

輪の上の粒子の量子論：

または私は如何にして心配するのを止めてtheta vacuumを愛するようになったか

Mohammad Aghaie, Ryosuke Sato, JHEP 06 (2026) 213, arXiv:2601.18248

佐藤 亮介（大阪大学）

強いCP問題

[Jackiw, Rebbi (1976)]
[Callan, Dashen, Gross (1976)]
[Peccei, Quinn (1977)]

標準模型のCP対称性の破れ

CKM行列の複素位相

$$\delta_{CKM} = O(1)$$

[Particle Data Group]など

QCDの θ 項

$$|\bar{\theta}| < 10^{-10}$$

[Abel+ (2020)]など

なぜ $\delta_{CKM} \gg \bar{\theta} ??$

強いCP問題は”存在しない” !?

[2001.07152]

- Ai, Cruz, Garbrecht, Tamarit, 2001.07152,
- Ai, Garbrecht, Tamarit, 2403.00747, 2404.16026, 2511.04216

ACGTによる経路積分の計算の提案：

教科書と逆の順番！

- まず、体積無限の極限をとるべし ($VT \rightarrow \infty$)
- そののちに、トポロジカルセクター (instanton) の足し上げをすべし

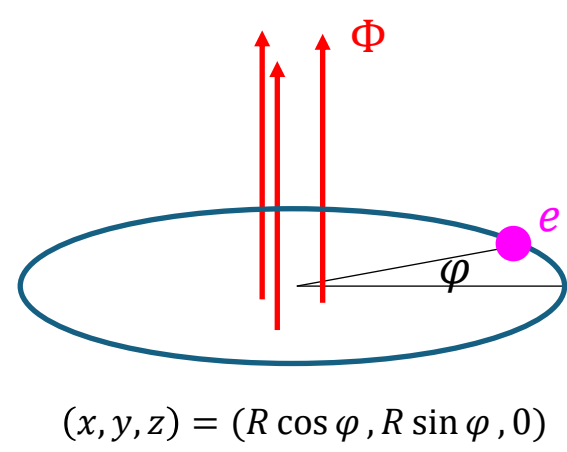
ACGTの提案に関する他の議論：Albandea et.al. 2402.17518, Benabou et.al. 2510.18951, Khoze 2512.06827, Bhattacharya 2512.10127, Ringwald 2601.04718, Sannino 2601.19735, Kobakhidze 2604.02698

円周上の粒子の定式化

See, e.g.,
[Rubakov “Classical Theory of Gauge Fields”]
[David Tong’s lecture note]

1. 三次元空間の中の円周

- 粒子が住んでいるのは半径 R の円周上
- $\varphi \in [0, 2\pi)$



$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + e \vec{A} \cdot \dot{\vec{x}} - V(\vec{x}) \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + \frac{e\Phi}{2\pi} \dot{\varphi} - V(\varphi)$$

- $0 \leq \varphi \leq 2\pi$
 - $\psi(2\pi) = \psi(0)$
- ($I = mR^2, \Phi = 2\pi R A_\varphi$)

2. $\varphi \sim \varphi + 2\pi$ を同一視して円周にする

- 粒子が住んでいるのは $\mathbb{R}^1 = (-\infty, +\infty)$
- $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi$ はゲージ変換

$$L = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 - V(\varphi)$$

Classical vacuum

$$|n\rangle : \varphi \sim \varphi + 2\pi n$$

$$|n\rangle \rightarrow |n+1\rangle$$

Quantum vacuum

$$|\theta\rangle \equiv \sum_n e^{in\theta} |n\rangle$$

$$|\theta\rangle \rightarrow \sum_n e^{in\theta} |n+1\rangle = e^{-i\theta} |\theta\rangle$$

円周上の粒子はゲージ理論の真空の良いtoy model

円周上の粒子と経路積分

円周上の粒子は、1. Schroedinger方程式を解く 2. 経路積分で定式化する の二種類の方法で議論できる。

1.と2.の結果は同じになるべき。2.の方法について、

- $\beta \rightarrow \infty$ の前にインスタントンを足し上げる (通常の方法)
- $\beta \rightarrow \infty$ の後にインスタントンを足し上げる (ACGTの提案)

2a. 経路積分 (通常の方法)

$$Z(\theta, \beta) = \int D\varphi \exp(-S_E[\varphi])$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\omega\beta\right) \sum_{n_+, n_-} \frac{1}{n_+! n_-!} (K_B \beta e^{-S_B})^{n_+ + n_-} e^{in_+ \theta} e^{-in_- \theta}$$

n_+ : number of +1 instanton
 n_- : number of -1 instanton

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\omega\beta + 2K_B \beta e^{-S_B} \cos \theta\right)$$

$$\Rightarrow E_0 = -\frac{1}{\beta} \log Z = \frac{1}{2}\omega - 2K_B e^{-S_B} \cos \theta$$

2b. 経路積分 (ACGTの提案)

Usual partition function :

$$Z(\theta, \beta) = \sum_{\Delta} Z_{\Delta}(\beta) e^{i\Delta\theta}$$

Winding number Δ contribution :

$$\Rightarrow Z_{\Delta}(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-i\Delta\theta} Z(\theta, \beta)$$

ACGT’s partition function :

$$Z_{ACGT}(\theta, \beta) = \sum_{|\Delta'| \leq \Delta} Z'_{\Delta'}(\beta) e^{i\Delta'\theta} = \frac{1}{2\pi} \int d\theta' f_{\theta}(\theta') Z(\theta', \beta)$$

$$f_{\theta}(\theta') \equiv \sum_{|\Delta'| \leq \Delta} e^{i\Delta'(\theta' - \theta)}$$

$$\xrightarrow{\text{Large } \beta} \sim \int d\theta' \exp\left[-\frac{1}{2}\omega\beta + 2K_B \beta e^{-S} \left(1 - \frac{1}{2}\theta'^2\right)\right]$$

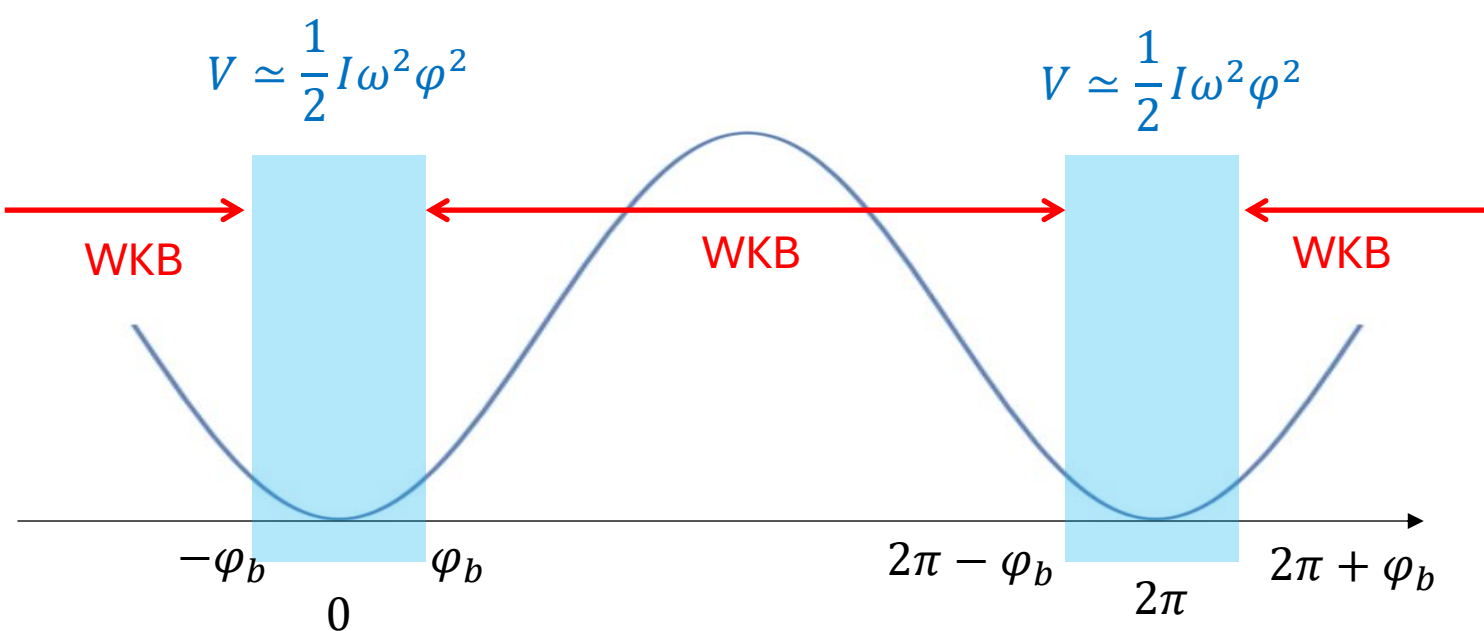
$$\xrightarrow{\text{Large } \beta} \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{K_B \beta e^{-S}}} \exp\left[-\frac{1}{2}\omega\beta + 2K_B \beta e^{-S}\right] \quad \text{See also [Khoze, 2512.06827]}$$

$$-\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log Z = \frac{1}{2}\omega - 2K e^{-S}$$

1.と合わない

1. Schroedinger方程式解く

$$-\frac{1}{2I} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + V(\varphi) \psi(\varphi) = E \psi(\varphi)$$



$$\left\{ \begin{array}{ll} -\varphi_b < \varphi < \varphi_b : & V \simeq \frac{1}{2} I \omega^2 \varphi^2 \Rightarrow \psi(\varphi) = a D_\nu(\sqrt{2I\omega}\varphi) + b D_\nu(-\sqrt{2I\omega}\varphi), \quad \nu = \frac{E}{\omega} - \frac{1}{2} \\ \varphi_b < \varphi < 2\pi - \varphi_b : & \text{WKB近似} \Rightarrow \psi(\varphi) = c_+ \exp\left(+\int^{\varphi} d\varphi' \sqrt{2IV(\varphi') - I\omega}\right) + c_- \exp\left(-\int^{\varphi} d\varphi' \sqrt{2IV(\varphi') - I\omega}\right) \end{array} \right.$$

D_ν : parabolic cylinder function

$$\psi(\varphi + 2\pi) = \exp(i\theta) \times \psi(\varphi) \Rightarrow E_0 = \frac{1}{2}\omega - 2K e^{-S} \cos \theta$$

$$\text{愚直に計算していくと、} K = \sqrt{\frac{S}{2\pi}} \left| \frac{\det(-\partial_t^2 + \omega^2)}{\det'(-\partial^2 + V''/I)} \right|^{1/2}, \quad S = \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{2IV(\varphi)}$$

となり、bounce計算と関係付くことが分かる。

(計算の詳細は2601.18248のsec. 3とapp. Bを参照してください)

なぜ、ACGTの方法で計算すると、 θ 依存性が消えてみえるのか？

インスタントンの足し上げ前は、全ての θ sectorから”寄与”がある

$$Z \sim \int d\theta f(\theta) Z(\theta)$$

$\beta \rightarrow 0$ 極限をとると、基底エネルギーが最小のsectorが自動的に選ばれる

$$Z \propto Z(0)$$

しかし、Schroedinger方程式による定式化で、 $\theta \neq 0$ の系を定義できることは明らか。

- ACGTの提案する経路積分の方法の結果はSchrodinger方程式の結果と整合しない。
- ACGTの経路積分ではどのような θ を与えても、 $\theta = 0$ のセクターが自動的にピックアップされる。
- ACGTの議論では「強いCP問題」は否定できていない。