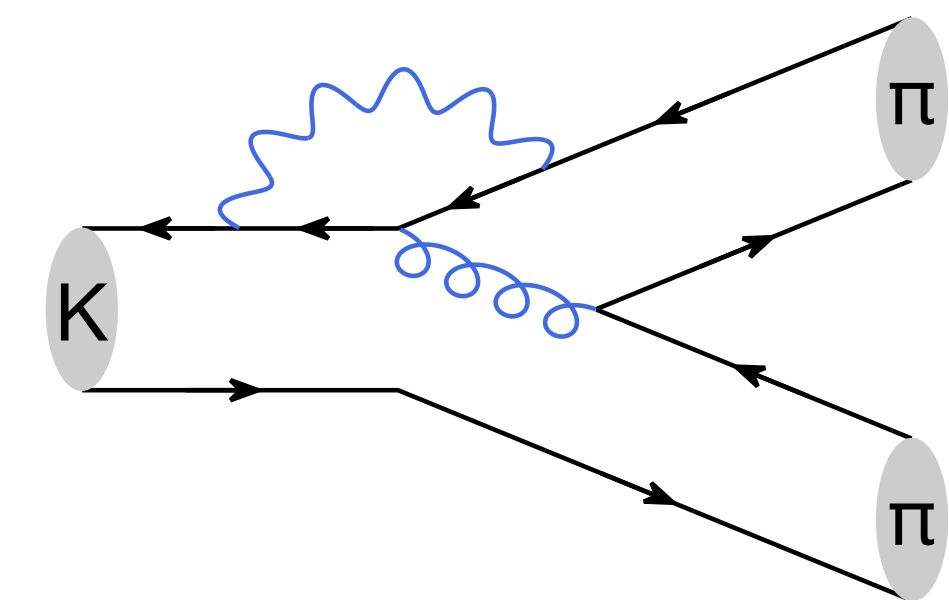
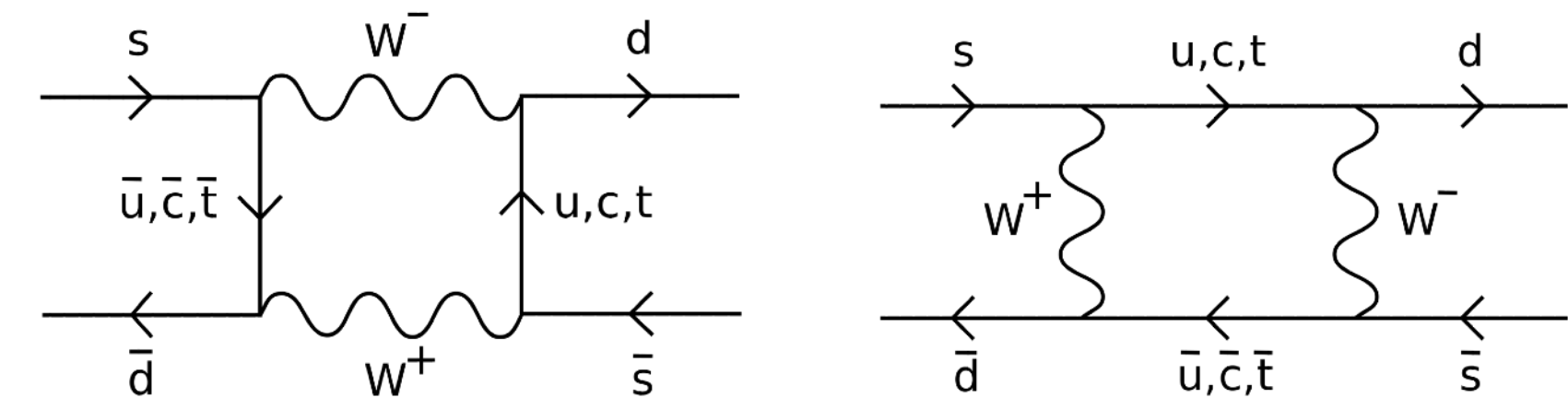
CP violation & $K \rightarrow \pi\pi$

$$|K_L\rangle = |K_2\rangle + \epsilon |K_1\rangle$$

CP odd CP even
 ϵ' ϵ indirect CPV
direct CPV CP even
 $|\pi\pi\rangle$
Discovered in 1964

$$\frac{\Gamma(K_L \rightarrow \pi^0\pi^0)}{\Gamma(K_S \rightarrow \pi^0\pi^0)} / \frac{\Gamma(K_L \rightarrow \pi^+\pi^-)}{\Gamma(K_S \rightarrow \pi^+\pi^-)} = 1 - 6 \times \text{Re}(\epsilon'/\epsilon)$$

- $|\epsilon| = 2.228(11) \times 10^{-3}$ from “odd” mixing b/w K^0 & $\bar{K}^0$
- ϵ' only found in decays Discovered in 1999
 - $\text{Re}(\epsilon'/\epsilon)_{\text{exp}} = 1.66(23) \times 10^{-3}$ (KTeV & NA48)
 - Consistent with SM?



Kaon physics map

High-precision computing

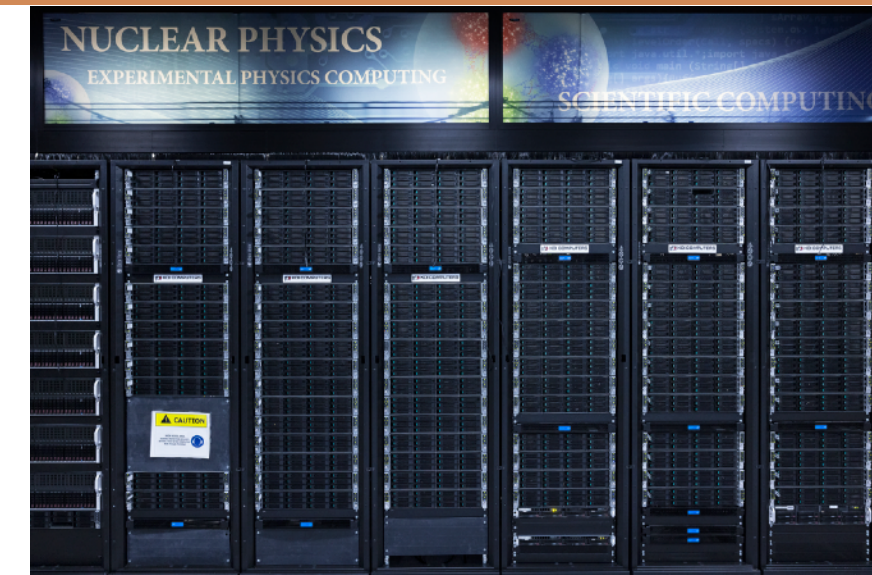
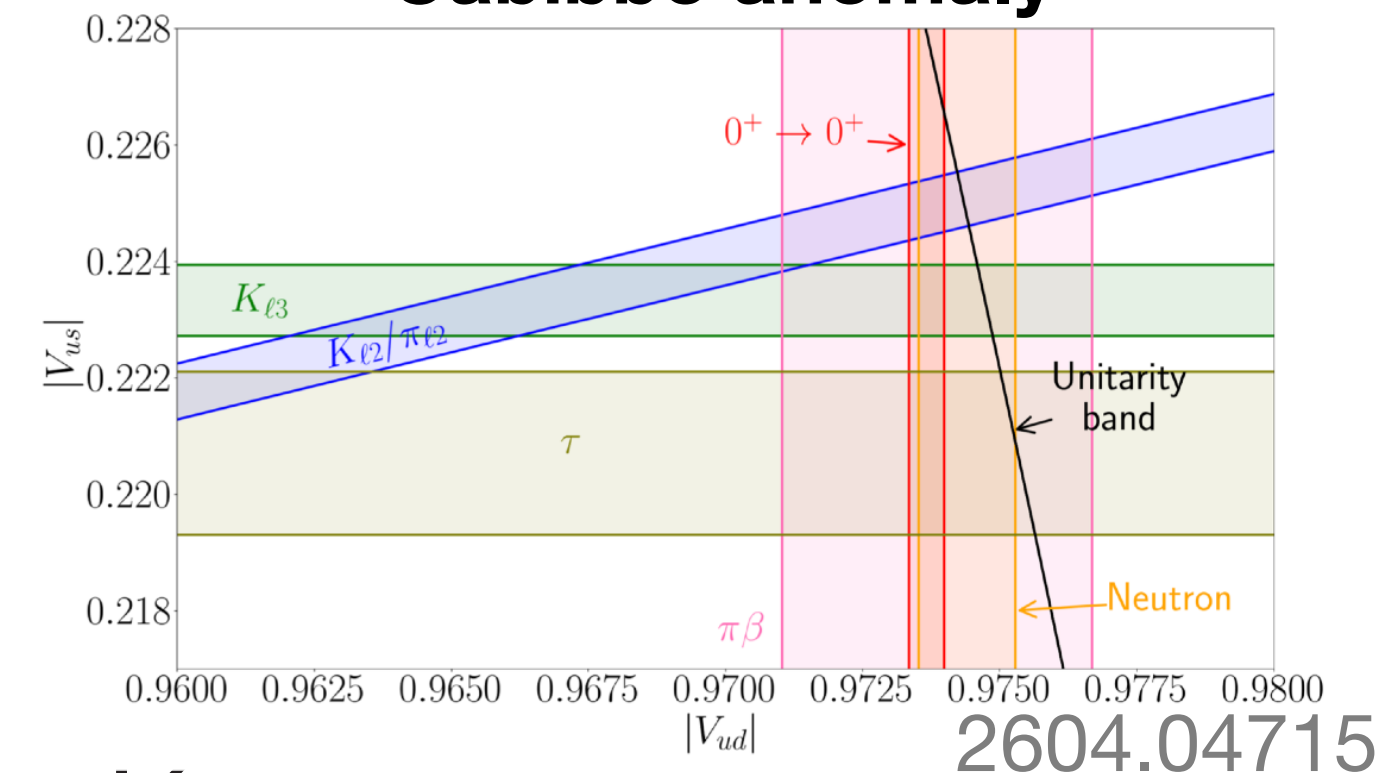
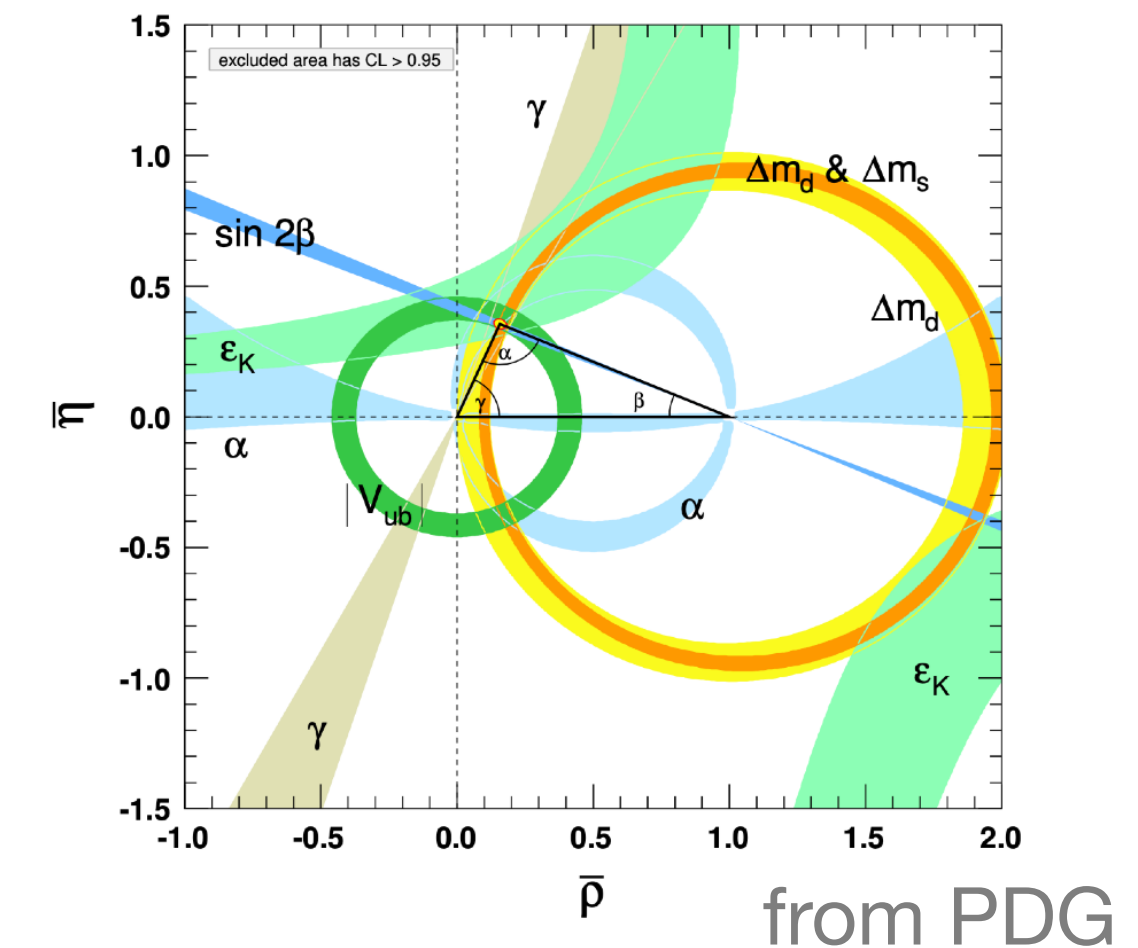


image from jlab.org

Cabibbo anomaly



UT fit



理論予言のチャレンジ

$$K \rightarrow \pi\pi (\varepsilon')$$

$$K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$$

$$\Delta M_K$$

$$B_K$$

$$\varepsilon_K$$

(error on $|V_{cb}|$)

$$K_{\ell 2}, K_{\ell 3}$$

($|V_{ud}|$ and $|V_{us}|$)

$$K_L \rightarrow \pi^0 \ell^+ \ell^-$$

$$K_S \rightarrow \mu^+ \mu^-$$

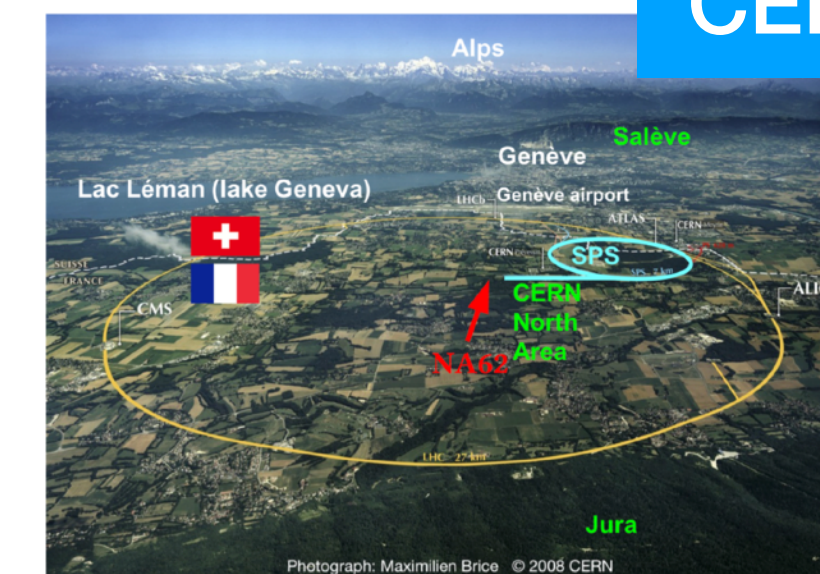
$$K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$$

$$K_L \rightarrow \pi^0 \nu \bar{\nu}$$

※ 図は個人の見解による大雑把なイメージで、コミュニティ共通の認識ではありません

実験のチャレンジ

CERN



pics from slides
at KAON 2025

JPARC



アイソスピンモードと $\Delta I = 1/2$ 則

$$\langle (\pi\pi)_{I=0} | = \sqrt{1/3} \langle \pi^0 \pi^0 | + \sqrt{2/3} \langle \pi^+ \pi^- |, \quad \langle (\pi\pi)_{I=2}^{I_3=0} | = -\sqrt{2/3} \langle \pi^0 \pi^0 | + \sqrt{1/3} \langle \pi^+ \pi^- |$$

- アイソスピン振幅

$$A_I = \langle (\pi\pi)_I | H_W | K \rangle \quad \begin{cases} I=0 \rightarrow \Delta I = 1/2 \\ I=2 \rightarrow \Delta I = 3/2 \end{cases}$$

- $\Delta I = 1/2$ 則 (実験事実)

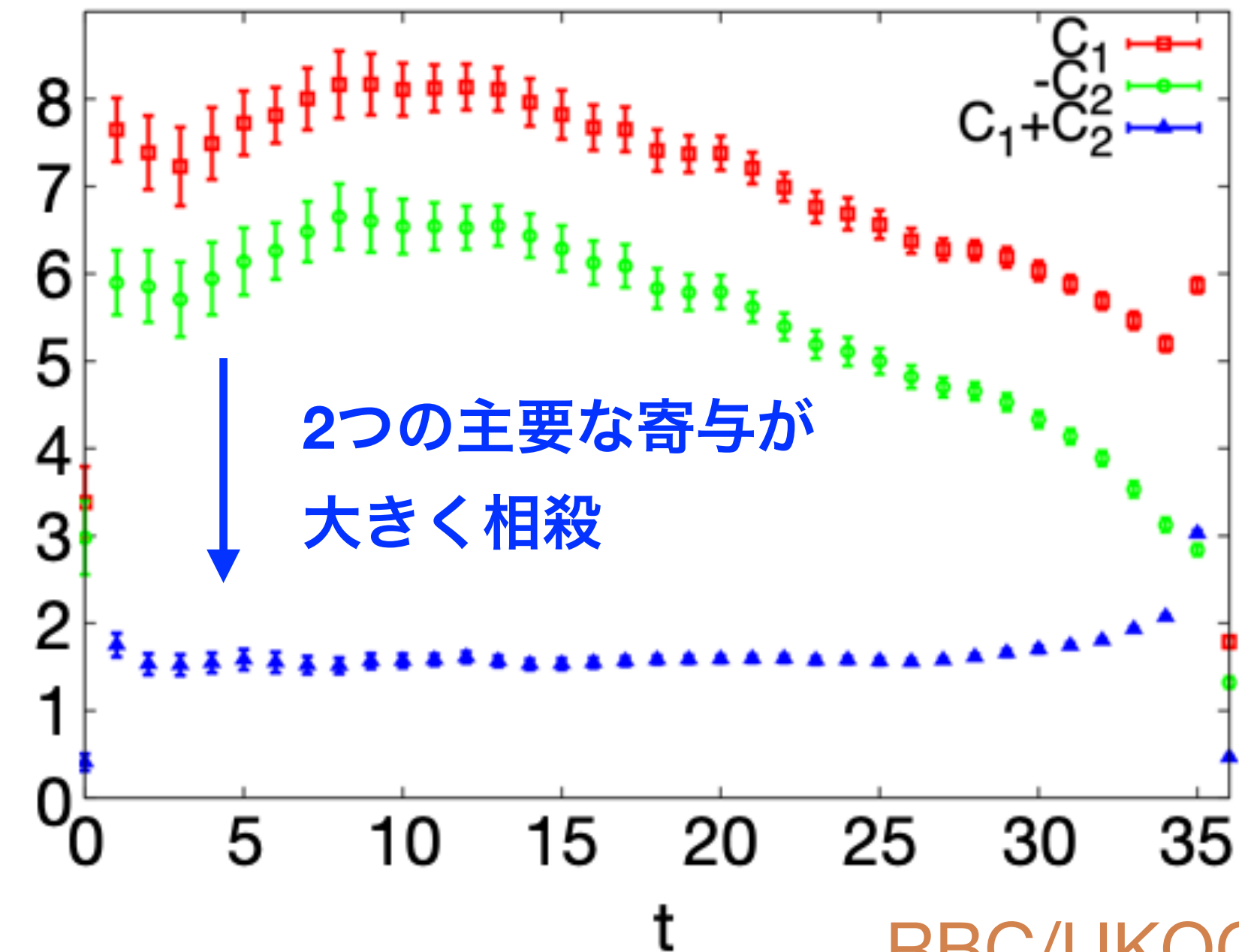
$$\frac{\text{Re } A_0}{\text{Re } A_2} = 22.45(6) \quad : \Delta I = 3/2 (A_2) \text{ のモードがほとんどない}$$

- ▶ 摂動的にはせいぜい2-5くらいのファクターしか出ない [Gaillard & Lee, PRL 33,108 (1974)]
- ▶ 残りは QCD か BSM?
- ▶ 議論は CPV 発見以前から [Gell-Mann & Pais (1955), Gell-Mann & Rosenfeld (1957)]

格子QCDによる $\Delta I = 1/2$ 則の検証

- $\Delta I=3/2$ のサプレッション (2012/2015)

- ▶ $\text{Re}A_2$ に最も効く寄与 C_1, C_2 の比較
- ▶ 単純なカラーカウンティングでは $C_1 = -3C_2$
- ▶ 物理的 m_π に近づくにつれて大きな相殺
(χPT の LO $\propto m_K^2 - m_\pi^2$ とはっきり矛盾)



RBC/UKQCD,
PRD91,074502 (2015)

- $\Delta I = 1/2$ の結果も含めた数値的検証 (2020)

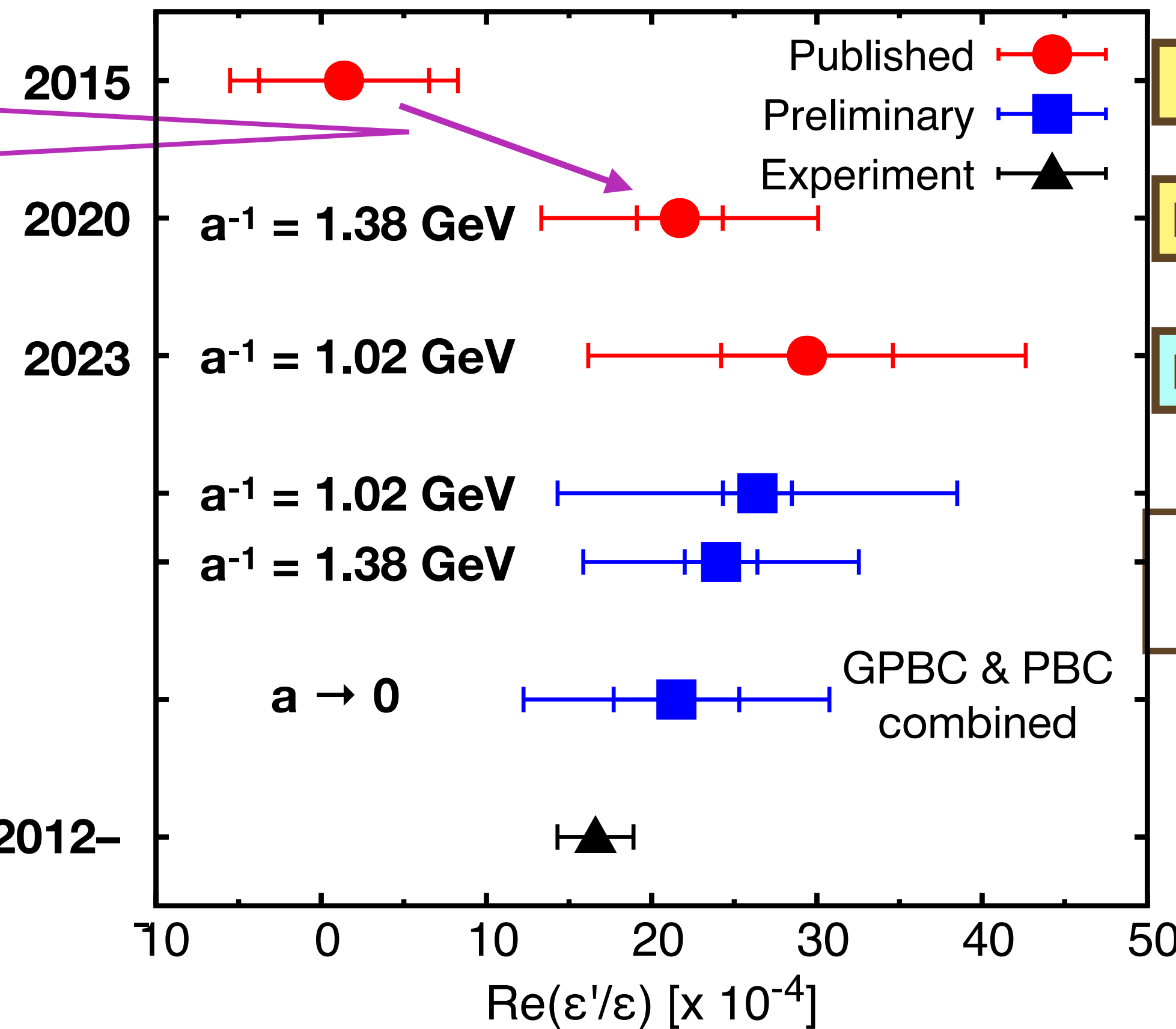
$$\frac{\text{Re}A_0}{\text{Re}A_2} = 19.9(2.3)_{\text{stat}}(4.4)_{\text{sys}}$$

RBC/UKQCD, PRD102,054509 (2020)

🤝 実験値 22.45(6)

ε'/ε の格子計算状況

Experiment vs RBC/UKQCD at physical m_π



PRL 115,212001

PRD 102,054509

PRD 102,094517

複数格子間隔
論文作成中

G-parity 境界条件

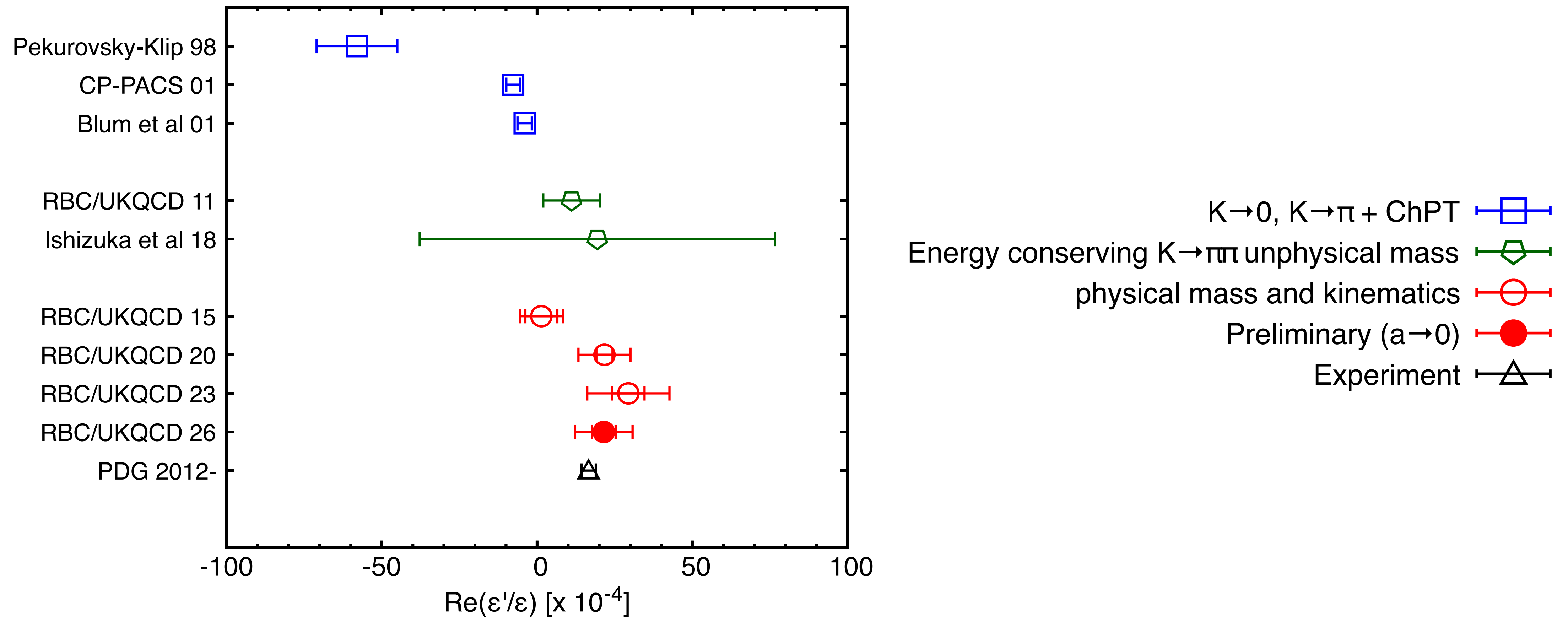
周期的境界条件

- コスト小

- 技術的にやや困難

- $a^{-1} \approx 1.38 \text{ GeV}$: 2つの境界条件で整合
- 最初の連続極限

もっと昔は？



物理的質量でエネルギー保存の $\Delta I=1/2$ 行列要素を計算したのは 2015 年が最初

格子QCDによる $K \rightarrow \pi\pi$ 計算の意義

- CP を破る崩壊計算
 - ▶ SM の検証・ $\bar{\eta}$ への制限
- 複数ハドロンへの非レプトン崩壊
- 格子QCDの励起状態を終状態とする行列要素
- $\Delta I = 1/2$ の相関関数には真空量子数の寄与
 - ▶ 非連結ダイアグラムと統計誤差の問題
 - ▶ $f_0(500)$ 共鳴のコントロール
- $\Delta I = 1/2$ 則をはらむ
 - ▶ 電磁補正・アイソスピン破れの補正も大 (今後の課題)
- 最初に格子計算が提案されてから40年以上

格子QCDによる $K \rightarrow \pi\pi$ 計算の意義

- CP を破る崩壊計算
 - ▶ SM の検証・ $\bar{\eta}$ への制限
- 複数ハドロンへの非レプトン崩壊
- 格子QCDの励起状態を終状態とする行列要素
- $\Delta I = 1/2$ の相関関数には真空量子数の寄与
 - ▶ 非連結ダイアグラムと統計誤差の問題
 - ▶ $f_0(500)$ 共鳴のコントロール
- $\Delta I = 1/2$ 則をはらむ
 - ▶ 電磁補正・アイソスピン破れの補正も大 (今後の課題)
- 最初に格子計算が提案されてから40年以上

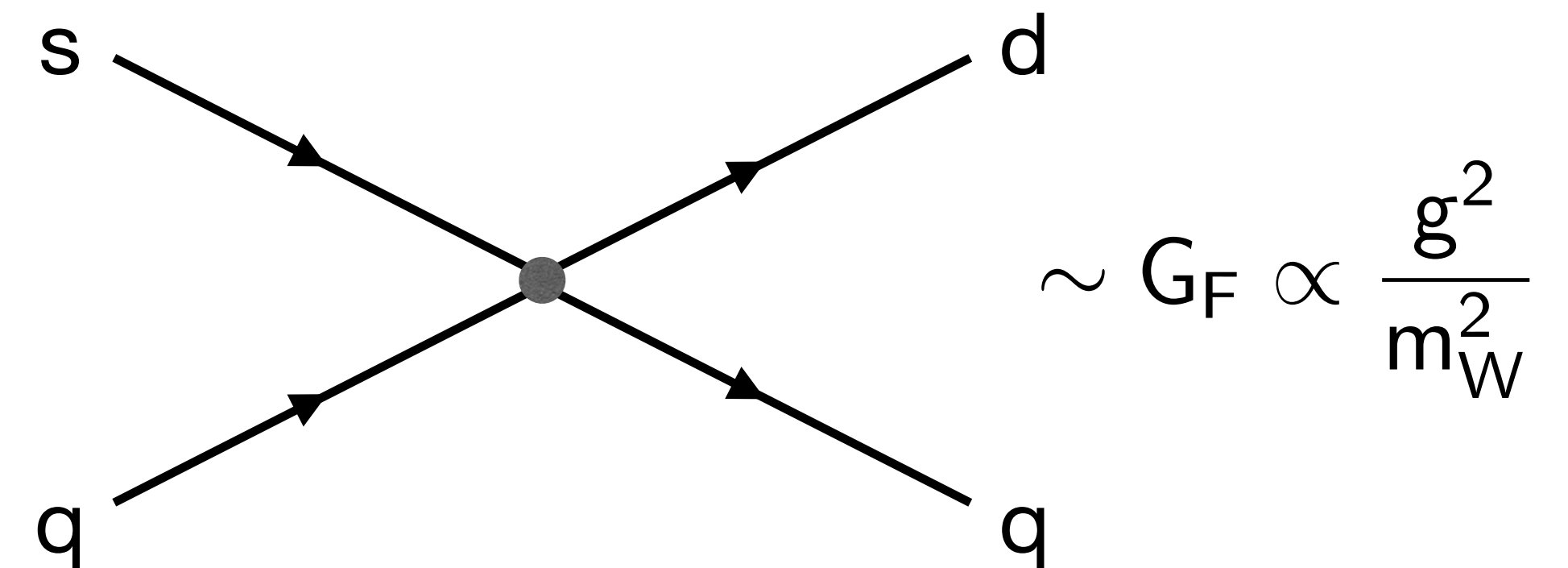
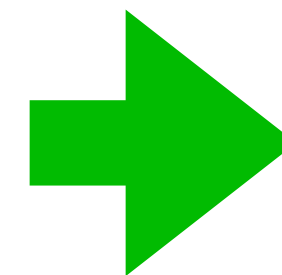
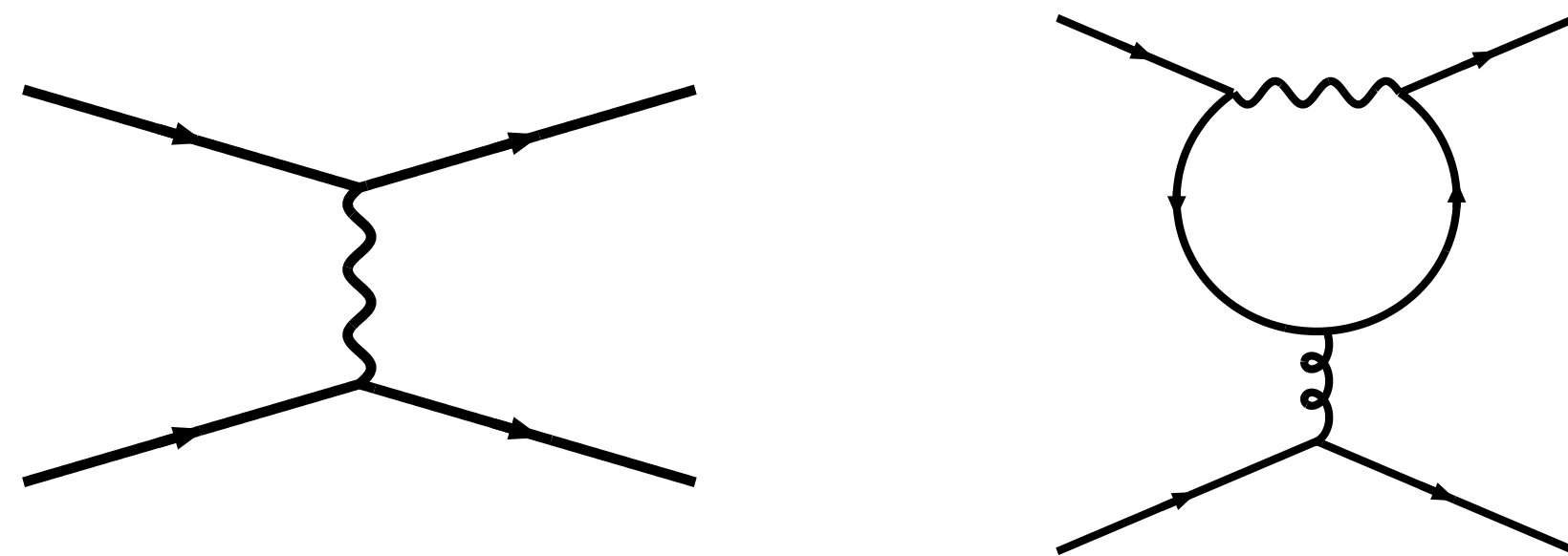
どれをとっても他の過去・現行の計算には全くないか滅多にない

- ここで開発された計算技術・理解されたQCDの非摂動的性質は後の計算にも活かせる

計算のハイライト

格子QCDによる弱崩壊の考え方

- 2つの典型的スケール
 - ▶ 電弱スケール: $m_W = 80 \text{ GeV}$, $m_Z = 91 \text{ GeV}$
 - ▶ QCD スケール: $\Lambda_{\text{QCD}} \sim 300 \text{ MeV}$
- 有効相互作用 @ QCD スケール



▶ $H_W = \sum_i \underline{c_i(\mu)} \underline{O_i(\mu)}$

Wilson coefficients Effective operators

$\Delta S = 1$ 演算子 (標準模型)

- $(\bar{s}q)_{V-A}(\bar{q}'q'')_{V\pm A} = \bar{s}\gamma_\mu(1 - \gamma_5)q' \cdot \bar{q}'\gamma_\mu(1 \pm \gamma_5)q''$
- α, β : color indices

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= (\bar{s}_\alpha u_\beta)_{V-A} (\bar{u}_\beta d_\alpha)_{V-A} , \\ Q_2 &= (\bar{s}u)_{V-A} (\bar{u}d)_{V-A} , \\ Q_3 &= (\bar{s}d)_{V-A} \sum_q (\bar{q}q)_{V-A} , \\ Q_4 &= (\bar{s}_\alpha d_\beta)_{V-A} \sum_q (\bar{q}_\beta q_\alpha)_{V-A} , \\ Q_5 &= (\bar{s}d)_{V-A} \sum_q (\bar{q}q)_{V+A} , \\ Q_6 &= (\bar{s}_\alpha d_\beta)_{V-A} \sum_q (\bar{q}_\beta q_\alpha)_{V+A} , \\ Q_7 &= \frac{3}{2} (\bar{s}d)_{V-A} \sum_q e_q (\bar{q}q)_{V+A} , \\ Q_8 &= \frac{3}{2} (\bar{s}_\alpha d_\beta)_{V-A} \sum_q e_q (\bar{q}_\beta q_\alpha)_{V+A} , \\ Q_9 &= \frac{3}{2} (\bar{s}d)_{V-A} \sum_q e_q (\bar{q}q)_{V-A} , \\ Q_{10} &= \frac{3}{2} (\bar{s}_\alpha d_\beta)_{V-A} \sum_q e_q (\bar{q}_\beta q_\alpha)_{V-A} , \end{aligned} \right\}$$

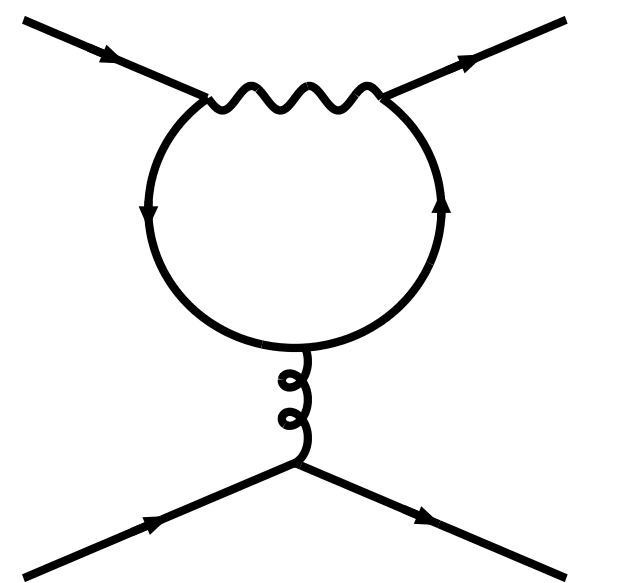
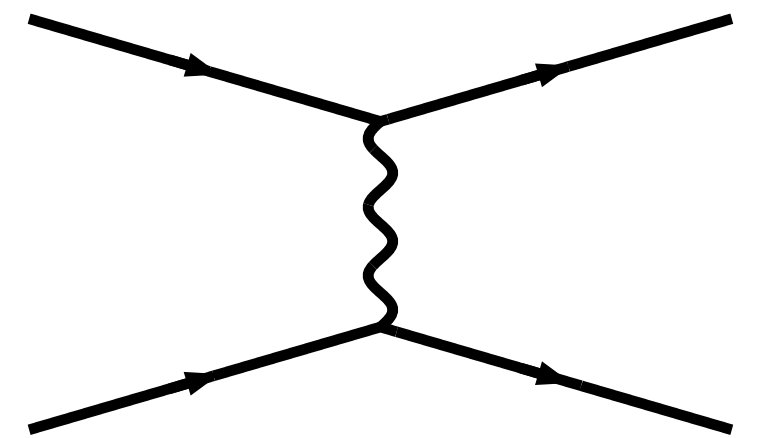
Current-current operators

- $Q_1^c = (\bar{s}_\alpha c_\beta)_{V-A} (\bar{c}_\beta d_\alpha)_{V-A}$ & $Q_2^c = (\bar{s}c)_{V-A} (\bar{c}d)_{V-A}$
enter when $n_f \geq 4$

QCD penguin operators

- sum over q runs for all active quarks

EW penguin operators



$K \rightarrow \pi\pi$ Amplitude and ϵ'

強い $\pi\pi$ 位相差

$$\text{Re} \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon} \right) = \text{Re} \left\{ \frac{i\omega e^{i\delta_2 - \delta_0}}{\sqrt{2}\epsilon} \left[\frac{\text{Im} A_2}{\text{Re} A_2} - \frac{\text{Im} A_0}{\text{Re} A_0} \right] \right\} \quad (\omega = \text{Re} A_2 / \text{Re} A_0)$$

繰り込み行列

$$A_I = \frac{G}{\sqrt{2}} V_{us}^* V_{ud} \sum_{i,j} \underbrace{[z_i(\mu) + \tau y_i(\mu)]}_{\substack{\text{ウィルソン係数} \\ \text{pQCD}}} \underbrace{Z_{ij}(\mu)}_{\substack{\text{LQCD} \\ (+\text{pQCD})}} \underbrace{\langle (\pi\pi)_I | Q_j^{\text{lat}} | K \rangle}_{\text{LQCD}}$$

- A_2 はすでに高精度 RBC/UKQCD PRD91 (2015) 074502
 - ▶ $\text{Re} A_2 = 1.50(4)_{\text{stat}}(14)_{\text{sys}} \times 10^{-8} \text{ GeV}$, $\text{Im} A_2 = -6.99(20)_{\text{stat}}(84)_{\text{sys}} \times 10^{-13} \text{ GeV}$
cf: $(\text{Re} A_2)_{\text{exp}} = 1.479(4) \times 10^{-8} \text{ GeV}$
- A_0 は今でも難題

$\pi\pi$ “基底状態”

- 2点関数 (ユークリッド時空・静止系)

$$G_{\pi\pi}(t) = \int d^3x \langle O_{\pi\pi}(t, \vec{x}) O_{\pi\pi}(0, \vec{y})^\dagger \rangle = \sum_n \langle 0 | O_{\pi\pi} | \pi\pi, n \rangle \langle \pi\pi, n | O_{\pi\pi}^\dagger | 0 \rangle e^{-E_{\pi\pi, n} t}$$

静止系 ($e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} = 1$) —— $O_{\pi\pi}$ と同じ量子数の全エネルギー状態からの寄与

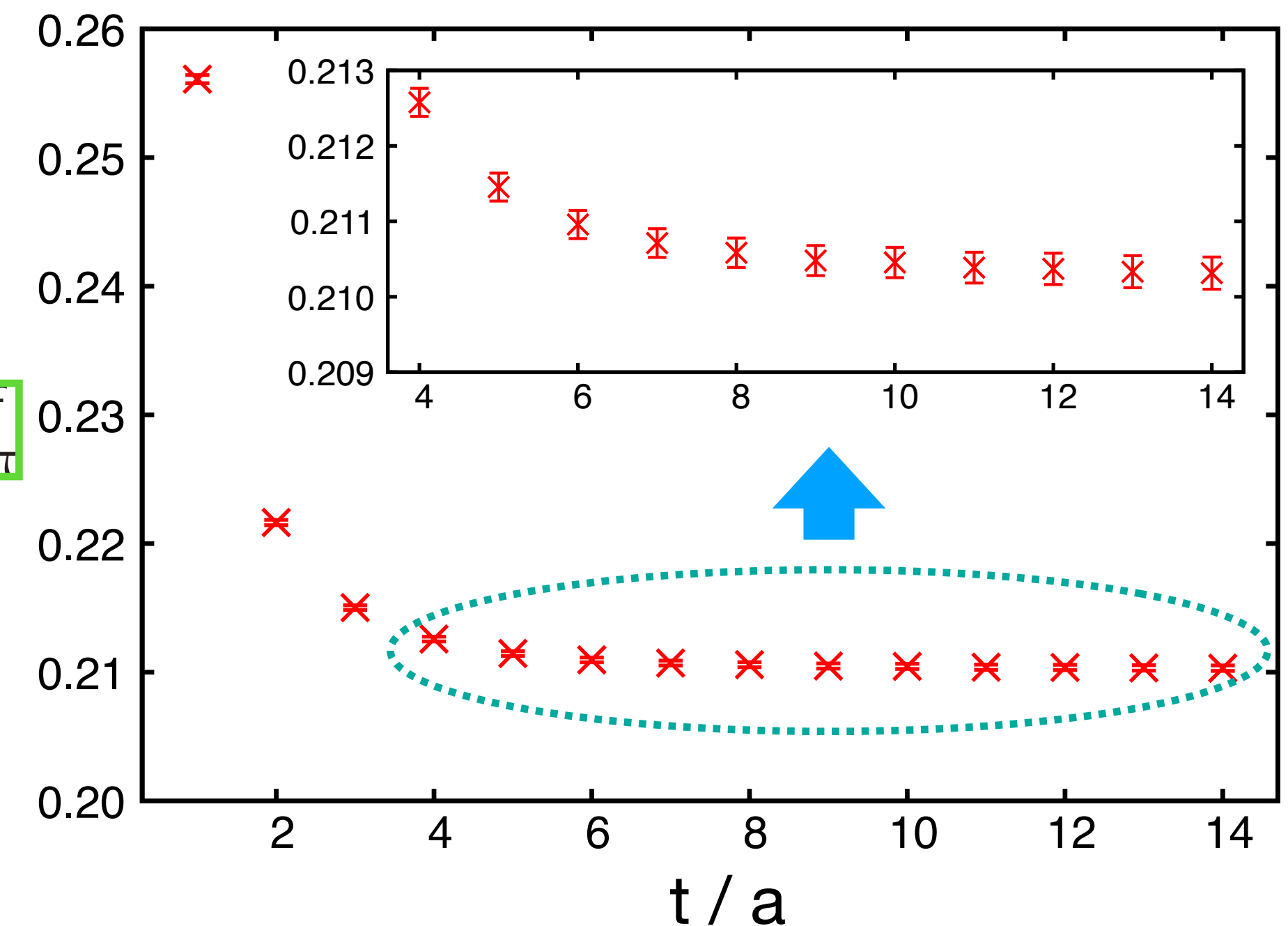
→ 大きな t で基底状態の寄与でサチる
 $\pi\pi$ なら約 270 MeV

- サチったことの判定材料：有効エネルギー

$$E_{\pi\pi}^{\text{eff}}(t) = \ln \frac{G_{\pi\pi}(t)}{G_{\pi\pi}(t+1)} \xrightarrow{\text{large } t} \underline{E_{\pi\pi, 0}}$$

t によらない

$aE_{\pi\pi}^{\text{eff}}$



3点関数から行列要素

- 3点関数

$$\int d^3x_{\pi\pi} d^3x_K \langle O_{\pi\pi}(t_{\pi\pi}, \vec{x}_{\pi\pi}) Q_i(t, \vec{0}) O_K(t_K, \vec{x}_K)^\dagger \rangle$$

静止系 ($e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} = 1$)

$$= \sum_{\underline{m, n}} \langle 0 | O_{\pi\pi} | \pi\pi, m \rangle \langle \pi\pi, m | Q_i | K, n \rangle \langle K, n | O_K^\dagger | 0 \rangle e^{-E_{\pi\pi, m}(t_{\pi\pi} - t)} e^{-m_{K, n}(t - t_K)}$$

$O_{\pi\pi}/O_K$ と同一量子数の全状態からの寄与

▶ 最低エネルギー状態の行列要素に興味があるなら大きな $t_{\pi\pi} - t$ & $t - t_K$ を見る:

$$\rightarrow \langle 0 | O_{\pi\pi} | \pi\pi, 0 \rangle \langle \pi\pi, 0 | Q_i | K, 0 \rangle \langle K, 0 | O_K^\dagger | 0 \rangle e^{-E_{\pi\pi, 0}(t_{\pi\pi} - t)} e^{-m_{K, 0}(t - t_K)}$$

3点関数から行列要素

- 3点関数

$$\int d^3x_{\pi\pi} d^3x_K \langle O_{\pi\pi}(t_{\pi\pi}, \vec{x}_{\pi\pi}) Q_i(t, \vec{0}) O_K(t_K, \vec{x}_K)^\dagger \rangle$$

静止系 ($e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} = 1$)

$$= \sum_{m,n} \langle 0 | O_{\pi\pi} | \pi\pi, m \rangle \langle \pi\pi, m | Q_i | K, n \rangle \langle K, n | O_K^\dagger | 0 \rangle e^{-E_{\pi\pi,m}(t_{\pi\pi}-t)} e^{-m_{K,n}(t-t_K)}$$

$O_{\pi\pi}/O_K$ と同一量子数の全状態からの寄与

▶ 最低エネルギー状態の行列要素に興味があるなら大きな $t_{\pi\pi} - t$ & $t - t_K$ を見る:

$$\rightarrow \langle 0 | O_{\pi\pi} | \pi\pi, 0 \rangle \langle \pi\pi, 0 | Q_i | K, 0 \rangle \langle K, 0 | O_K^\dagger | 0 \rangle e^{-E_{\pi\pi,0}(t_{\pi\pi}-t)} e^{-m_{K,0}(t-t_K)}$$

エネルギー非保存

エネルギー保存過程はどうやって？

- Maiani-Testa no-go theorem (1990) [PLB245,585](#)
 - ▶ ユークリッド時空では無理（でもそれは無限体積での話 by Lüscher)
 - [Lüscher, CMP104,177 \(1986\)](#) 有限体積で散乱振幅・位相差の計算方法
 - [Lüscher, NPB354,531 \(1991\)](#)
 - [Lellouch & Lüscher, CMP219,31 \(2001\)](#): 1 → 2 振幅の有限体積補正
- 有限体積で可能なアプローチ
 - ▶ 非静止系（石塚さん）

e.g. $\sqrt{m_K^2 + p_{\text{tot}}^2} = m_\pi + \sqrt{m_\pi^2 + p_{\text{tot}}^2}$
 - ▶ 境界条件をいじる

π : anti-periodic → must move $p_i = (2n+1)\pi/L$

→ $E_{\pi\pi} \approx 500 \text{ MeV}$ の最低エネルギー状態も実現可能

(G-parity 境界条件 by RBC/UKQCD 2015, 2020)
 - ▶ 相関関数のバリエーションを増やして励起状態も取り出し可能にする（最近の話）

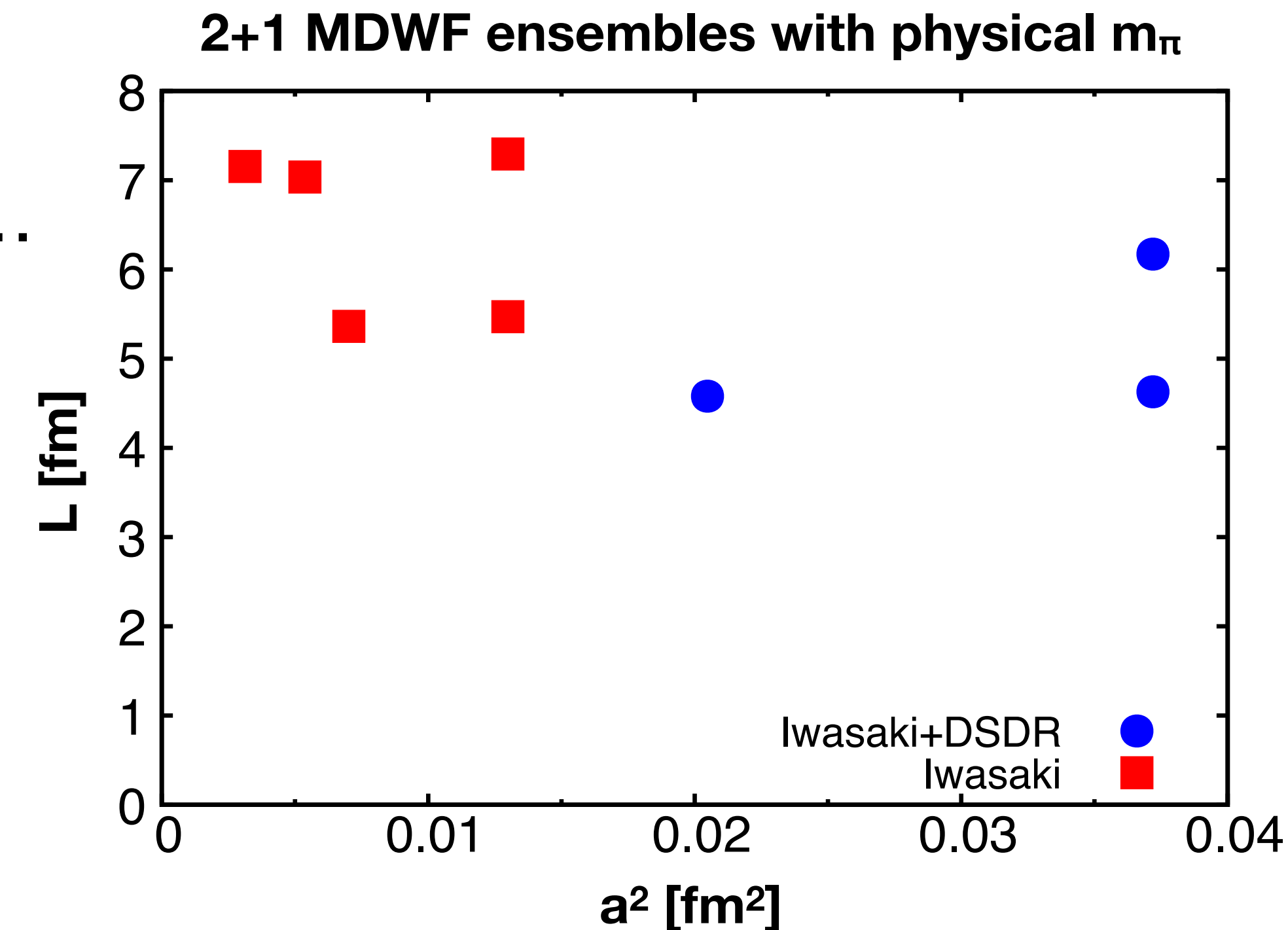
周期的境界条件

利点

- すでに物理的 m_π でのアンサンブル多数
 - ▶ $a^{-1} = 1 \text{ GeV}$, $24^3 \times 64$ & $a^{-1} = 1.4 \text{ GeV}$, $32^3 \times 64$ & ...
 - ▶ 連続極限が見通せる
- 将来的に EM/IB 補正
 - ▶ G-parity 境界は電荷保存を破るので難しい
 - ▶ 周期的境界条件が必要

チャレンジ

- 静止系なら $E_{\pi\pi} = 2m_\pi$ の状態がある
 - ▶ GEVP (variational method) で対処可能



Variational method [Lüscher-Wolff, 1990]

- GEVP (Generalized Eigenvalue Problem)

$$C(t)v_n(t, t_0) = \lambda_n(t, t_0)C(t_0)v_n(t, t_0) \quad C(t): N \times N \text{ correlator matrix } C_{ab}(t) = \langle O_a(t)O_b(0)^\dagger \rangle$$

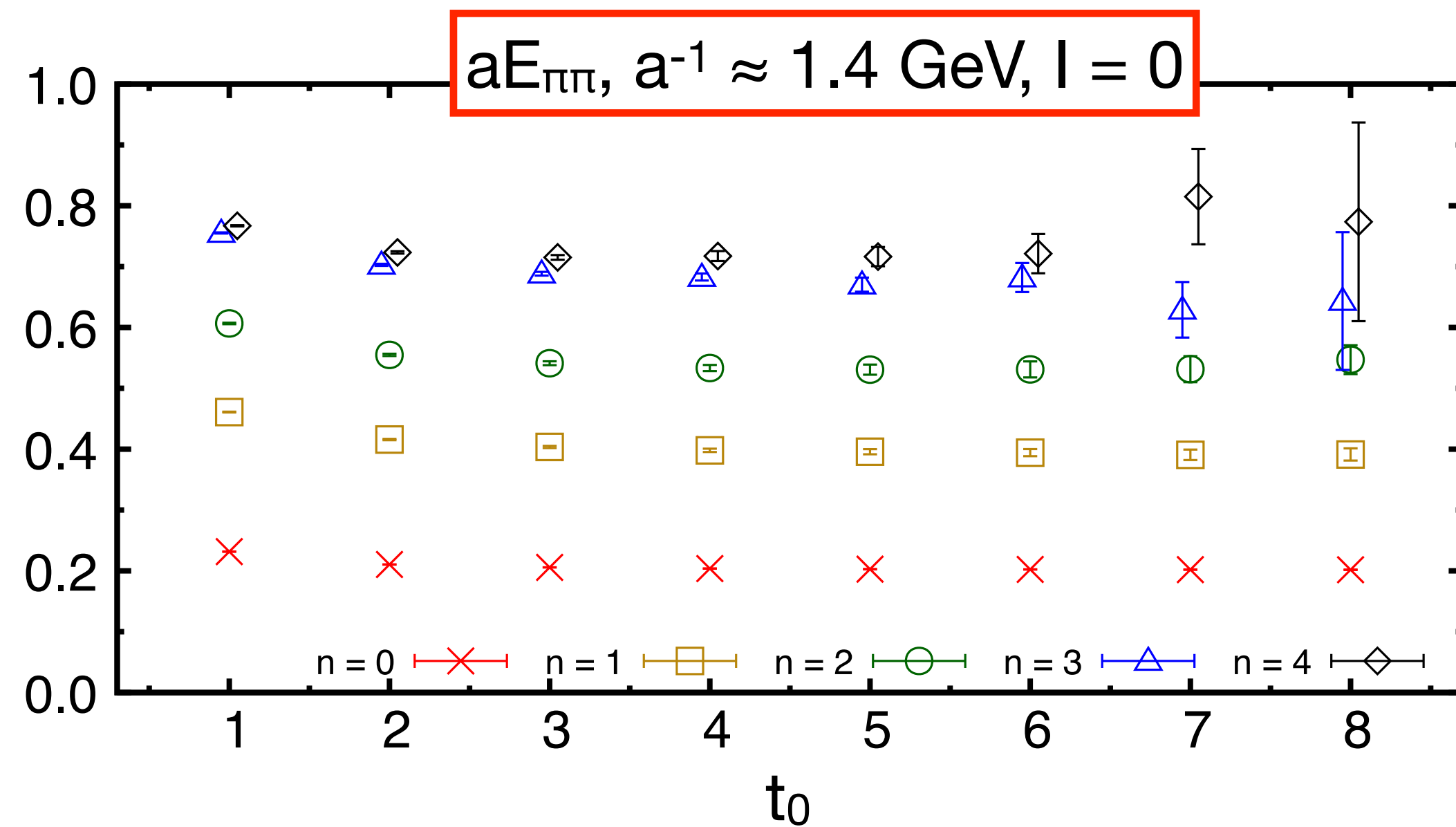
- ▶ $O'_n = \sum_a v_{n,a}^* O_a$ only couples with n-th state (& N+1-th & higher states)
- ▶ $\lambda_n(t, t_0) = e^{-E_n(t-t_0)}$

- 今回使っている $\pi\pi$ 演算子:

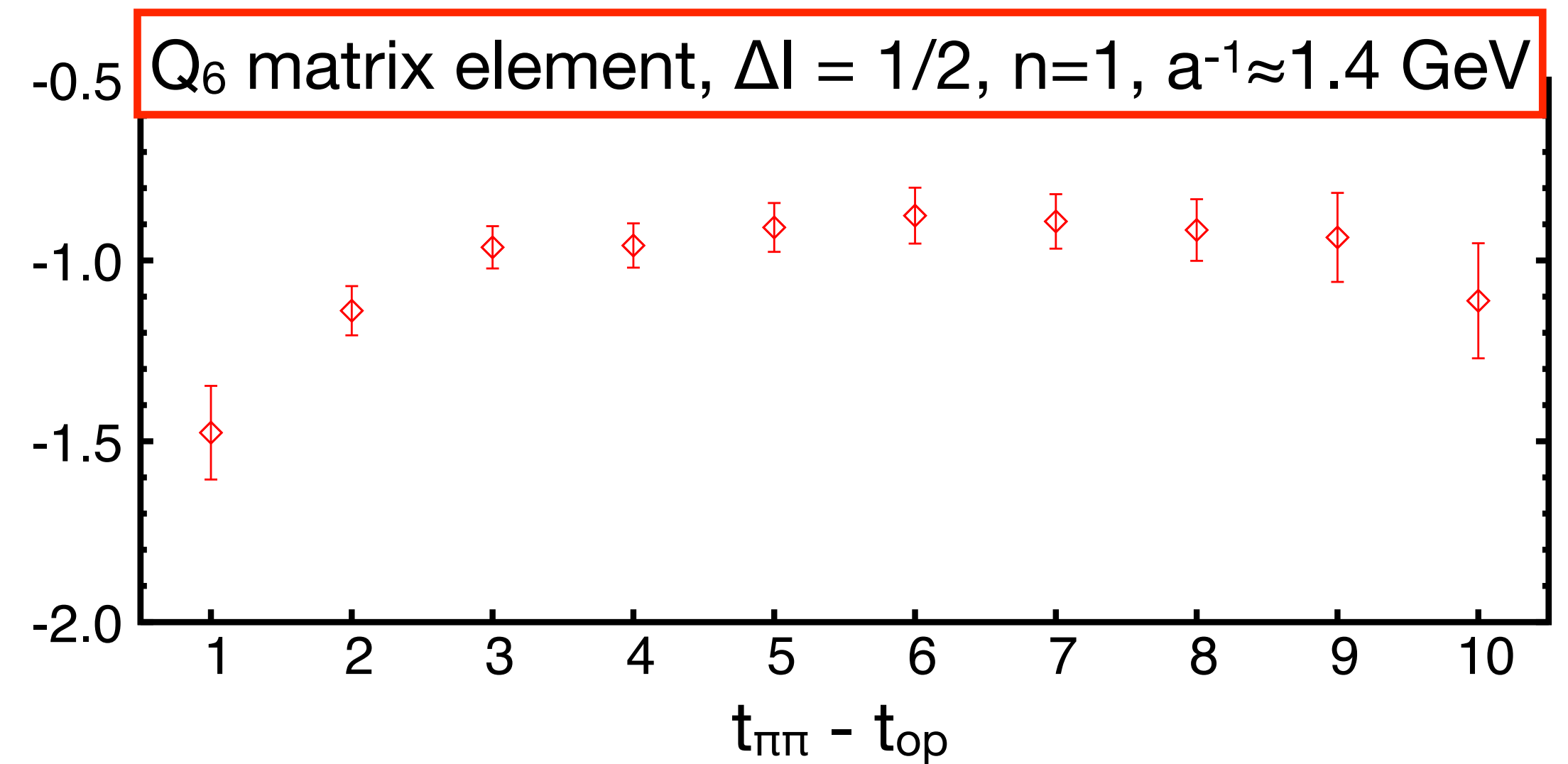
- ▶ $\Pi_{p=(0,0,0)}\Pi_{p=(0,0,0)}$
 - ▶ $\Pi_{p=(0,0,1)}\Pi_{p=(0,0,-1)}$
 - ▶ $\Pi_{p=(0,1,1)}\Pi_{p=(0,-1,-1)}$
 - ▶ $\Pi_{p=(1,1,1)}\Pi_{p=(-1,-1,-1)}$
 - ▶ $\sigma \sim \bar{u}u + \bar{d}d$
 - ▶ $KK \sim \bar{K}K + K^+K^-$: new entry
- $\left. \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\} I = 2$
 $\left. \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\} I = 0$

相関関数の種類を増やして最低
エネルギー状態以外の情報も抽出

Variational method の結果



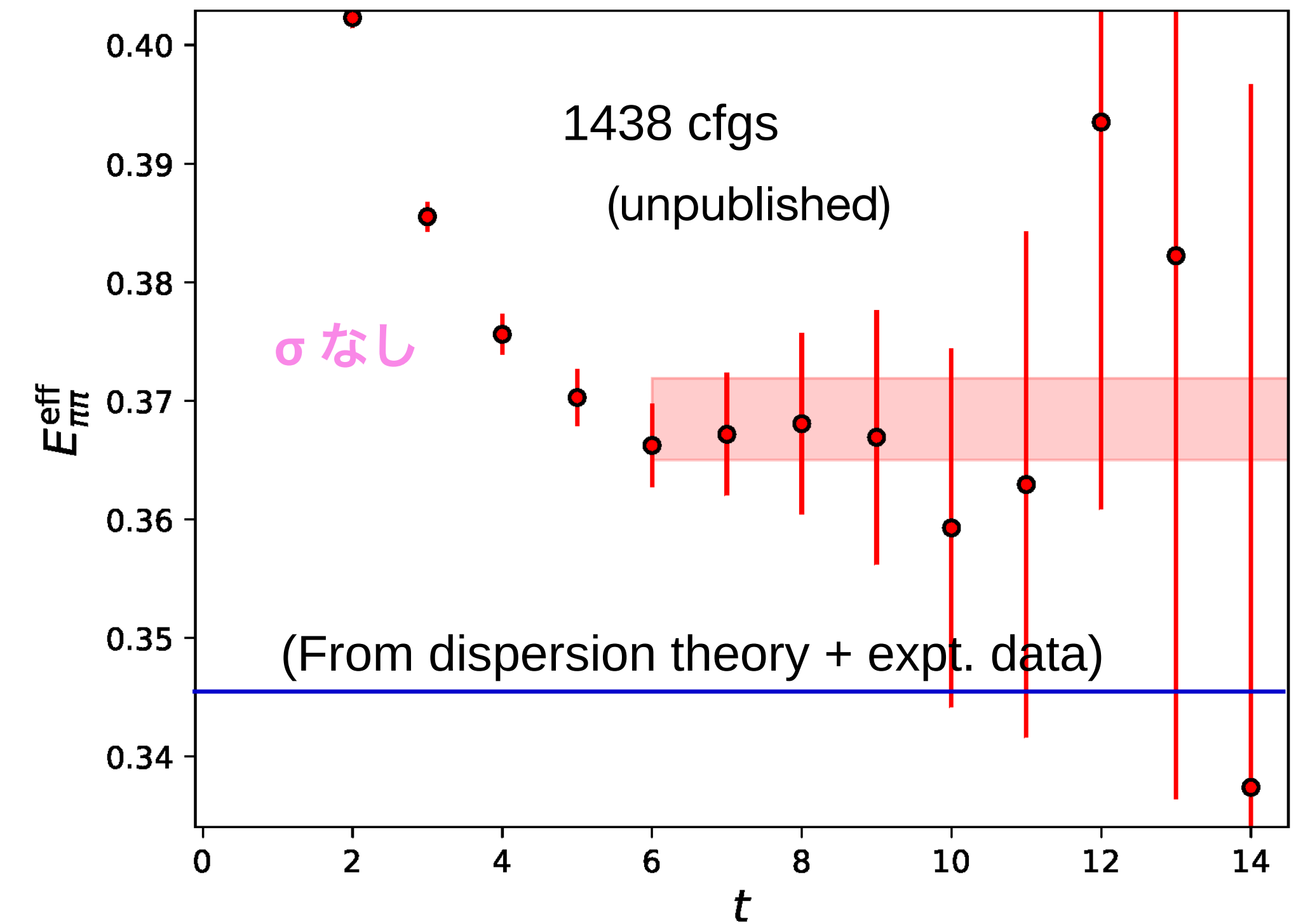
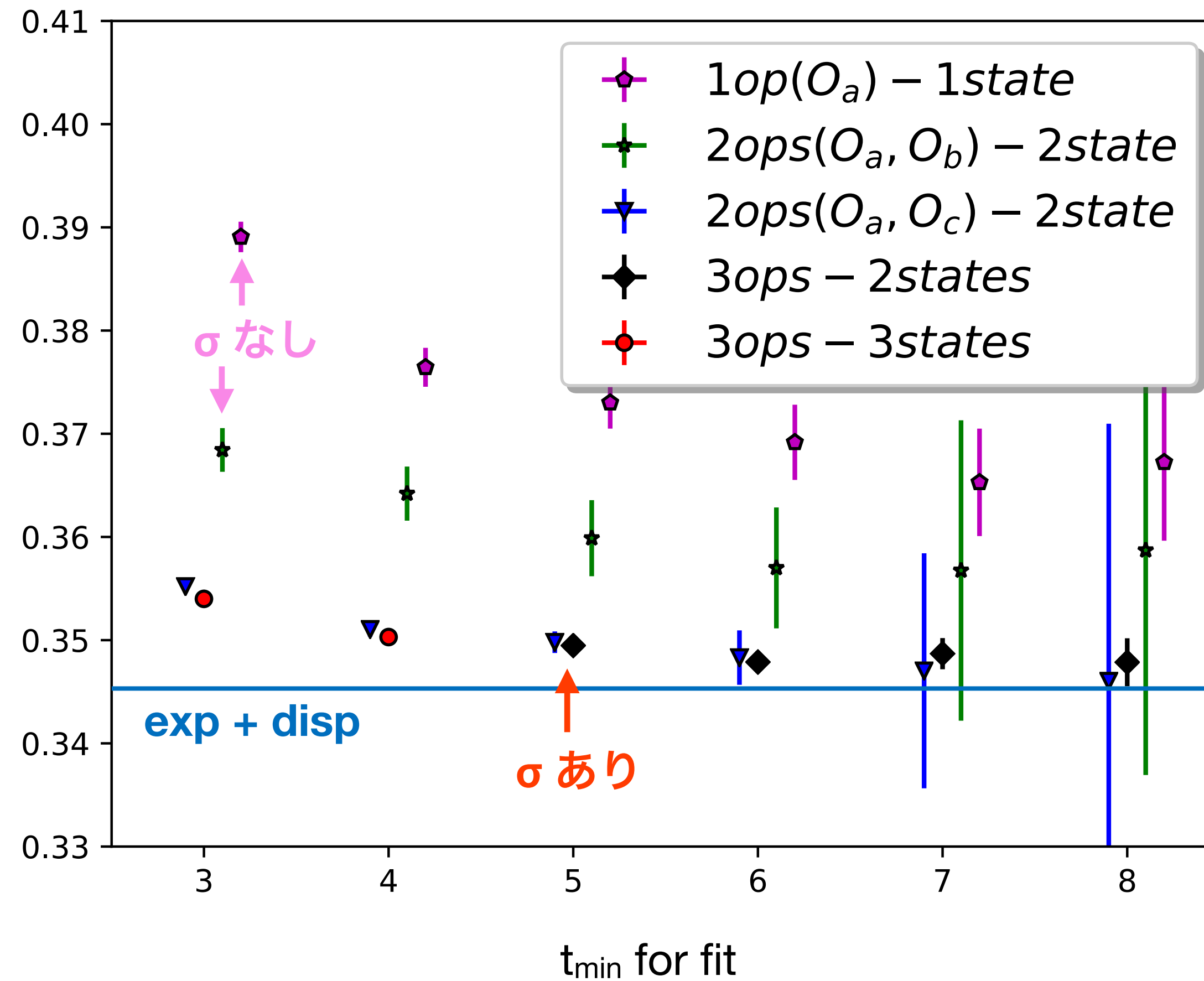
エネルギー準位



$\Delta I=1/2$ の Q_6 行列要素

σ 演算子の役割

G-parity 境界条件での基底状態エネルギー



繰り込みと連続極限

発散量



正則化

有限 + 正則化パラメタ



繰り込み

繰り込まれた量 + 正則化パラメタ



正則化パラメタの除去

繰り込まれた量 w/o 正則化パラメタ
スキーム・スケールのみに依存

格子作用を決めて行列要素を計算

▶ 主な正則化パラメタ：格子間隔 a

$O \rightarrow O_{\text{subt}} = O - a^{-2}O_{\text{low}}$ (べき発散の除去) &

$O' \rightarrow O_R = Z O'$ (乗法的繰り込み・log 発散の除去)

▶ スキーム・スケールで繰り込み条件確定

▶ 格子間隔依存 $\rightarrow$ 離散化誤差 $O(a^2), O(a^4), \dots$ 発散はない

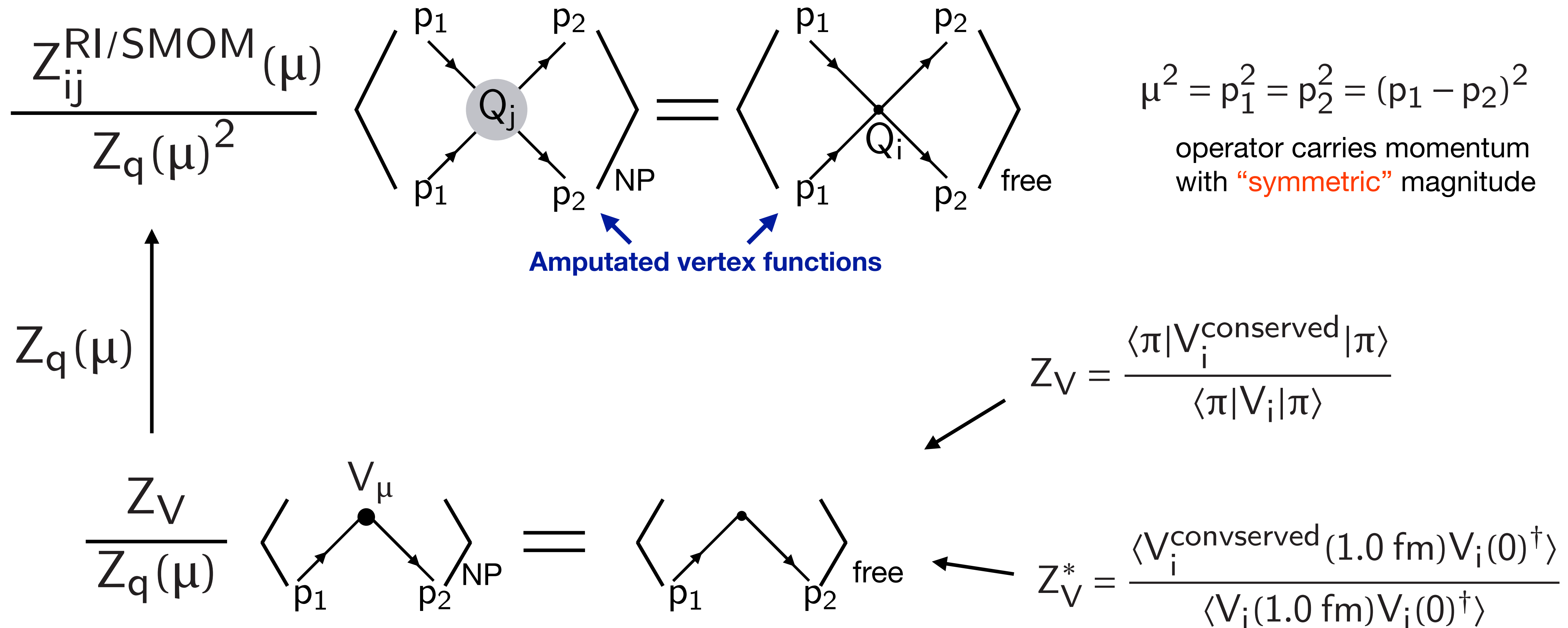
連続極限: $a \rightarrow 0$

▶ 以上のステップを複数格子間隔で行い $a \rightarrow 0$ の値を決める

▶ e.g. $O_R(a) = O_R(0) + c_2 a^2 + c_4 a^4$

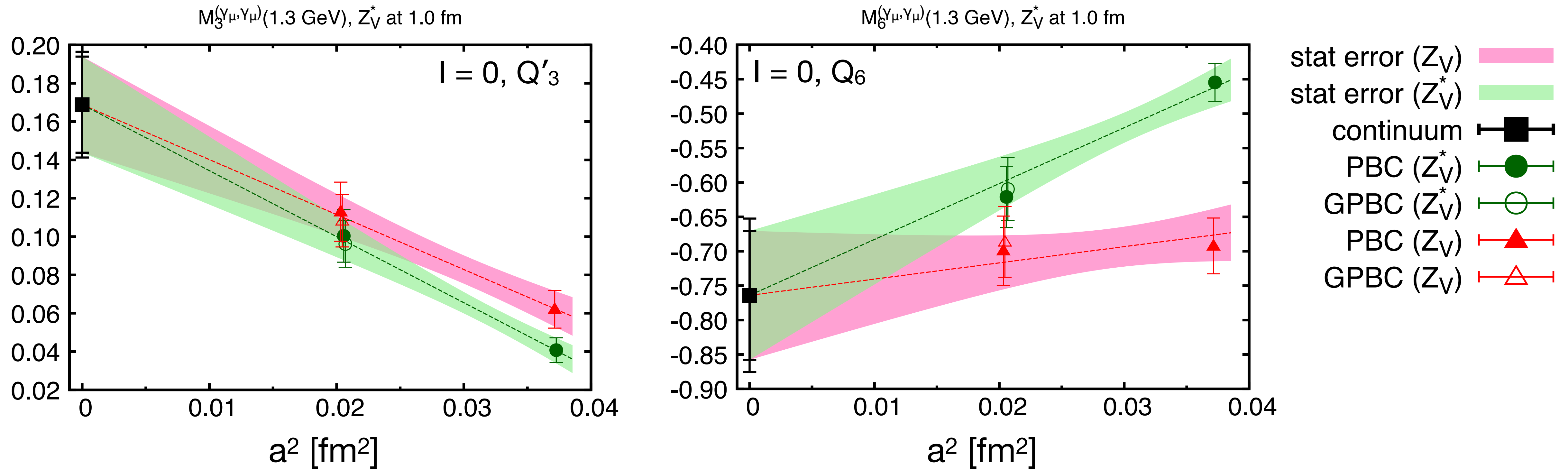
RI/SMOM schemes

Aoki et al, PRD78,054510 (2007)



Matrix elements renormalized by Z_V and Z_V^* should have the same $a \rightarrow 0$ limit

行列要素の連続極限



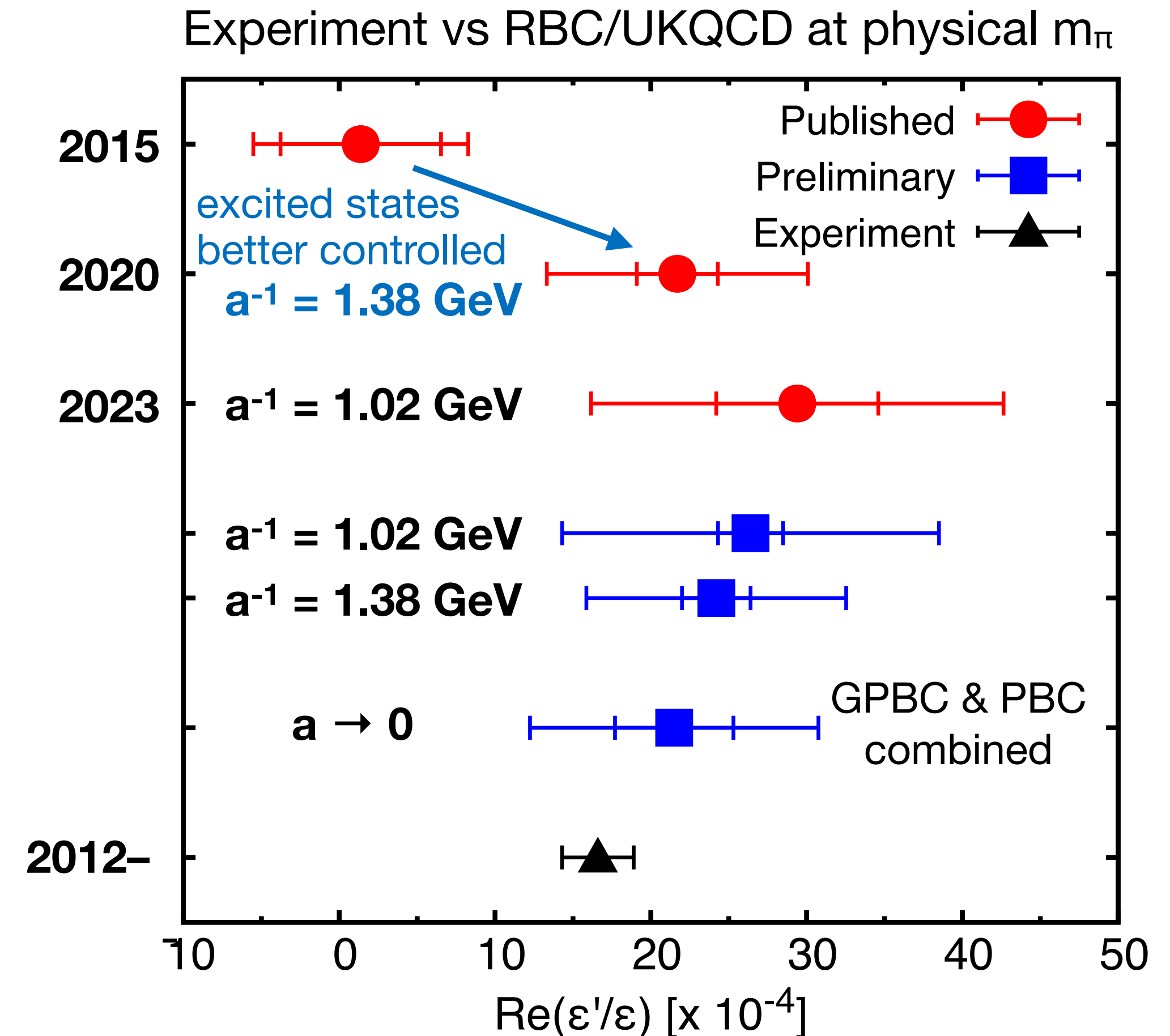
- RI/SMOM(γ_μ, γ_μ) スキーム、2種類の Z_V
- GPBC 2020 の結果と一緒に連続極限
- 非常に粗い格子なので 20% 程度の系統誤差

実験精度に追いつくために

現状の主な誤差

- 統計誤差 ($\text{Re}A_0$, $\text{Im}A_0$ に12–15%)
- 連続極限 ($\text{Re}A_0$, $\text{Im}A_0$ に 20%程度)
- ステップスケールリング/SMOM→MS マッチング ($\text{Re}A_0$ に14%)
- チャームの寄与 ($\text{Re}A_0$, $\text{Im}A_0$ に 12%)
- EM/IB 補正 (ϵ' に最大25%)

** パーセンテージは暫定値



統計誤差に関して最近の発見

- 全点間伝播関数法

- 伝播関数：ディラック行列の逆

$D^{-1}(x, y) : \sim 10^9 \times 10^9$ 行列 (> EB)

→ 大き過ぎ

でも長距離で重要なのは一部だけ

- $\sim 10^3 \times 10^9$ 程度に圧縮 (O(10) TB)

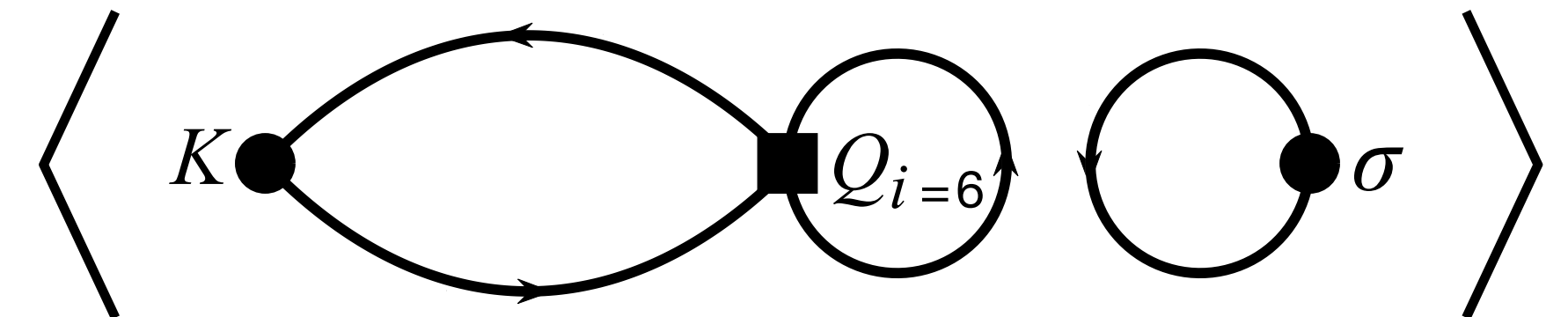
$D^{-1}(x, y)$

$$\approx \sum_{i=1}^{N_\ell} v_i(x) v_i(y)^\dagger \gamma_5 \quad \text{低モード近似}$$

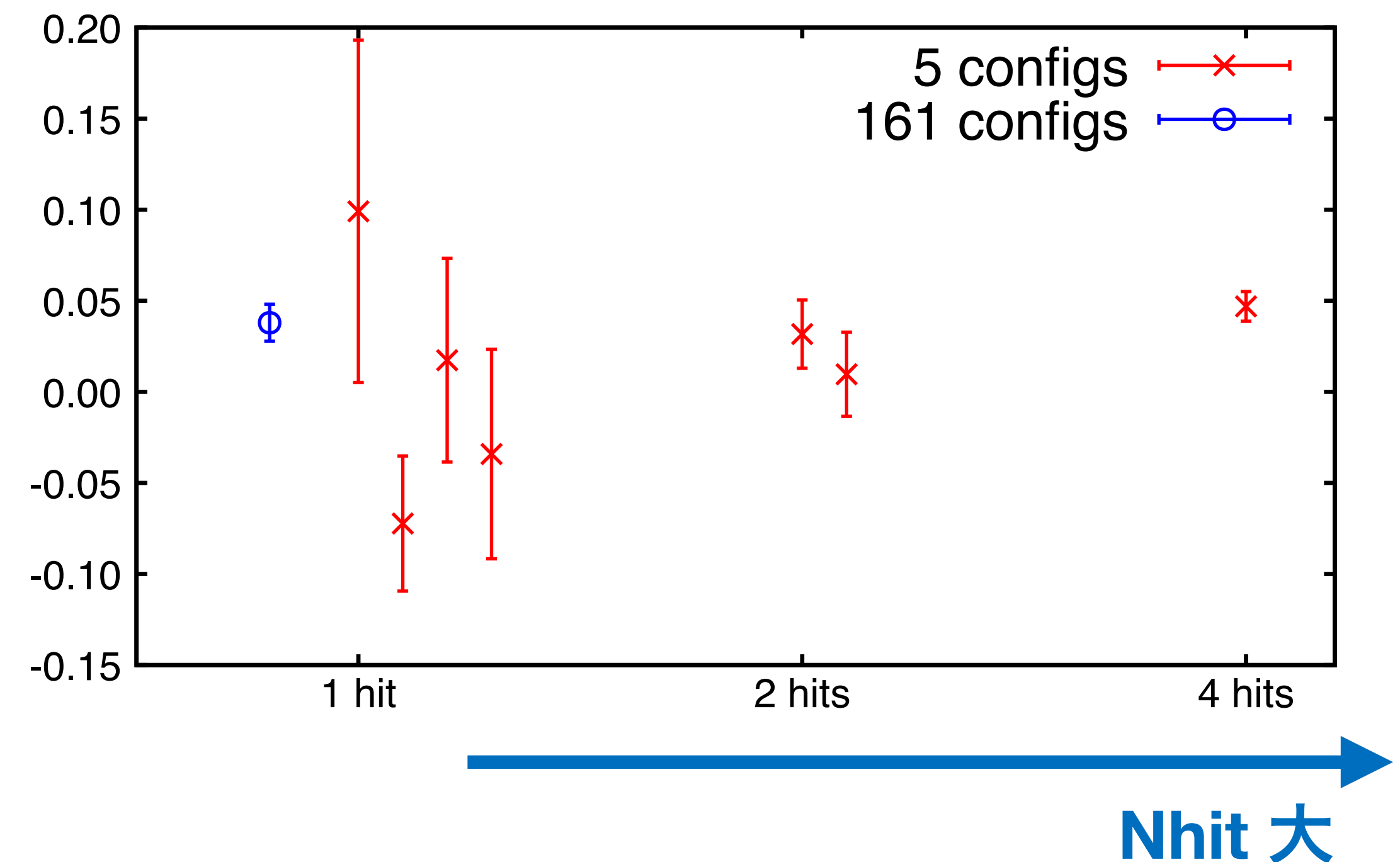
$$+ \frac{1}{N_{\text{hit}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{dil}} N_{\text{hit}}} (D_h^{-1} \eta_i)(x) \eta_i(y)^\dagger$$

高モードはノイズ法 → 無限 N_{hit} で厳密。有限 N_{hit} のバイアスは統計誤差に還元

$$\langle O_\sigma(22) Q_6^{\text{subt}}(16) O_K(0)^\dagger \rangle_{\text{disconn.}}$$



: $\text{Im}A_0$ への主な誤差源



* $N_\ell = 2,000$ ** $N_{\text{dil}} = N_c \times N_s \times N_T = 1,152$

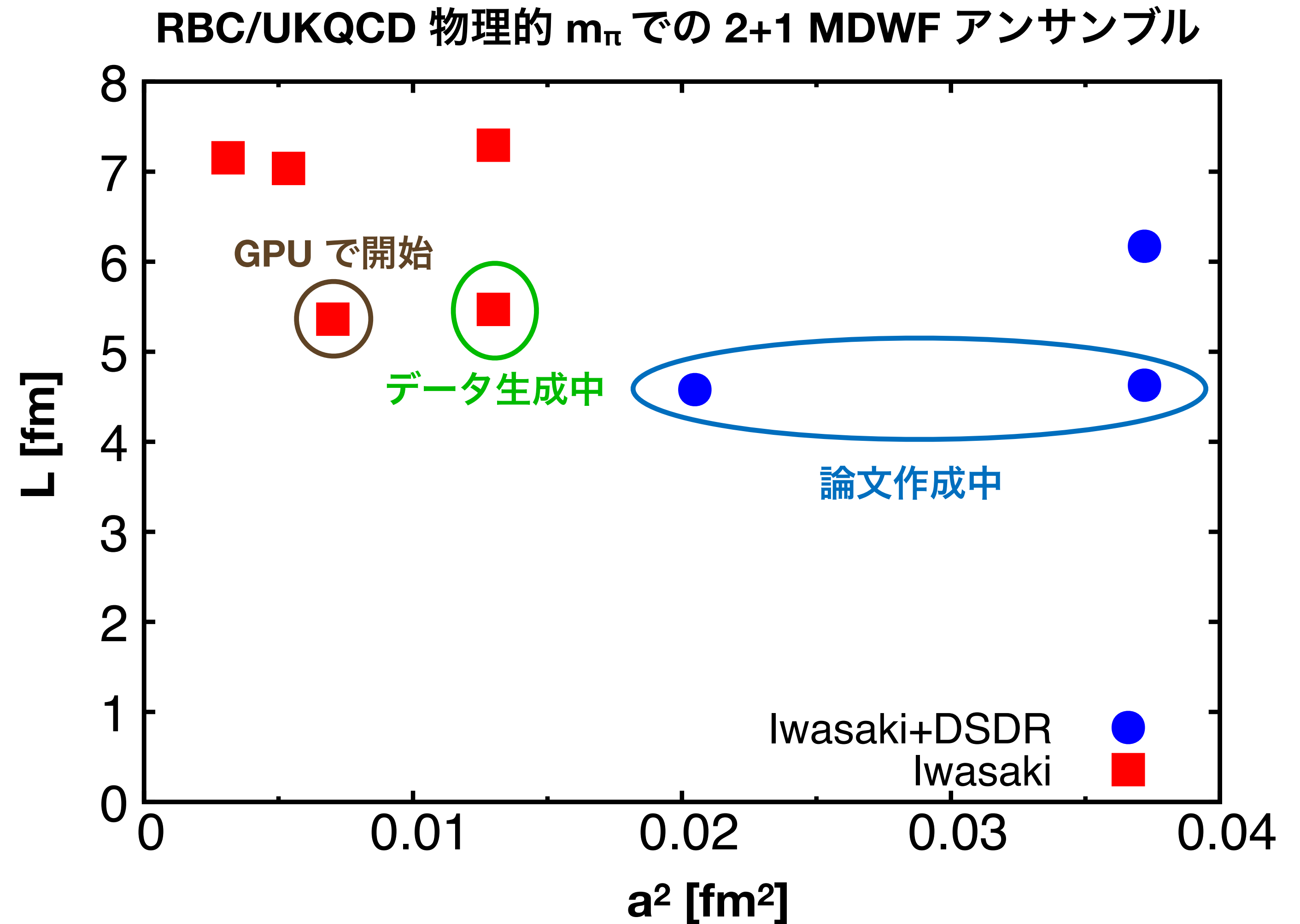
より正確な連続極限へ

連続極限による現状の系統誤差：

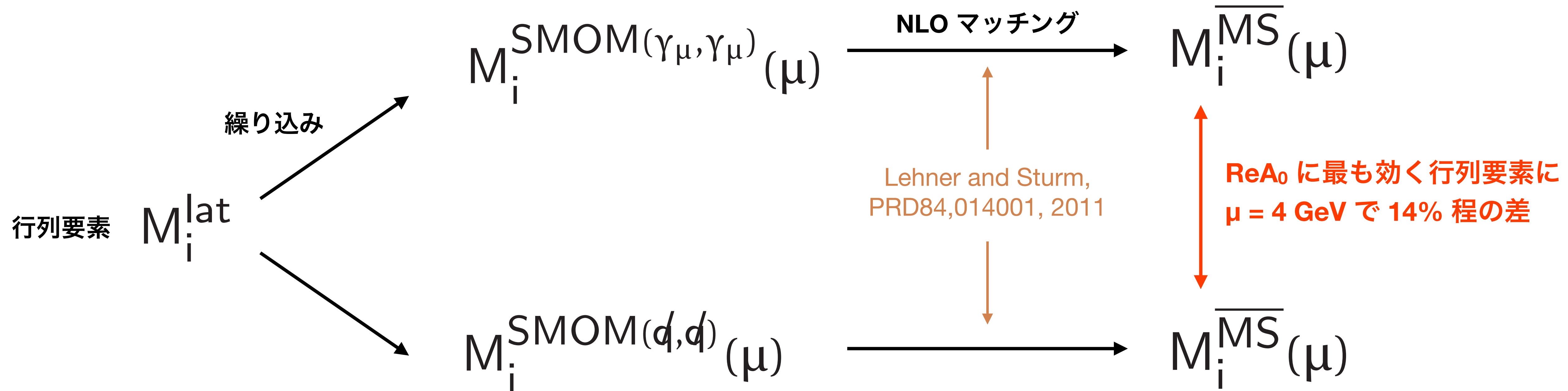
$\text{Re}A_0$, $\text{Im}A_0$ に 20%程度

→ 次の 2 アンサンブルで 7% 程度を期待
(目標 2 年程度)

→ 将来的にはさらに細かい格子を含めて
問題にならない水準まで押し下げる



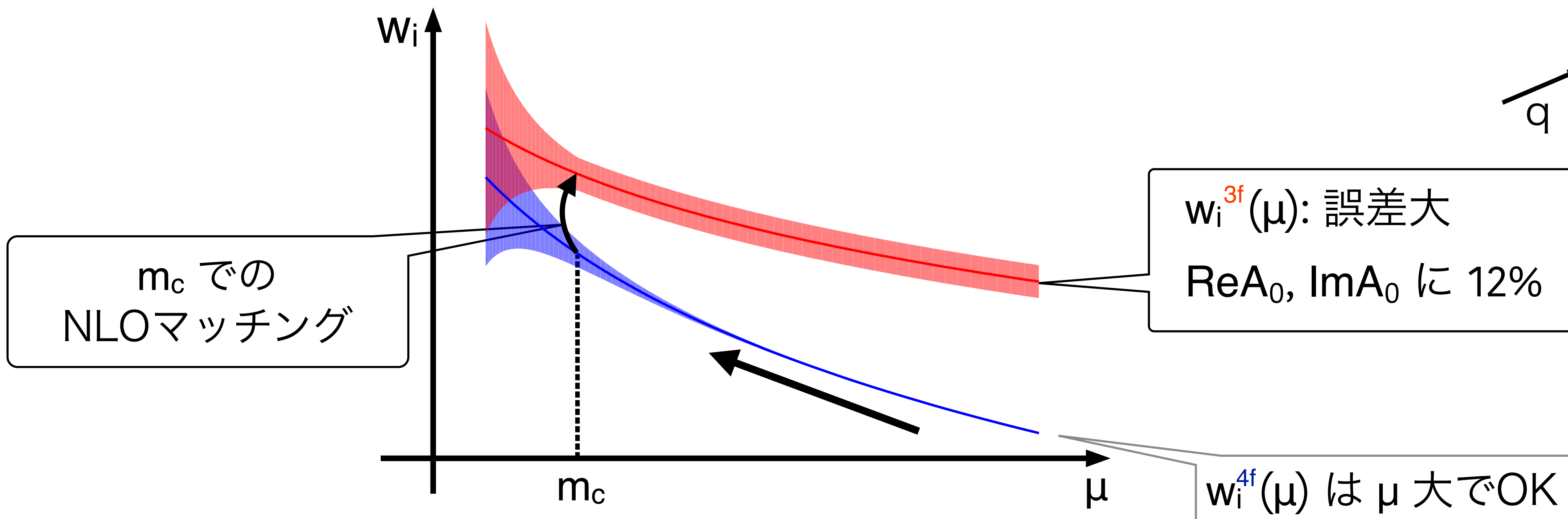
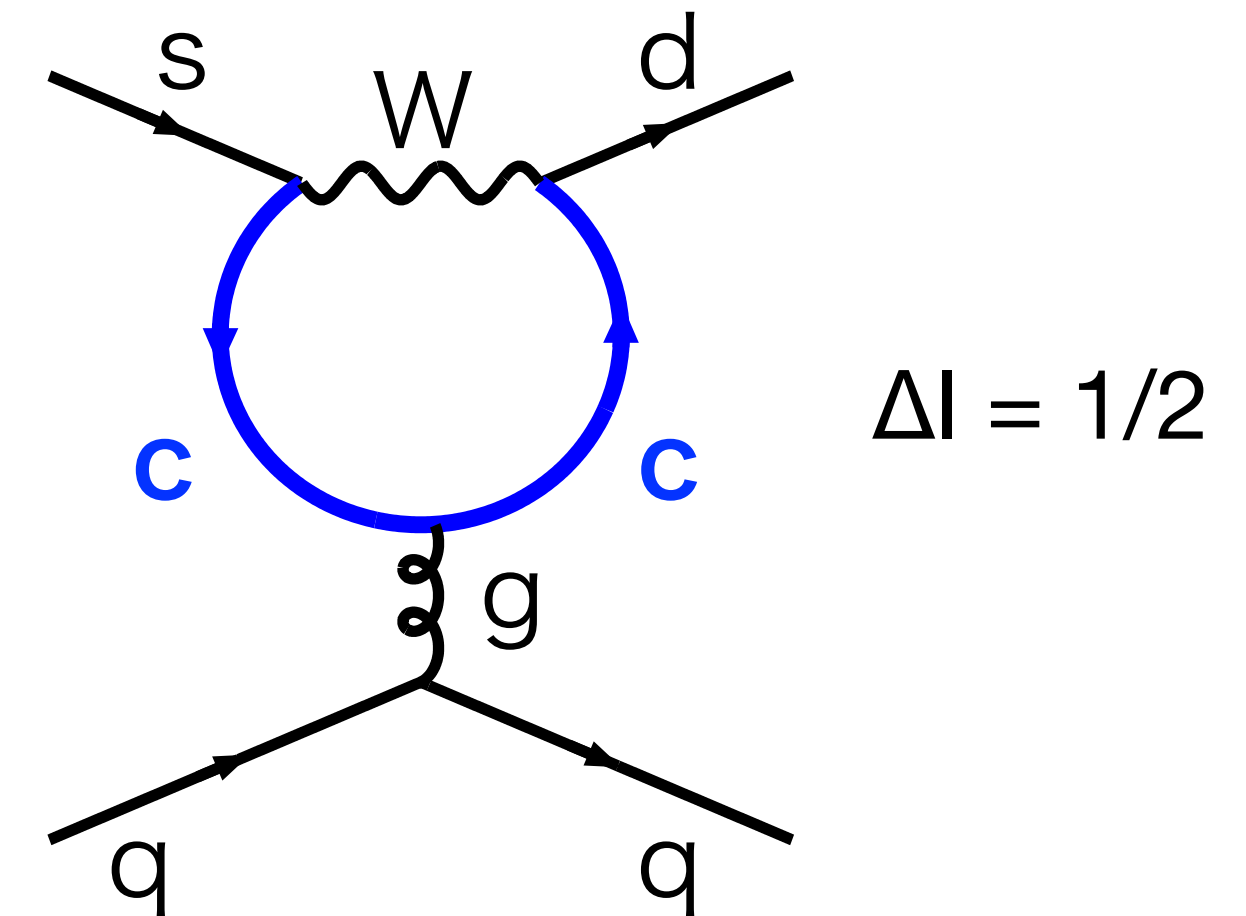
中間スキーム依存性



- 原因は NLO マッチングか繰り込み過程（ステップスケーリング）の離散化誤差
 - ▶ ステップスケーリングを 8 GeV 程度まで引き上げて連続極限
 - 差の要因が 8 GeV での NLO マッチングだけになる
 - ▶ NNLO マッチングも “ほぼ” できているらしいが...
- 非摂動的に繰り込みスケールを持ち上げる技術

チャームの寄与

$$\langle f | H_W | i \rangle = \sum_i \underbrace{w_i^{3f}(\mu)}_{\text{pQCD}} \underbrace{\langle f | O_i^{3f}(\mu) | i \rangle}_{\text{LQCD}}$$



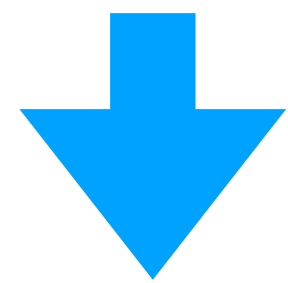
- 解決法
 - ▶ NNLO, 非摂動マッ칭ング
 - ▶ 今の本命: $a^{-1} \approx 2.35$ の計算からチャームを含んだ演算子で直接計算

EM/IB 補正

- 普通は $O(1\%)$ だが...

$$\frac{\epsilon'}{\epsilon} = \frac{i\omega e^{i(\delta_2 - \delta_0)}}{\sqrt{2}\epsilon} \left[\frac{\text{Im } A_2}{\text{Re } A_2} - \frac{\text{Im } A_0}{\text{Re } A_0} \right] = -\frac{i\omega e^{i(\delta_2 - \delta_0)}}{\sqrt{2}\epsilon} \frac{\text{Im } A_0}{\text{Re } A_0} \left[1 - \frac{1}{\omega} \frac{\text{Im } A_2}{\text{Im } A_0} \right]$$

$$1/\omega = \text{Re}A_0/\text{Re}A_2 \approx 22.5 \text{ } (\Delta I = 1/2 \text{ 則})$$



Ciligrano et al, JHEP 02, 032 (2020)
NLO ChPT + large N_c
(example estimation)

$$\frac{\epsilon'}{\epsilon} = \frac{i\omega_+ e^{i(\delta_2 - \delta_0)}}{\sqrt{2}\epsilon} \left[\frac{\text{Im } A_2^{\text{emp}}}{\text{Re } A_2^{(0)}} - \frac{\text{Im } A_0^{(0)}}{\text{Re } A_0^{(0)}} (1 - \hat{\Omega}_{\text{eff}}) \right]$$

$$\hat{\Omega}_{\text{eff}} = 0.170 \left({}^{+91}_{-90} \right)$$

- 何を計算すれば良いか特定済み
 - ▶ Coulomb correction to $\pi^+\pi^+$ scattering [Christ et al, PRD106 (2022), 1, 014508]
 - ▶ Transverse radiation contribution to ϵ' [Christ-Lundstrum, 2606.26336]
 - ▶ 次のステップはテスト計算

まとめ

- 解決したこと
 - ▶ 物理的質量でエネルギー保存振幅の第一原理計算
 - ▶ σ 共鳴の制御・ $\pi\pi$ 励起状態の抽出
 - ▶ 実験と整合性の確認ができる程度の精度
- これから解決すること
 - ▶ 統計精度 ロックオン
 - ▶ 連続極限の精度 ロックオン
 - ▶ 中間スキーム依存性 期待
 - ▶ チャームの寄与 期待
 - ▶ EM/IB 補正 テスト計算へー最後の関門？

- 計算リソース

リソース名	コンピュータ, プロセッサー	これまで	これから	
USQCD 	BNL/JLab, CPU (AMD, Intel)	○	○	←1.7 GeV の格子
INCITE 	Frontier/Aurora, GPU (AMD/Nvidia)		○	←2.4 GeV の格子をあと2年で
理研 R-CCS 	富岳, CPU (富士通)		○	←1.7 GeV の格子