

Towards Asymptotically Safe Gravity: A Functional Renormalization Group Perspective

山田 雅俊

(関西学院大学理学部物理・宇宙学科)

量子重力は場の量子論の枠組みで 定式化不可能か？

- ・ Einstein-Hilbert作用に基づく量子論は摂動的にくりこみ不可能

't Hooft and Veltman(1974), Annales Poincare Phys.Theor.,A20,69

- ・ ただし、pure gravityに限りone-loopではくりこみ可能
- ・ two-loop以上ではpure gravityでもくりこみ不可能

Goroff and Sagnotti, Phys.Lett 160B,81 (1985)

- ・ 高階微分演算子の導入(Quadratic gravity; Stelle gravity)

Stelle, Phys.Rev. D16 (1977) 953-969

$$S_{\text{HD}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} [R - 2\Lambda - \alpha C_{\mu\nu\rho\sigma}^2 + \beta R^2 - \gamma E]$$

- ・ 摂動的にくりこみ可能
- ・ ユニタリ性がtree levelで破れる

$$G(q) = \frac{1}{q^2(q^2 - \alpha)} = \frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^2 - \alpha}$$

量子重力は場の量子論の枠組みで 定式化不可能か？

- ・ Einstein-Hilbert作用に基づく量子論は**摂動的に**くりこみ不可能

't Hooft and Veltman(1974), Annales Poincare Phys.Theor.,A20,69

- ・ ただし、pure gravityに限りone-loopではくりこみ可能
- ・ two-loop以上ではpure gravityでもくりこみ不可能

Goroff and Sagnotti, Phys.Lett 160B,81 (1985)

- ・ 高階微分演算子の導入(Quadratic gravity; Stelle gravity)

Stelle, Phys.Rev. D16 (1977) 953-969

$$S_{\text{HD}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} [R - 2\Lambda - \alpha C_{\mu\nu\rho\sigma}^2 + \beta R^2 - \gamma E]$$

- ・ **摂動的に**くりこみ可能

- ・ ユニタリ性がtree levelで破れる

$$G(q) = \frac{1}{q^2(q^2 - \alpha)} = \frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^2 - \alpha}$$

Plan

1. 漸近的に安全とは？

- ・ 紫外完全性とくりこみ可能性

2. 漸近的に安全な量子重力

- ・ 非摂動的にくりこみ可能な量子重力

3. 物質場と量子重力

- ・ ニュートリノ質量

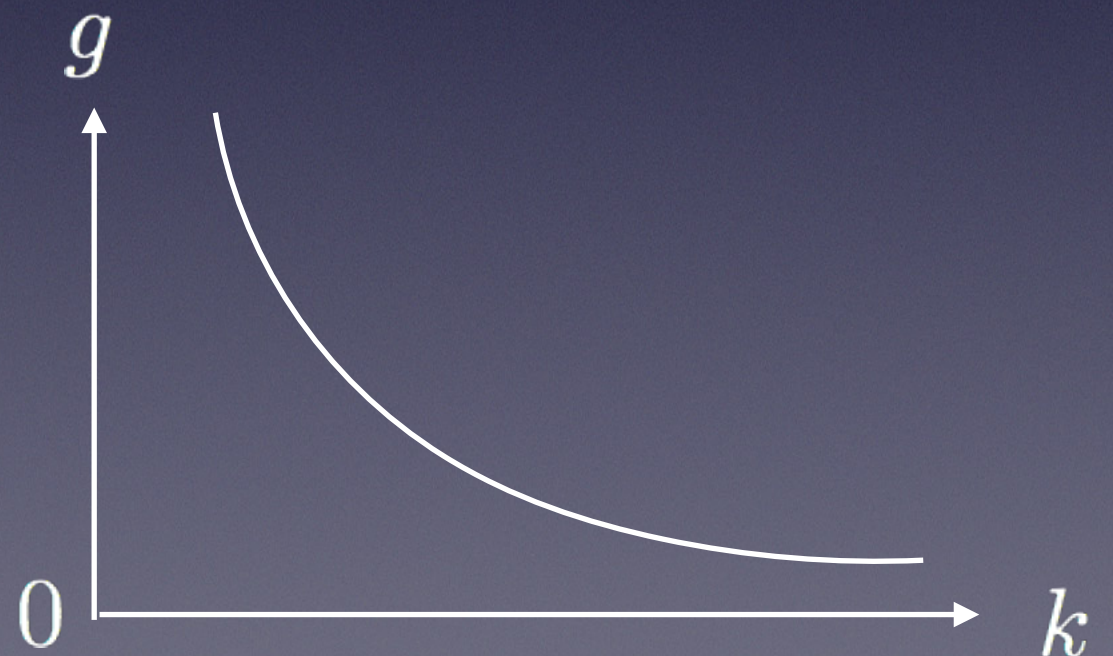
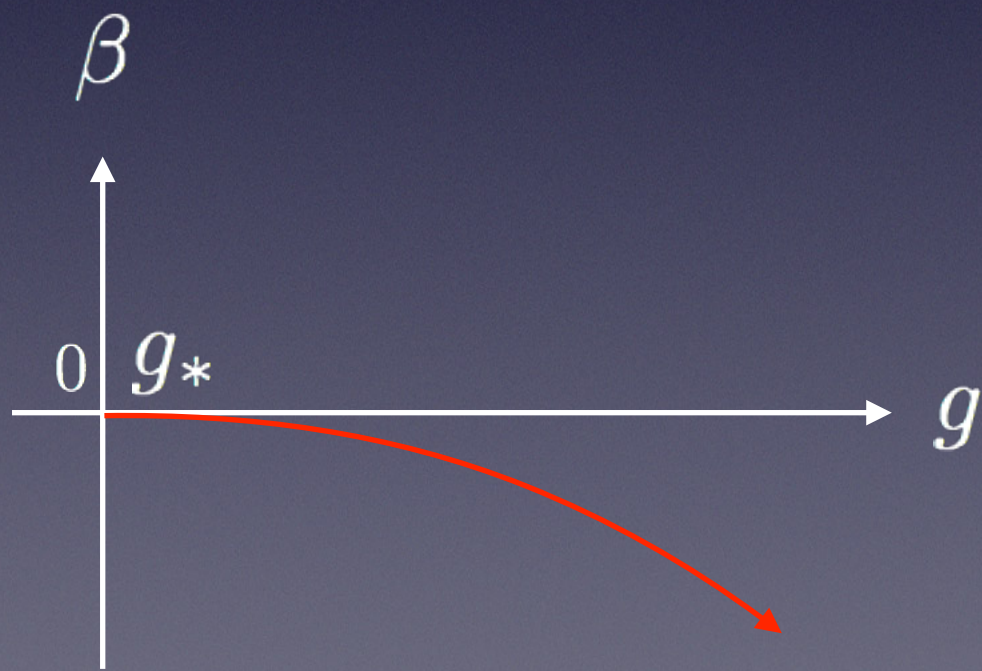
漸近的安全性とは？

- ・ 紫外極限($\Lambda \rightarrow \infty$)で
 - ・ 漸近的自由性: 自由場の理論へと漸近的に近づく
 - ・ 漸近的安全性: 相互作用のある理論へと漸近的に近づく
- ・ 自由場の理論: ガウス(自明な)固定点(摂動的)
- ・ 相互作用のある理論: 非自明な固定点(非摂動的)

漸近的自由性

- Asymptotic freedom

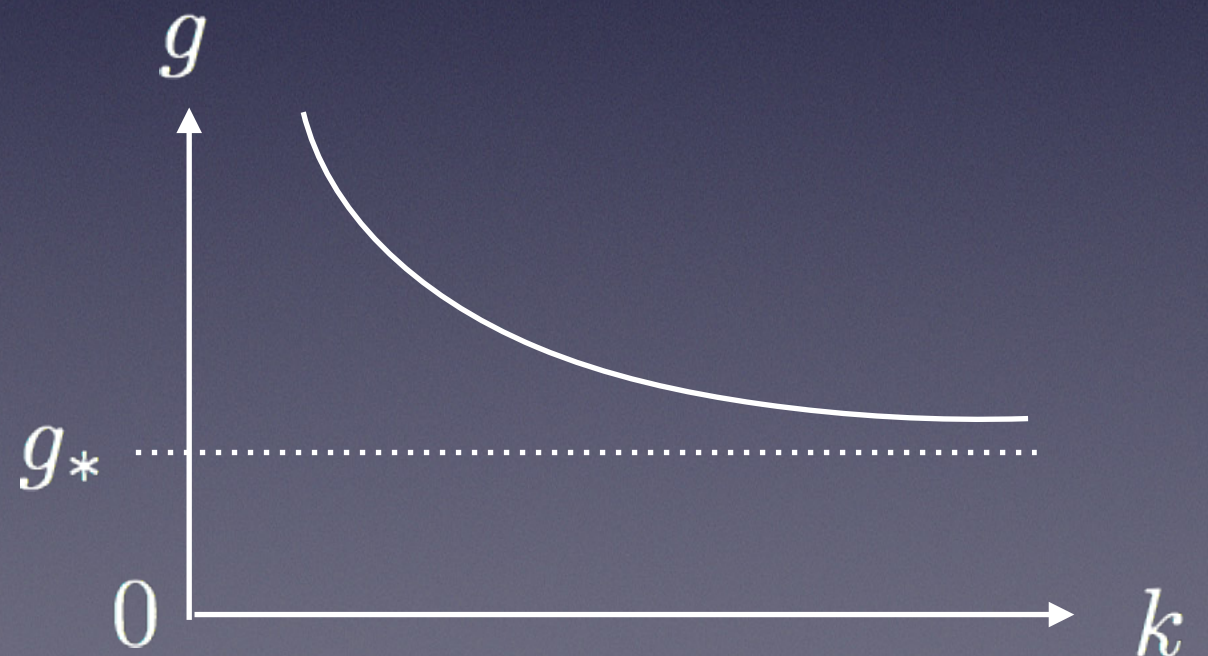
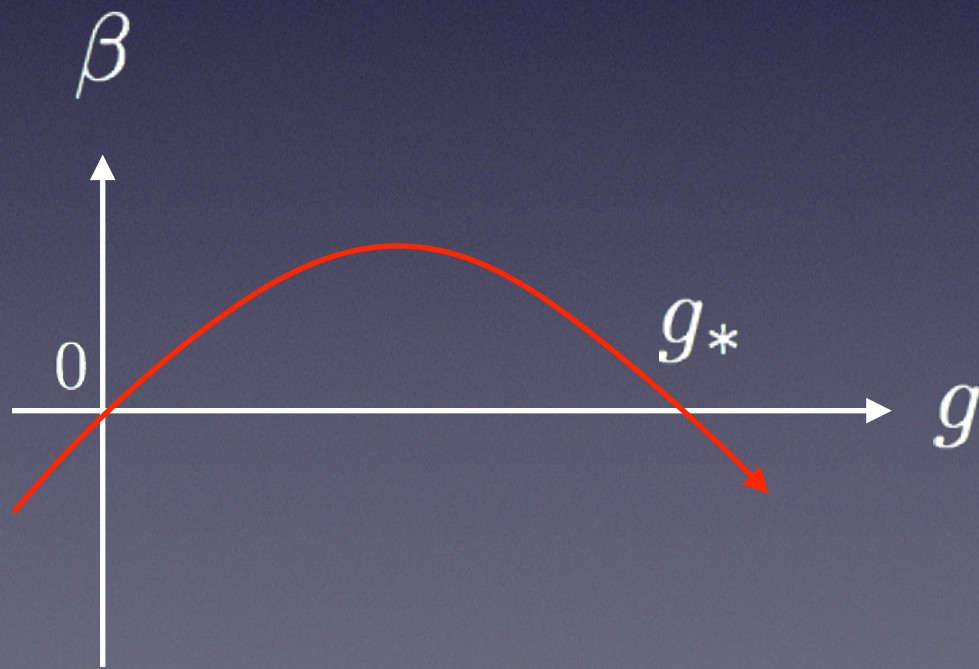
$$\partial_t g = -\beta_0 g^3, \quad \beta_0 > 0$$



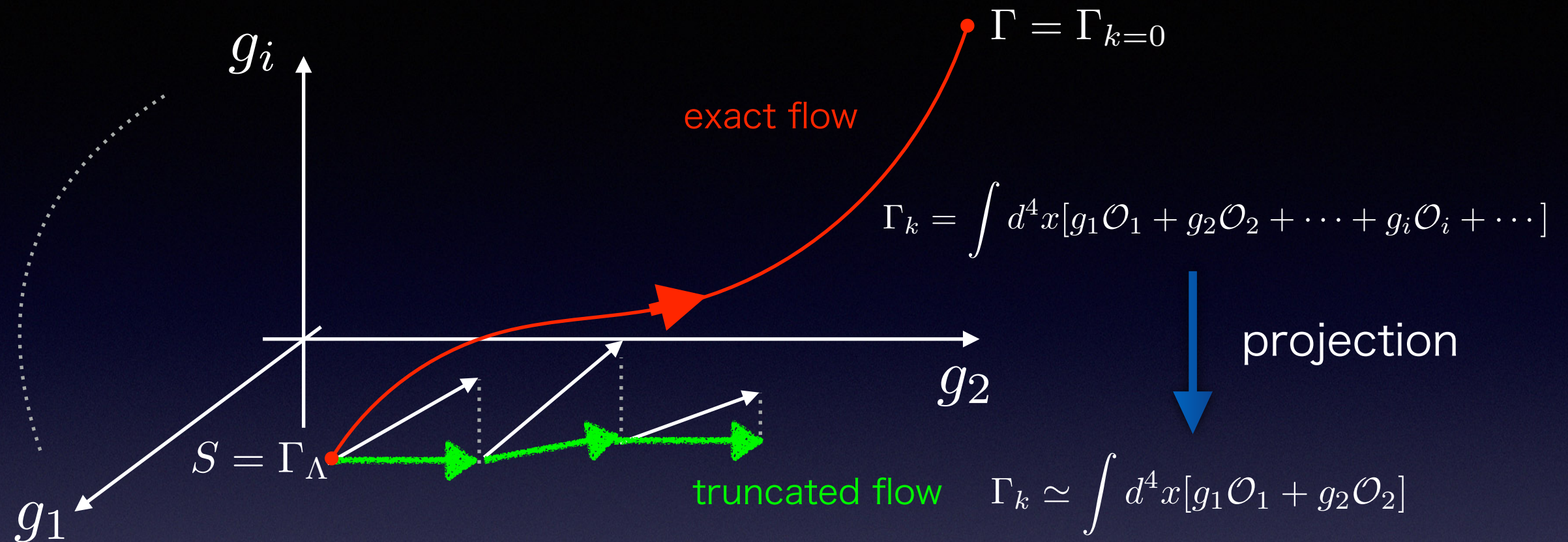
漸近的安全性

- Asymptotic **safety** $g = G_N k^2$

$$\partial_t g = 2g - \beta_0 g^2, \quad \beta_0 > 0$$



ウィルソン/厳密/非摂動/汎関数くりこみ群



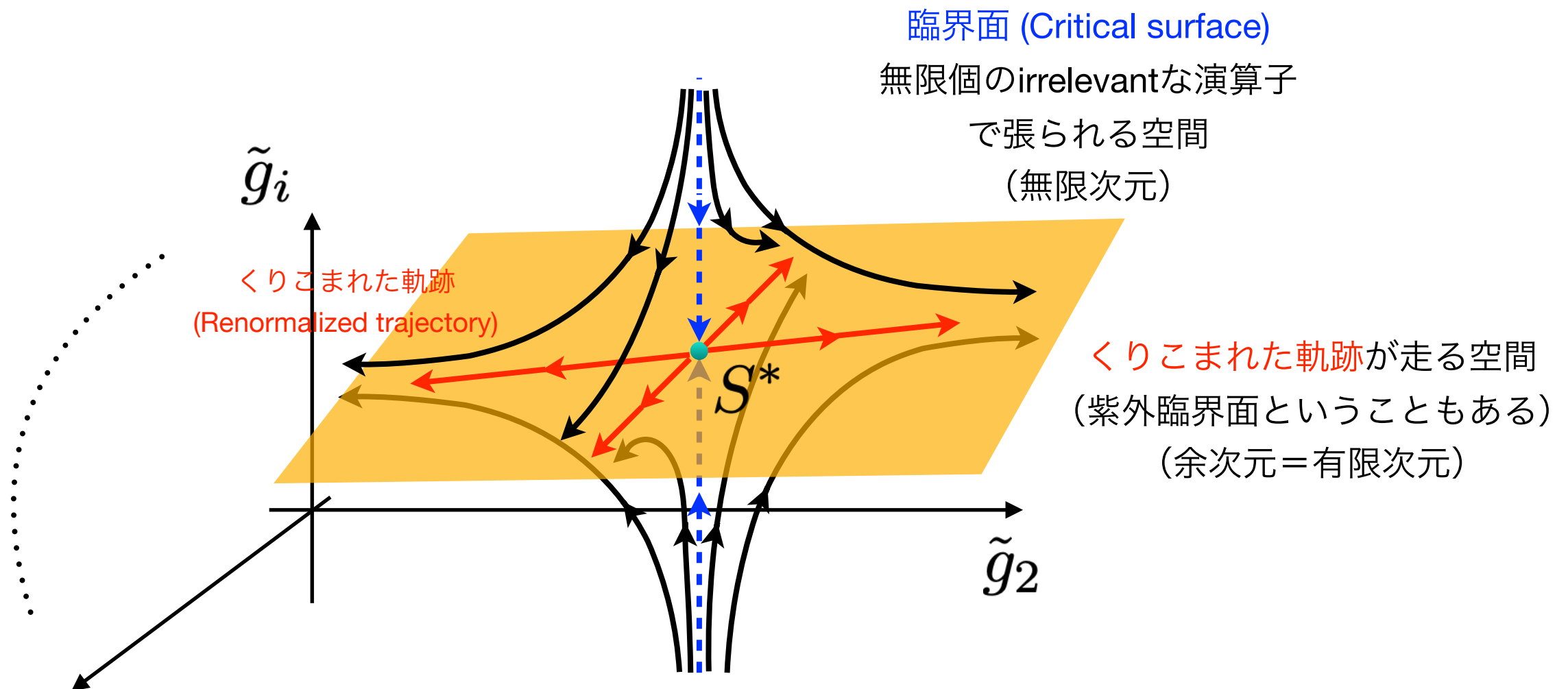
Wetterich方程式

$$k \partial_k \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{Str} [(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1} k \partial_k R_k]$$

固定点

$$k\partial_k\Gamma_k = \int d^4x \left[\underbrace{(k\partial_k g_1)}_{\beta_1(g)} \mathcal{O}_1 + \underbrace{(k\partial_k g_2)}_{\beta_2(g)} \mathcal{O}_2 + \cdots + \underbrace{(k\partial_k g_i)}_{\beta_i(g)} \mathcal{O}_i + \cdots \right]$$

$$k\partial_k\Gamma_k^* = 0 \quad \longrightarrow \quad \beta_i(g^*) = 0 \quad \text{固定点}$$



臨界指数

$$k \frac{dg_i}{dk} = \beta_i(g)$$

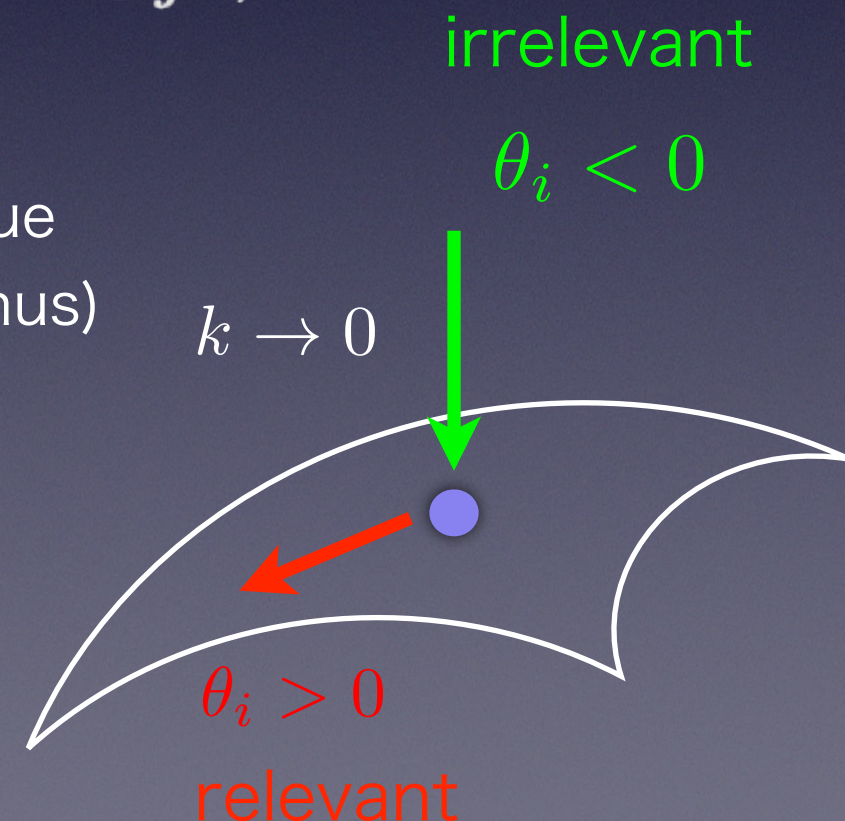
- RG eq. around FP g^*

$$k \frac{dg_i}{dk} \simeq \cancel{\beta_i(g_*)} + \left. \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j} \right|_{g=g_*} (g_j - g_{j*})$$

- Solution to RG eq.

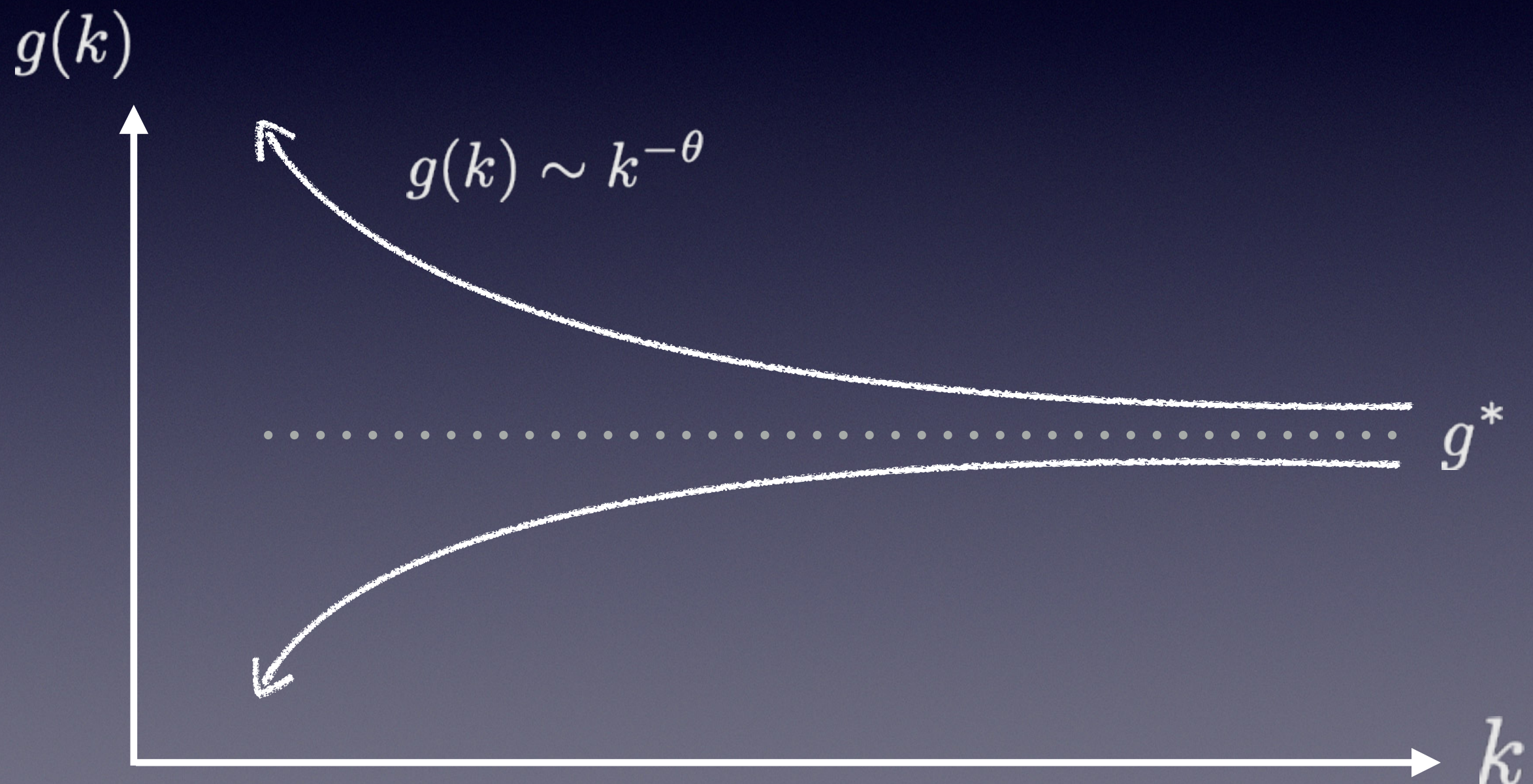
$$g_i(k) = g_i^* + \sum_j^N \zeta_j^i \left(\frac{k}{\Lambda} \right)^{-\theta_j}$$

eigenvalue
(with minus)



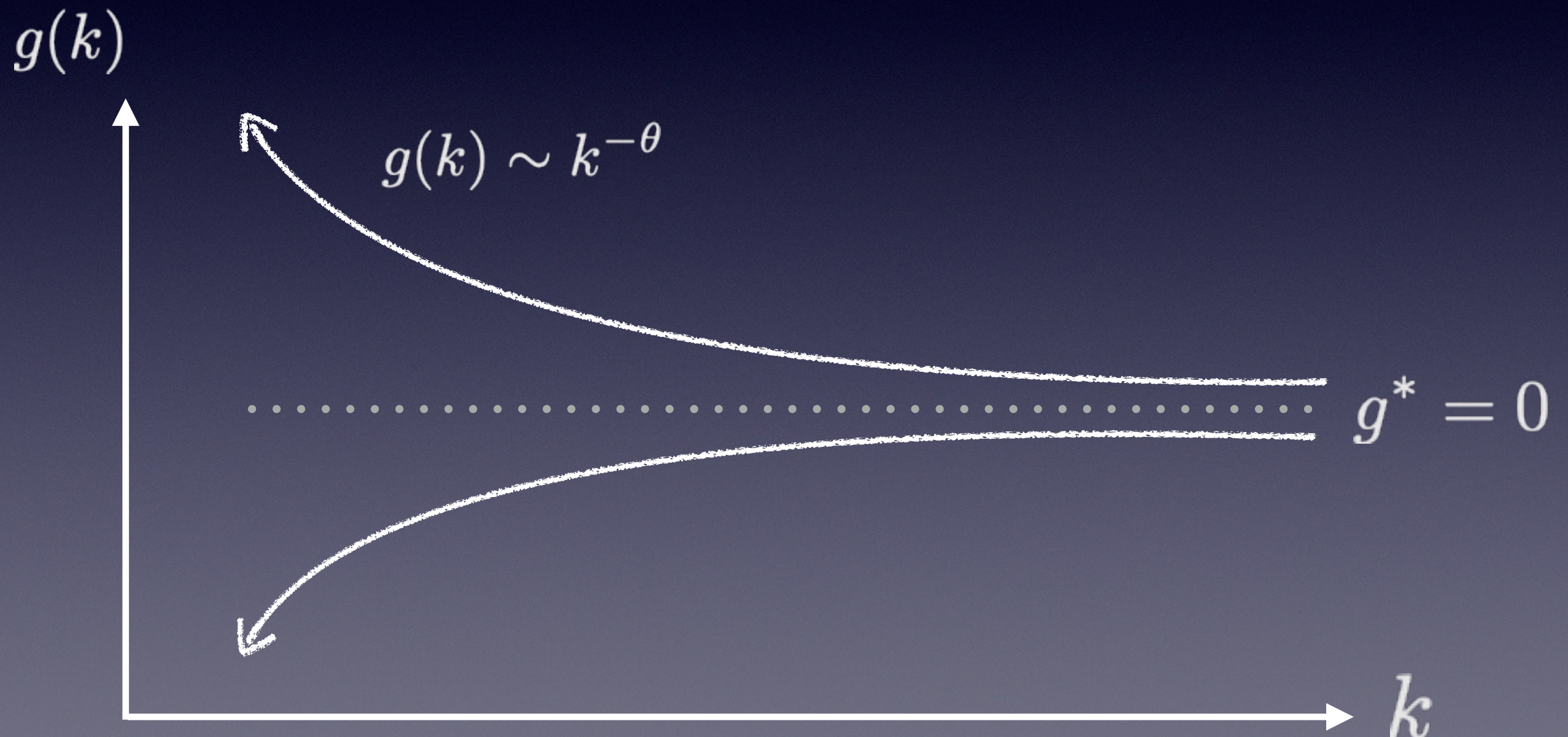
Relevant: $\theta > 0$

- ・ 自由パラメータ



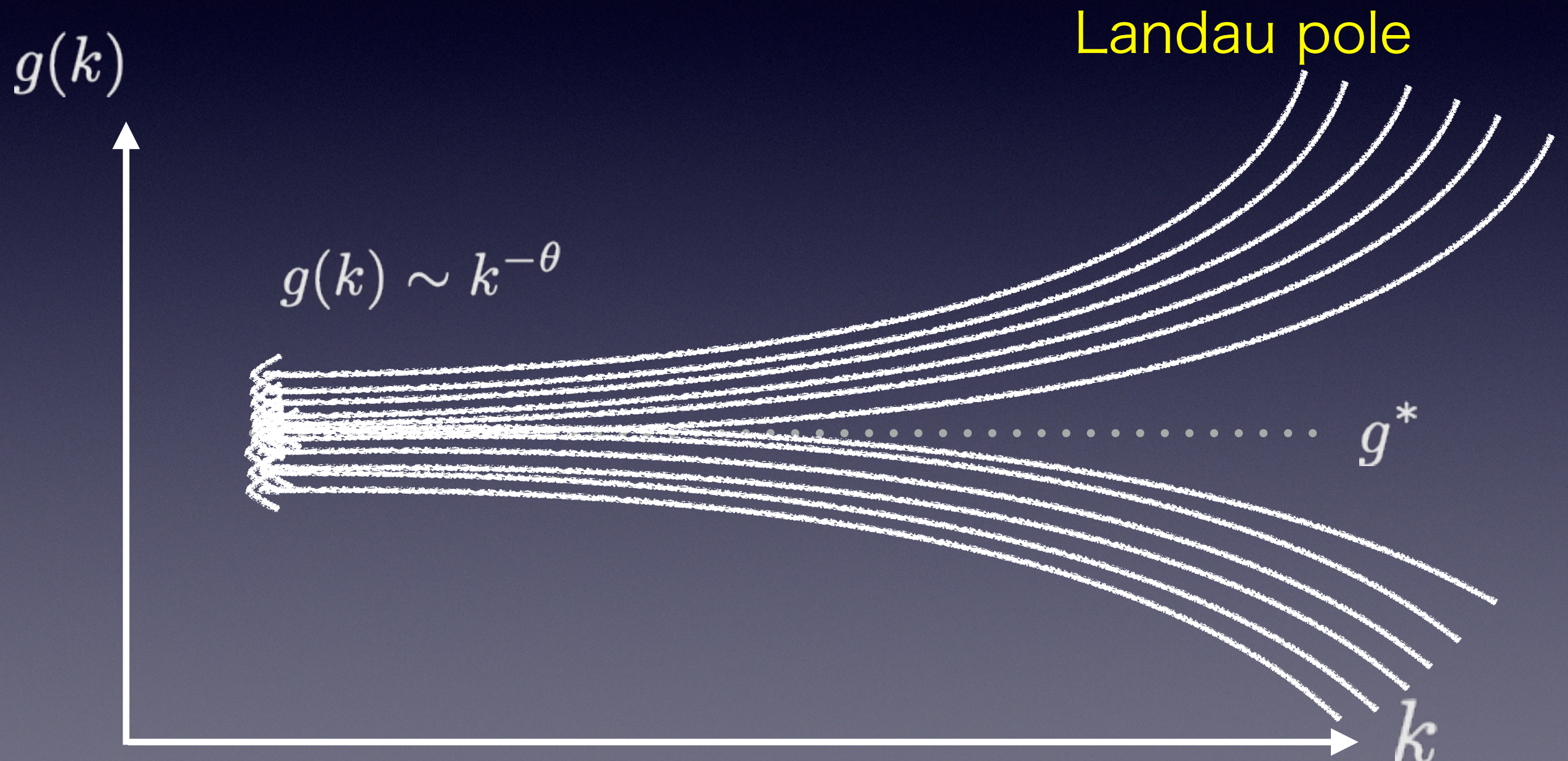
Relevant: $\theta > 0$

- ・ QCDの場合



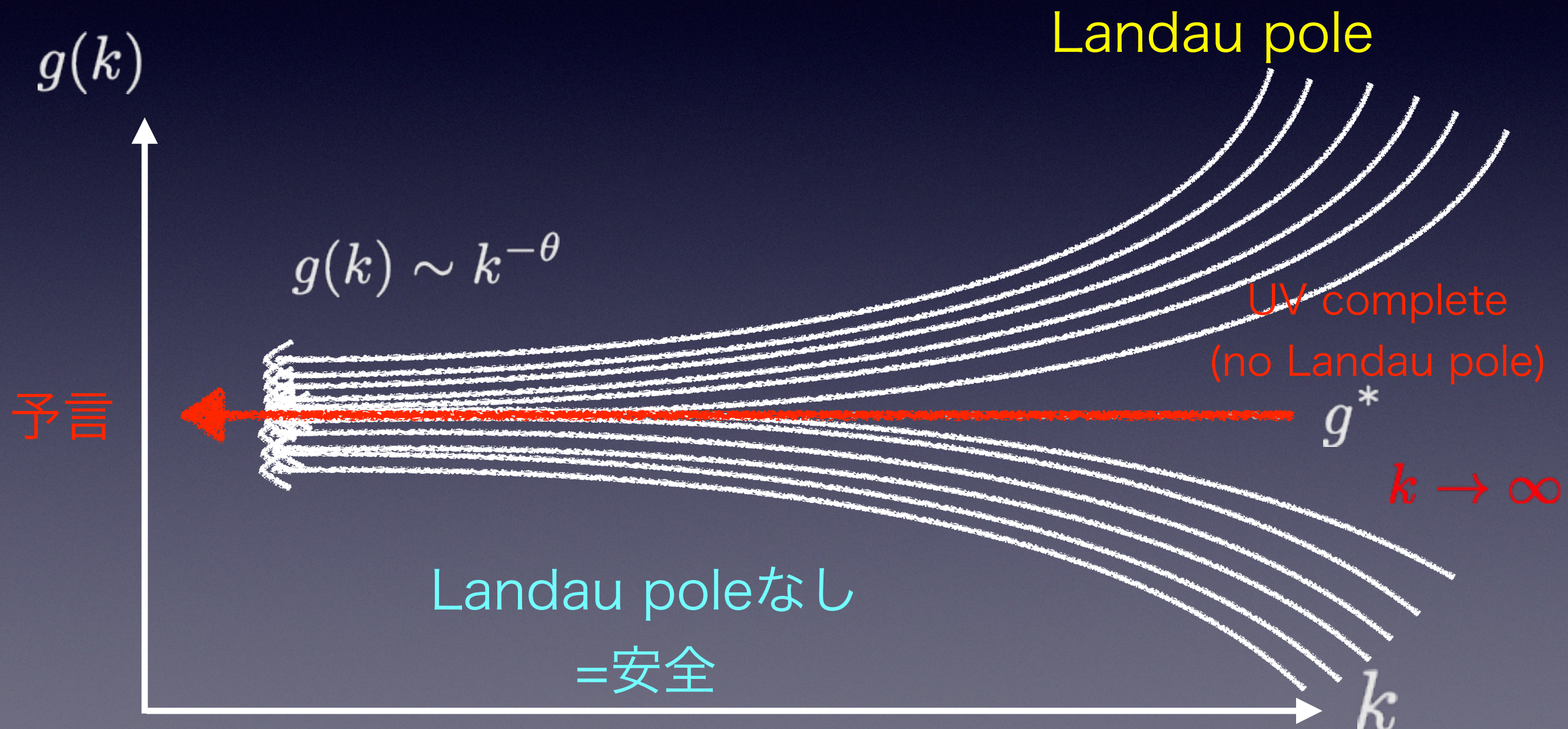
Irrelevant $\theta < 0$

- ・ 予言可能なパラメータ



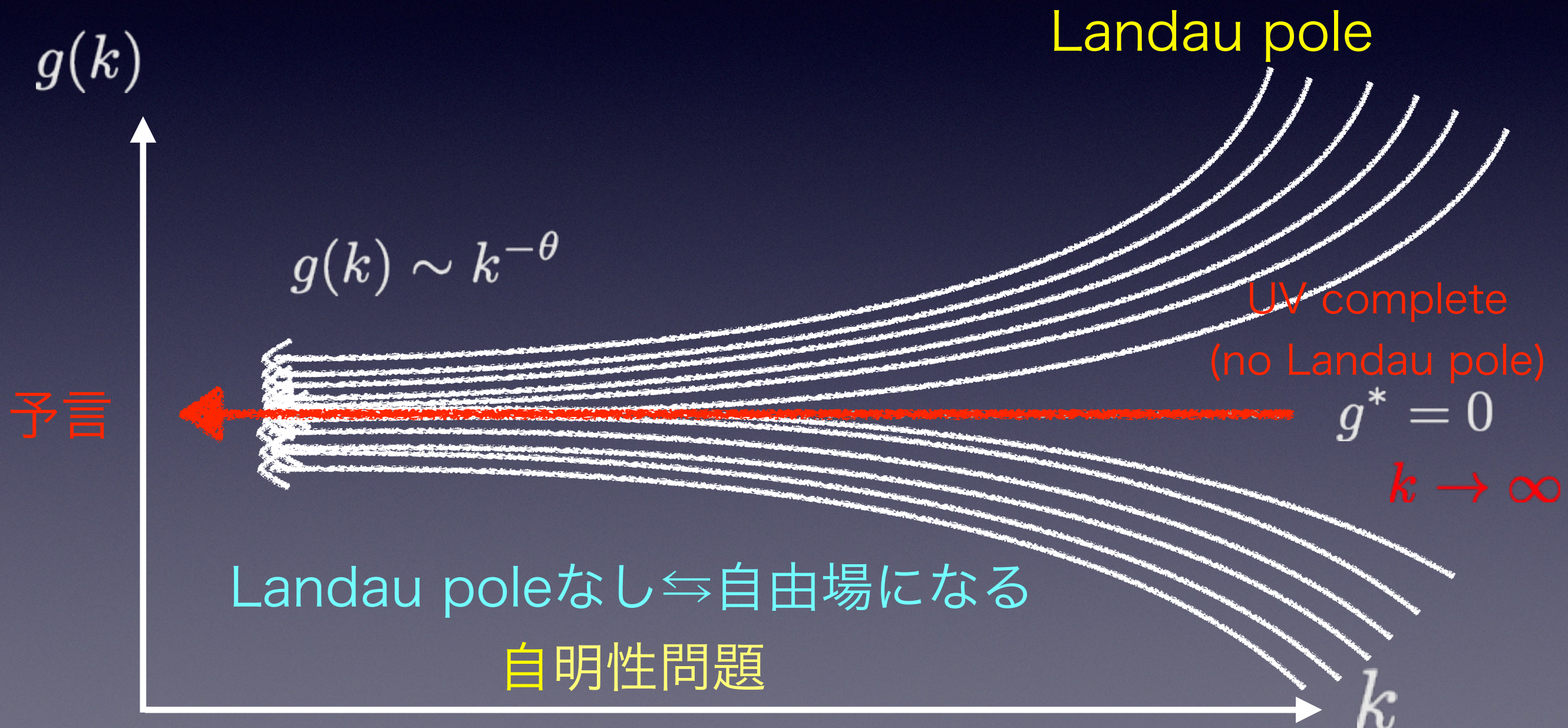
Irrelevant $\theta < 0$

- ・ 予言可能なパラメータ



Irrelevant $\theta < 0$

- QEDやスカラー理論



くりこみ可能性

- ・ 固定点周りでrelevant ($\theta > 0$)な結合定数が有限個 (UV臨界面の次元が有限)
 - ・ その固定点周りでくりこみ可能という
- ・ 摂動論: ガウス固定点周り
 - ・ 自由場理論周りなので異常次元は小さい
 - ・ 臨界指数 = 結合定数の質量次元 (正準次元)
- ・ 非摂動論: 非自明な固定点周り
 - ・ 相互作用により大きな異常次元が生成されうる
 - ・ 臨界指数 = 正準次元 + 異常次元

Plan

1. 漸近的に安全とは？

- ・ 紫外完全性とくりこみ可能性

2. 漸近的に安全な量子重力

- ・ 非摂動的にくりこみ可能な量子重力

3. 物質場と量子重力

- ・ ニュートリノ質量

Gravitational system

- pure gravityでの有効作用

$$\Gamma_k = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} [2\Lambda - R + aR^2 + bR_{\mu\nu}^2 + \cdots]$$

Gravitational system

- pure gravityでの有効作用

Truncate

$$\Gamma_k = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} [2\Lambda - R + aR^2 + bR_{\mu\nu}^2 + \dots]$$

Einstein-Hilbert truncation

$$g = k^2 G$$

$$\lambda = k^{-2} \Lambda$$

$$\beta_g(g, \lambda) = (2 + \eta_N)g$$

$$\beta_\lambda(g, \lambda) = -(2 - \eta_N)\lambda - \frac{g}{\pi} \left[5 \ln(1 - 2\lambda) - 2\zeta(3) + \frac{5}{4}\eta_N \right]$$

重力相互作用により生成した異常次元

$$\eta_N = -\frac{2g}{6\pi + 5g} \left[\frac{18}{1 - 2\lambda} + 5 \ln(1 - 2\lambda) - \zeta(2) + 6 \right]$$

Gravitational system

- 固定点

$$\beta_g = \beta_\lambda = 0 \longrightarrow (g_*, \lambda_*) = (0, 0), \text{ (0.378, 0.340)}$$

- 臨界指数

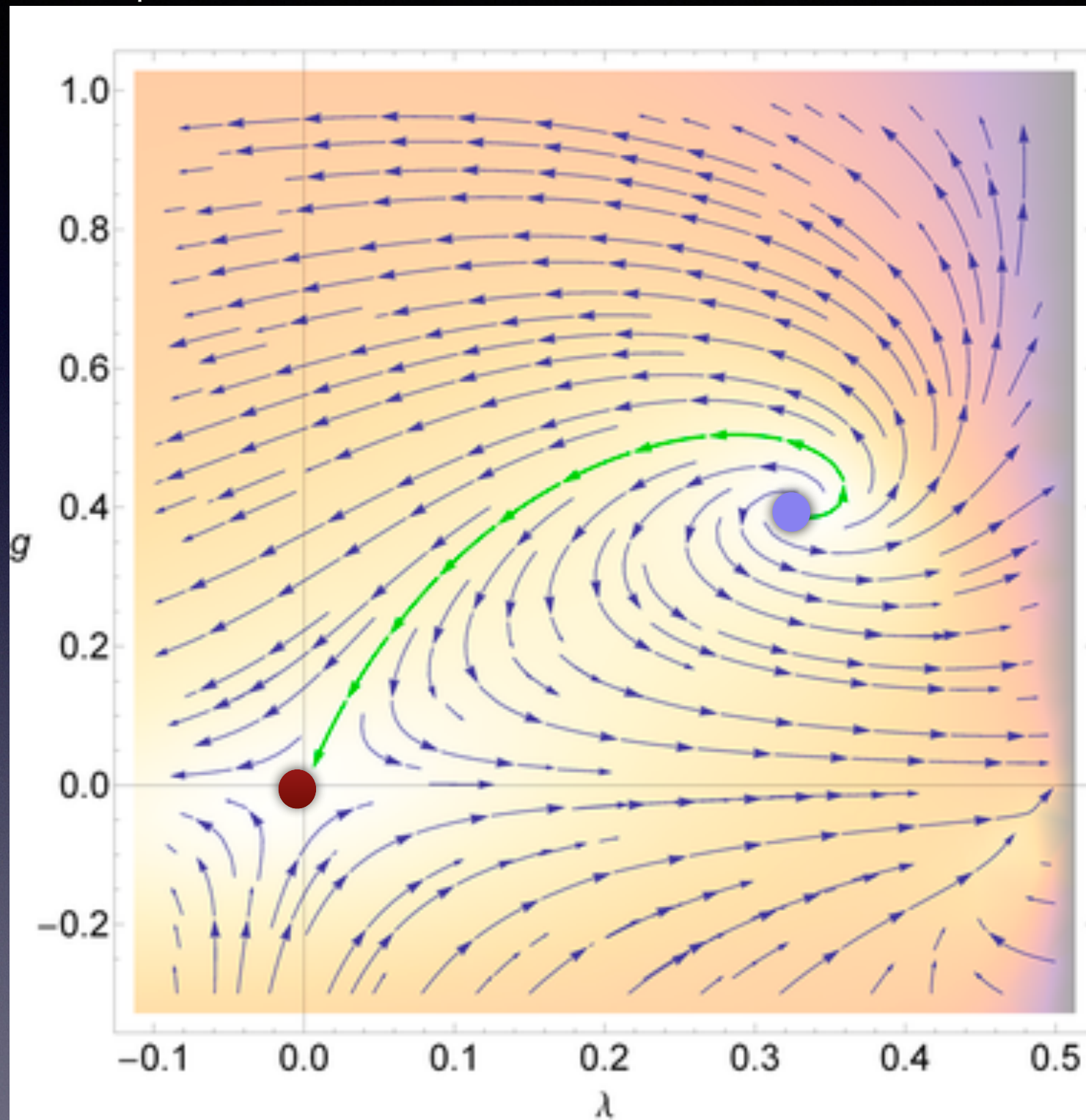
$$\theta_i = -\text{eig} \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial \beta_g}{\partial g} & \frac{\partial \beta_g}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \beta_\lambda}{\partial g} & \frac{\partial \beta_\lambda}{\partial \lambda} \end{array} \right) \bigg|_{g=g_*, \lambda=\lambda_*}$$

$$(\theta_g, \theta_\lambda) = (-2, 2), \text{ (2.141 + 3.438i, 2.141 - 3.438i)}$$

くりこみ群のフロー

e.g. scholarpedia

g
Newton
constant



$$g(k) \sim k^{-\theta}$$

At 非自明なFP

$$g \sim k^{-2.141-3.438i}$$

$$\lambda \sim k^{-2.141+3.438i}$$

Relevant!

At ガウスFP

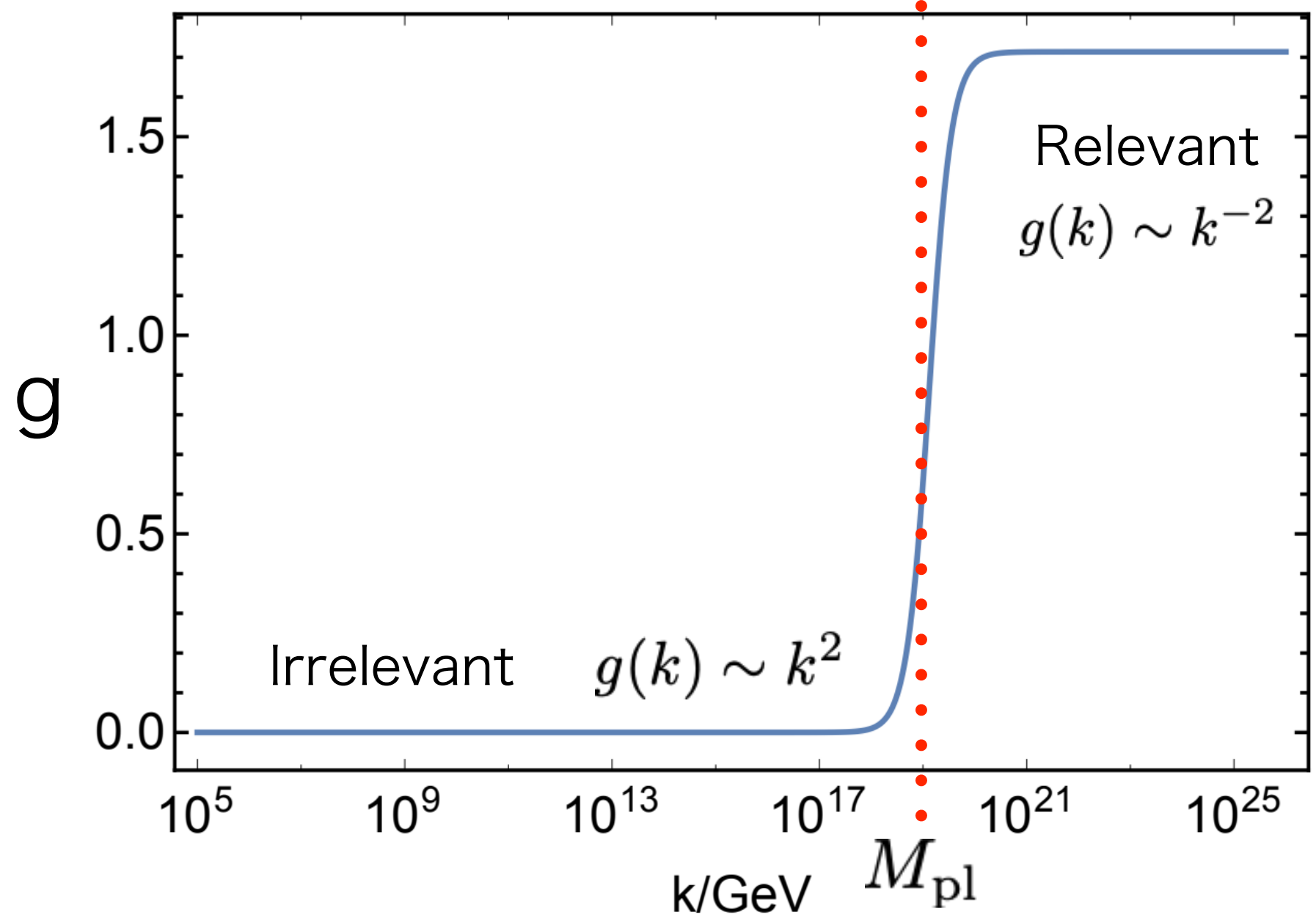
$$g \sim k^2$$

$$\lambda \sim k^{-2}$$

λ Cosmological constant

無次元のニュートン定数のRG

Newton
constant

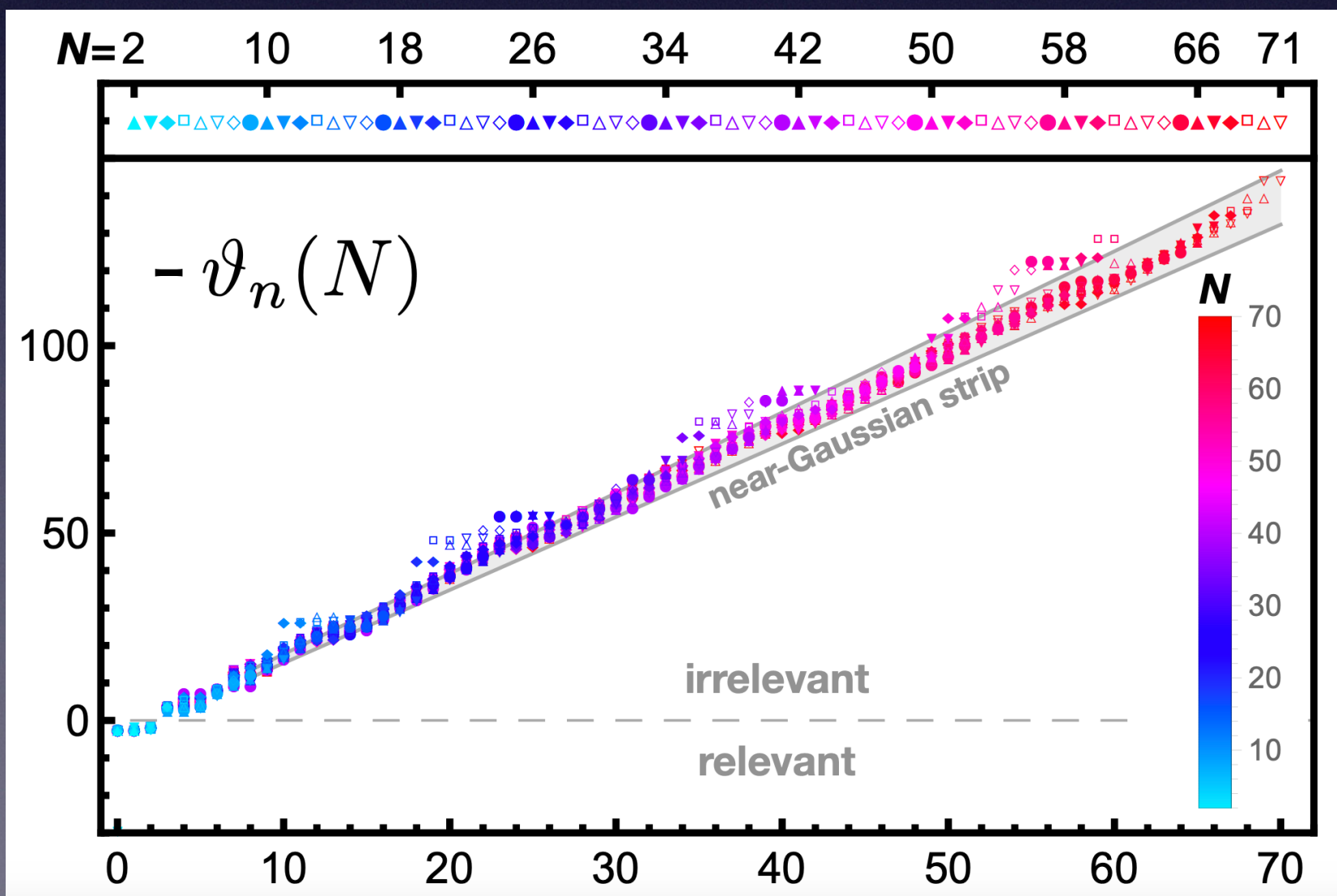


Higher order truncation I

- $f(R)$ truncation (pure gravity)

Phys.Rev. D99 (2019) no.12, 126015

$$\Gamma_k = \int d^4x \sqrt{g} f(R) = \int d^4x \sqrt{g} [g_0 + g_1 R + g_2 R^2 + g_3 R^3 + \dots]$$



Up to R^{71}

Relevantな結合定数が有限個
=くりこみ可能!

3つの自由パラメータ

Higher order truncation II

- $R + R^2 + R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ (pure gravity)

$$\Gamma_k = \int d^4x \sqrt{g} \left[V - \frac{M_p^2}{2} + CR^2 - DR_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \right]$$

- UV fixed point is found

e.g. Sen, Wetterich, Yamada. JHEP 03 (2022) 130

$$v_* = (V/k^4)_* = 0.000281$$

$$w_* = (M_p^2/k^2)_* = 0.0218$$

$$C_* = 0.204$$

$$D_* = -0.0132$$

$$\theta_1 = 3.1$$

$$\theta_2 = 2.4$$

$$\theta_3 = 10.9$$

$$\theta_4 = -88.1$$

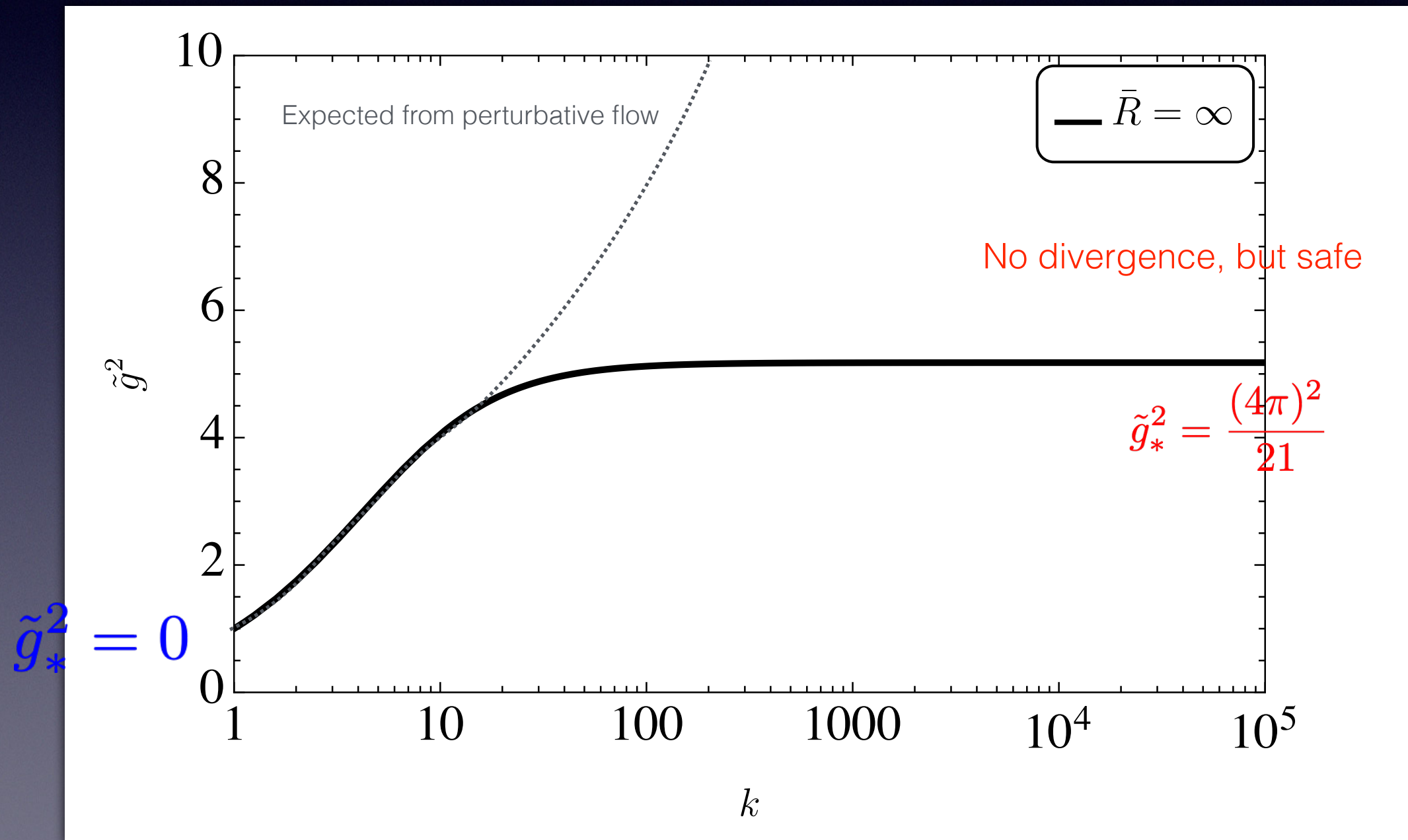
Relevantな結合定数が有限個
=くりこみ可能!

3つの自由パラメータ

ちなみに

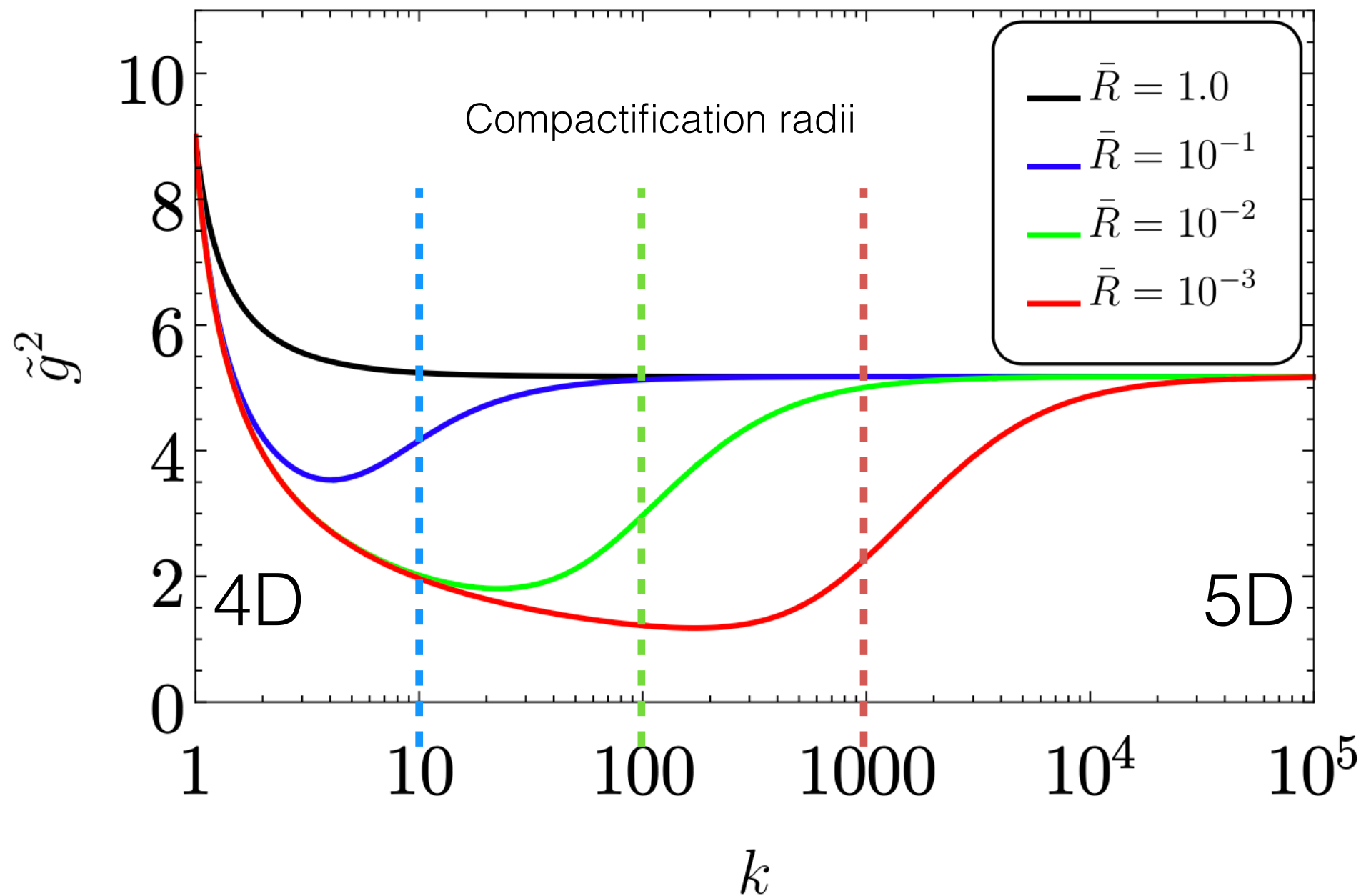
5D次元ゲージ理論もAsymptotically safe?

- 余剰次元模型の基礎理論（廣瀬さん）



コンパクト化したとき

4D-5D crossover



漸近的安全な理論

- 3 D Gross-Neveu模型（4 体フェルミ理論）
- 3 D 非線形シグマ模型（スカラー理論）
- 5 D Yang-Mills理論？？？
- 4 D 重力理論？？

Plan

1. 漸近的に安全とは？

- ・ 紫外完全性とくりこみ可能性

2. 漸近的に安全な量子重力

- ・ 非摂動的にくりこみ可能な量子重力

3. 物質場と量子重力

- ・ ニュートリノ質量

ニュートリノには質量がある

- ・ 標準模型ではmassless
- ・ 観測からわずかな質量がある
- ・ シーソ模型
 - ・ わずかなニュートリノ質量を説明する模型の一つ
 - ・ いろんな模型がある



Type-I シーソ模型

- ・ マヨラナ質量を持つ右巻きニュートリノ

$$\mathcal{L}_\nu = y_\nu \bar{\ell} H \nu_R + \frac{m_R}{2} \bar{\nu}_R^C \nu_R + \text{h.c.}$$

- ・ 電弱対称性の破れ $\langle H \rangle = v_H / \sqrt{2}$

- ・ ディラック質量 $m_D = \frac{y_\nu v_H}{\sqrt{2}}$

- ・ 質量固有値 $m_{\text{obs}} \simeq \frac{m_D^2}{m_R}$

質量への制限

- ・ $m_{\text{obs}} \sim 0.05 \text{ eV}$.
- ・ 2つのパラメータ: y_ν and m_R .
- ・ Thermal Leptogenesisからの制限

$$10^{8-9} \text{ GeV} < m_R$$

- ・ これは下限を与える。(Davidson-Ibarra bound)
- ・ 詳しくは今西さん (山口大) のポスターへGo

湯川相互作用への重力効果

- くりこみ群方程式 (schematic structure)

$$\partial_t y_\nu = \frac{5}{32\pi^2} y_\nu^3 - f_y(G, \Lambda) y_\nu$$



- 重力からの寄与：

$$f_y = -G \frac{96 - 235\Lambda + 103\Lambda^2 + 56\Lambda^3}{12\pi(3 - 10\Lambda + 8\Lambda^2)^2} \bigg|_{\substack{G \rightarrow G_* = 4.6 \\ \Lambda \rightarrow \Lambda_* = -6.8}} = 7 \cdot 10^{-3}$$

湯川相互作用への重力効果

- くりこみ群方程式 (schematic structure)

$$\partial_t y_\nu = \frac{5}{32\pi^2} y_\nu^3 - f_y(G, \Lambda) y_\nu = 0$$



- 自明な固定点

$$y_\nu^* = 0$$

- 非自明な固定点

$$y_\nu^* = \sqrt{\frac{32\pi^2}{5} f_y(G^*, \Lambda^*)} \simeq 0.45$$

Relevant or Irrelevant?

- Critical exponents

- 自明な固定点

$$\theta \simeq -\frac{\partial \beta_\nu}{\partial y_\nu} \Big|_{y_\nu=0} = f_y > 0$$

Relevant

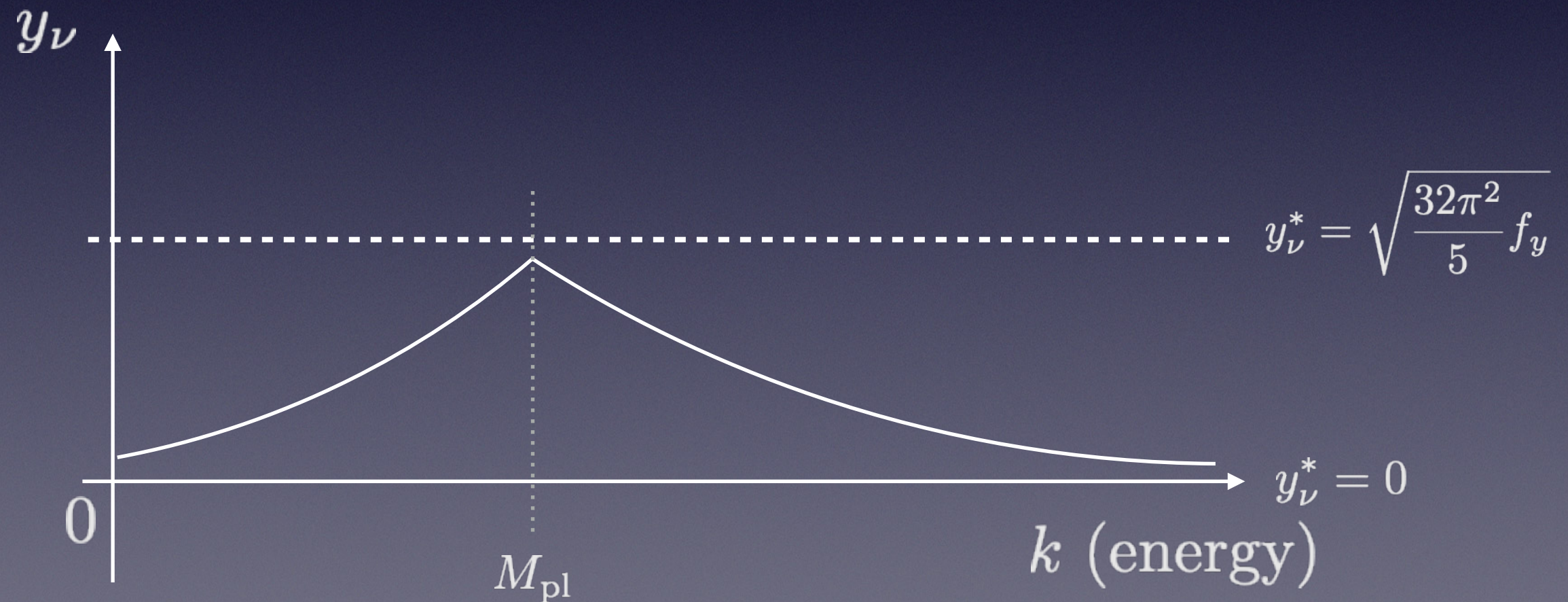
- 非自明な固定点

$$\theta \simeq -\frac{\partial \beta_\nu}{\partial y_\nu} \Big|_{y_\nu=y_\nu^*} = -2f_y < 0$$

Irrelevant

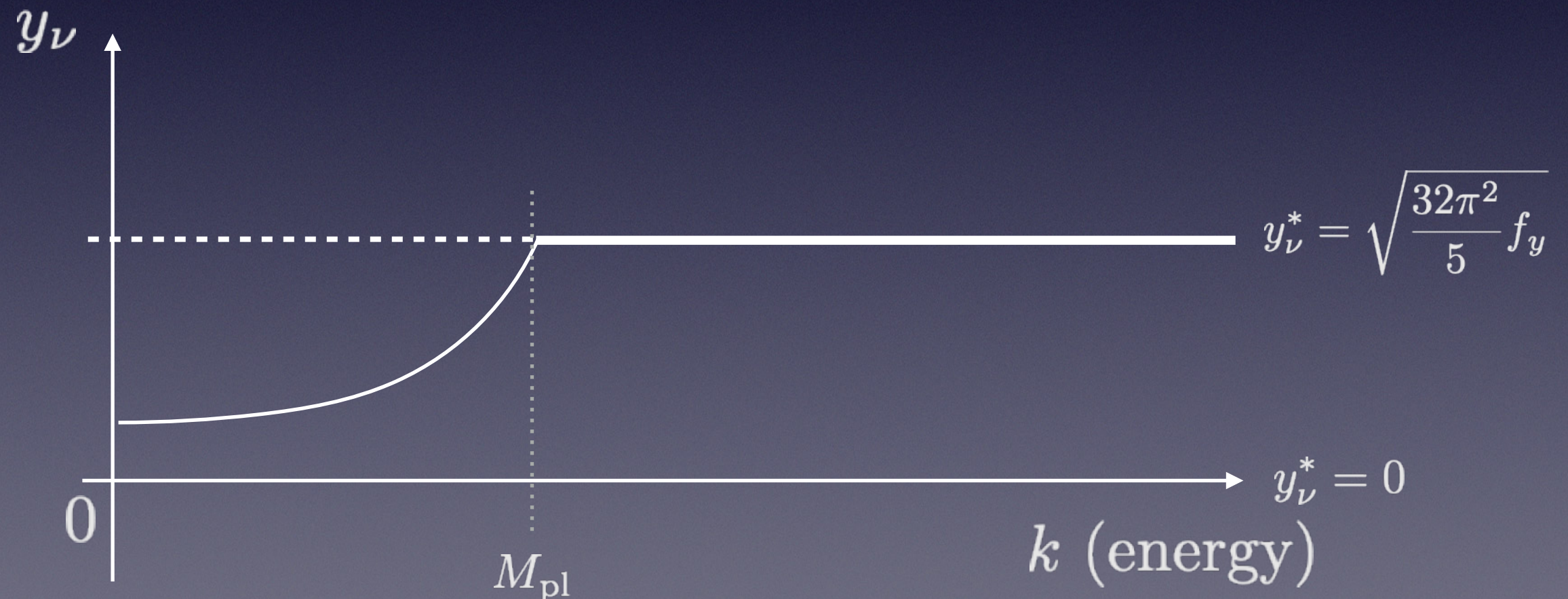
湯川結合定数のフロー

- ・ 3つの可能性
 - ・ 1: 漸近的自由な湯川



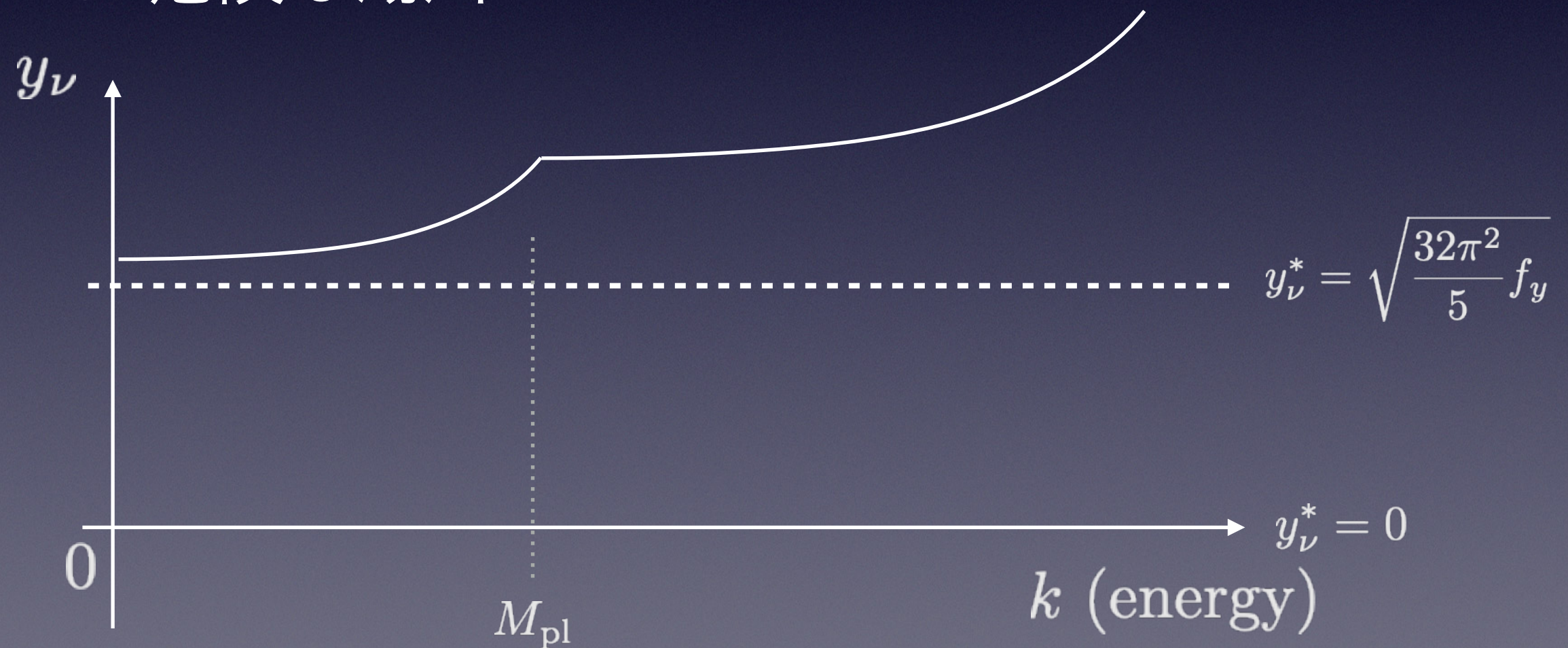
湯川結合定数のフロー

- ・ 3つの可能性
- ・ 2: 漸近的安全な湯川



湯川結合定数のフロー

- ・ 3つの可能性
- ・ 3: 危険な湯川



危険な湯川を避けたい

- ・ もし、

$$y_\nu > y_\nu^*$$

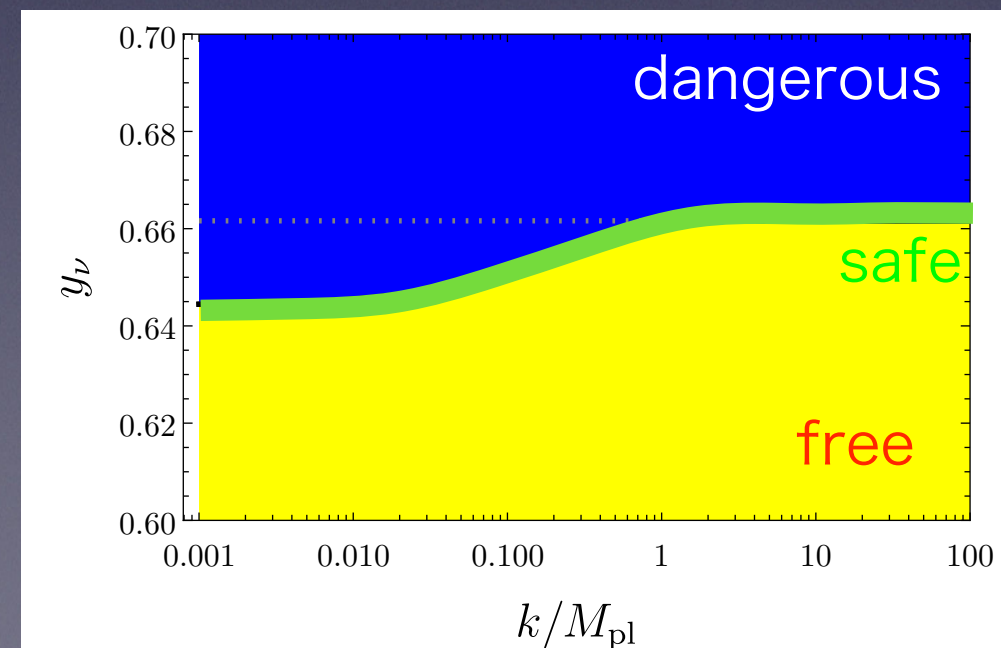
であれば湯川結合定数はランダウポールへ

- ・ 安全または自由になるには、湯川結合定数は

$$y_\nu \lesssim y_\nu^*$$

を満たすべき

- ・ 上から抑えられる



右巻きニュートリノ のマヨラナ質量への制限

- EW真空をかけると、ディラック質量となる

$$m_D^2 = \frac{y_\nu^2}{2} v_H^2 \lesssim \frac{y_\nu^{*2}}{2} v_H^2$$

- シーソー寄稿

$$m_{\text{obs}} \simeq \frac{m_D^2}{m_R} \quad \longrightarrow \quad m_R = \frac{1}{m_{\text{obs}}} \frac{y_\nu^2}{2} v_H^2 \lesssim \frac{1}{m_{\text{obs}}} \frac{y_\nu^{*2}}{2} v_H^2$$

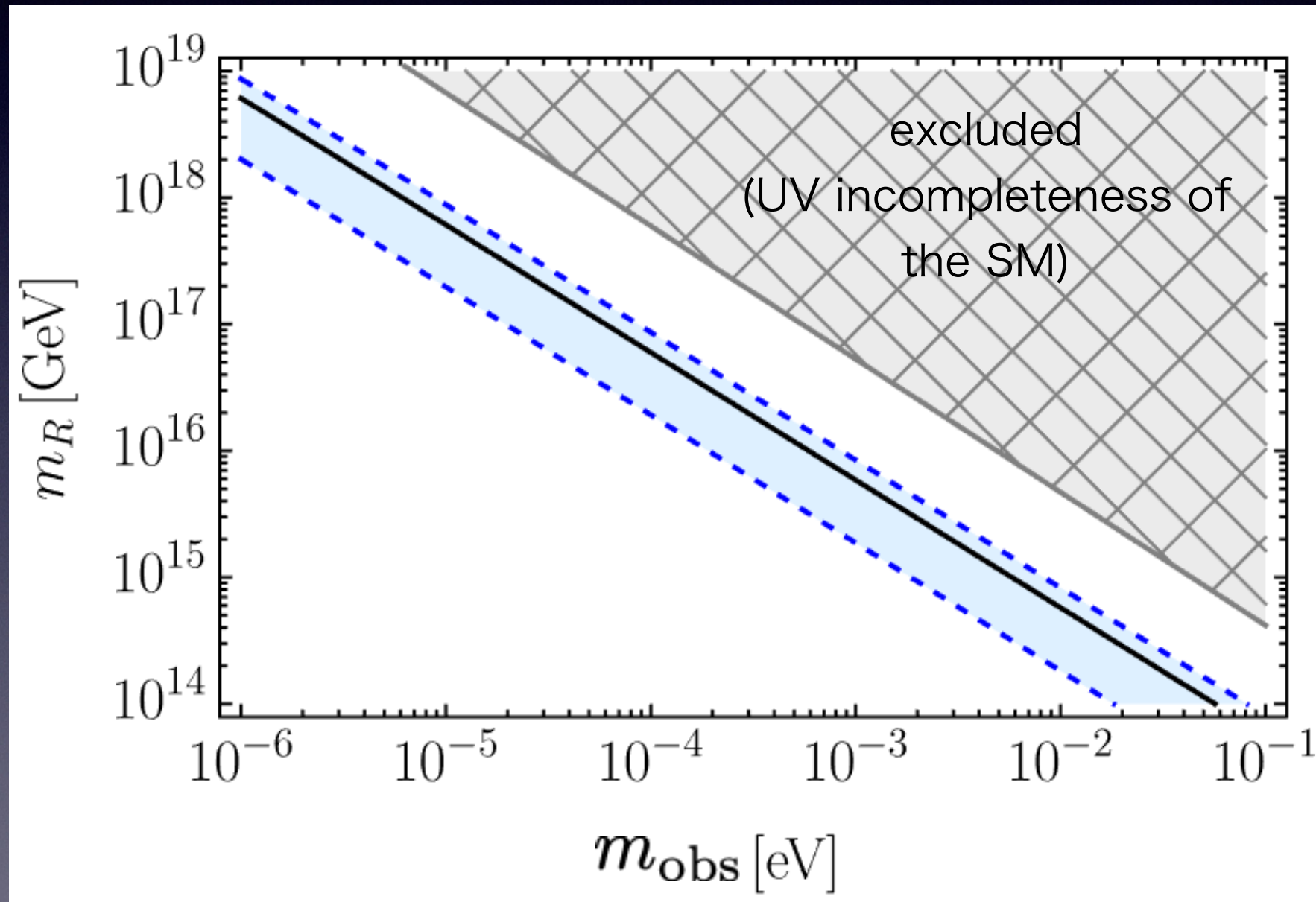
- For $m_{\text{obs}} = 0.05 \text{ eV}$, $y_\nu^* = 0.45$, $v_H = 246 \text{ GeV}$

$$m_R \lesssim 1.2 \cdot 10^{14} \text{ GeV}$$

より精密には

Full Standard model + Type-I calculation $G^* = 4.6$, $\Lambda^* = -6.8$

マヨラナ質量



観測されるニュートリノ質量

まとめ

- ・ 非自明な紫外固定点まわりで紫外完全な理論を定義
- ・ Relevantな演算子の数が有限であればくりこみ可能
- ・ ニュートリノへの制限
- ・ 漸近的安全性から制限を与える

- ・ $10^{8-9} \text{ GeV} < m_R < 10^{14} \text{ GeV}$