

# Extra Dimensions and Inflation

廣瀬拓哉  
(九州産業大学)

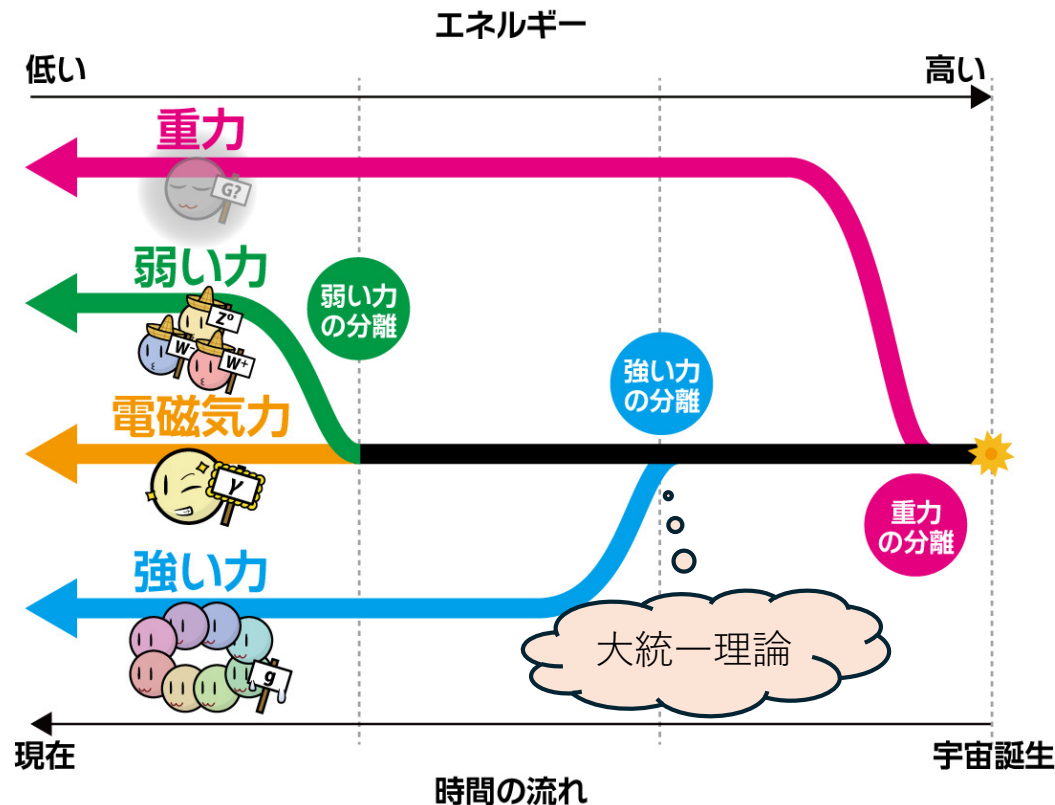
JHEP 04 (2025) 77 [hep-ph/2501.13581]

前半：素粒子論と余剰次元理論

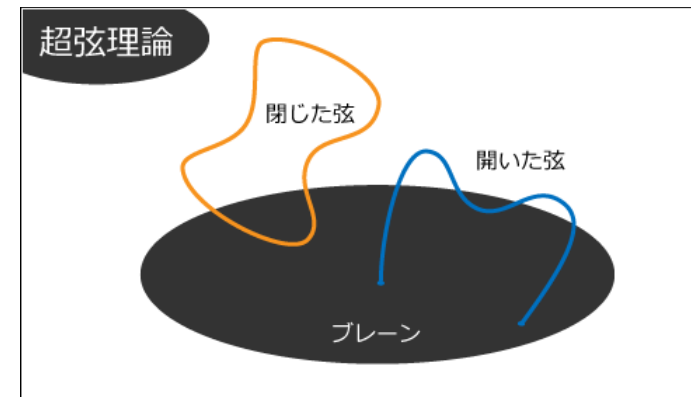
# 素粒子論は分からないことが多い

## 1. 3つの相互作用と重力の統一(量子重力理論)

素粒子論の野望は、3つの相互作用と重力が統一。  
量子論と重力理論を融合させる必要があり難しい。



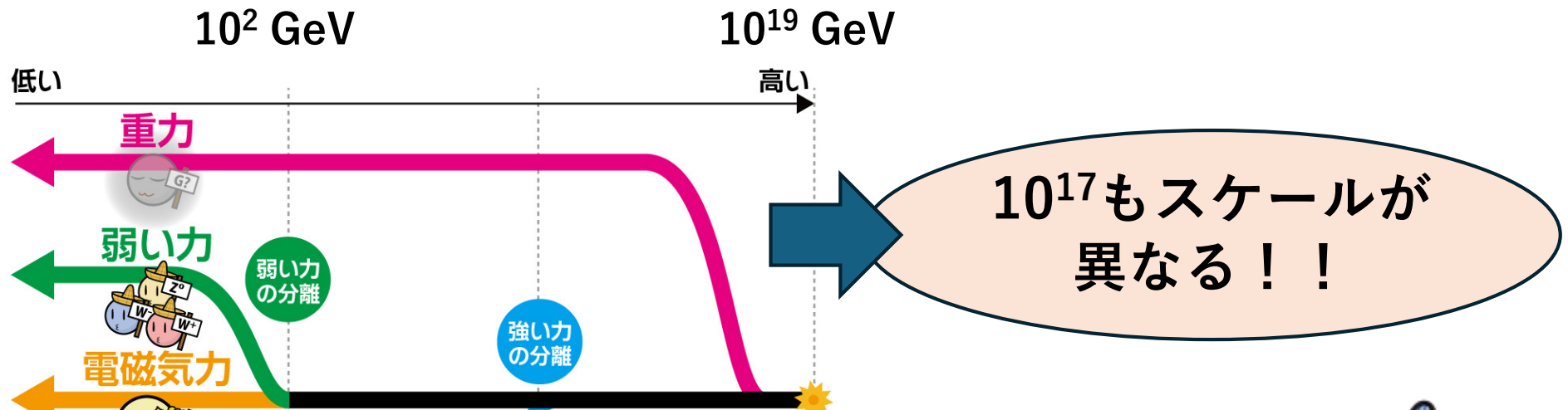
量子重力理論の最有力候補  
→超弦理論



# 素粒子論は分からないことが多い

## 2. 階層性問題

標準理論と重力理論のエネルギースケールが著しく乖離している問題。



この問題は、素粒子に質量を与える  
僕(ヒッグス場)が主役です！



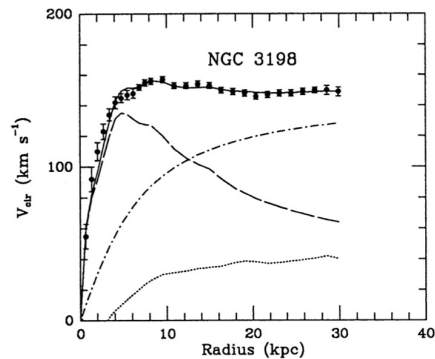
ヒッグス場

# 素粒子論は分からないことが多い

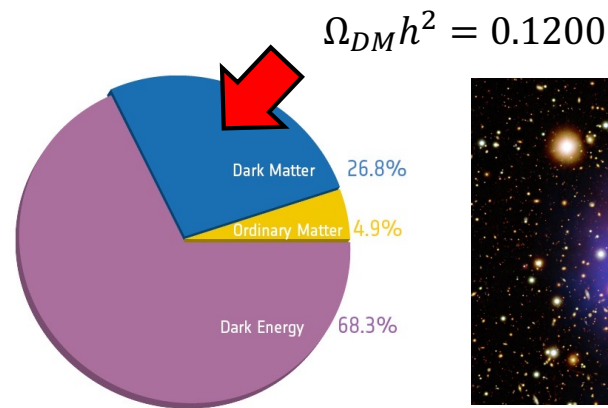
## 3. 暗黒物質

様々な観測・実験により、存在の証拠は多数ある。

- 安定(もしくは宇宙年齢より長寿命)
- 電気的中性
- 我々の物質や暗黒物質自身と弱く相互作用
- 冷たい(非相対論的)



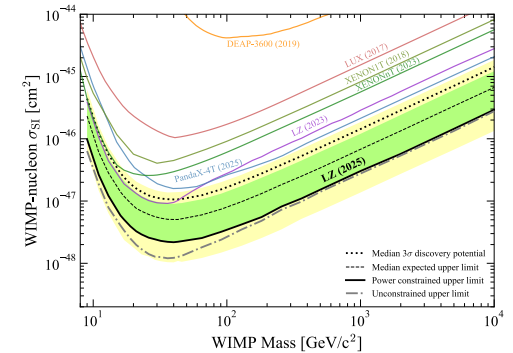
銀河の回転曲線



CMB観測



弾丸銀河団



直接探索による制限

# 余剰次元理論とは？

素粒子論の未解決問題を解決するアプローチとして…

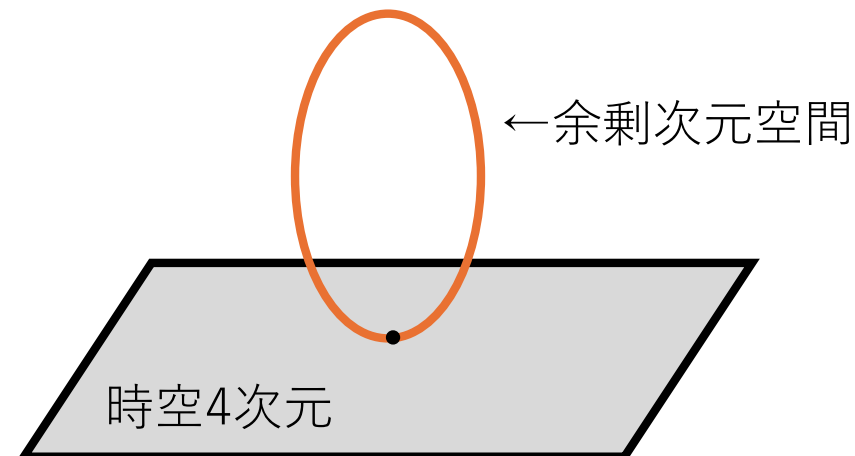
## 余剰次元

我々の住んでいる世界に加えて、  
とても小さい空間（余剰次元空間）が  
存在すると仮定する理論



カルツァ

～イメージ～



# 余剰次元理論のメリット😊

- **重力と電磁気を幾何的に統一**  
計量の一部を電磁場と捉える

[T. Kaluza (1921); O. Klein (1926)]



$$g_{MN} \rightarrow \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & g_{\mu 5} \\ g_{5\nu} & g_{55} \end{pmatrix} \leftarrow \text{電磁場 } A_\mu \text{ とみなす}$$

- **階層性問題の解決に繋がる**  
Higgsの質量は“有限の”余剰次元空間の長さに関連

[H. Hatanaka, T. Inami, C. S. Lim (1998)]

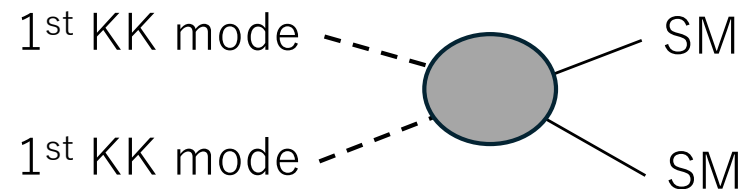


$$\delta m_H^2 \propto \frac{1}{L^2} \leftarrow \text{有限の長さから、質量の量子補正の発散なし}$$

- **未知のKK粒子 = 暗黒物質**  
最も軽いKK粒子はDMになれる

[G. Servant, T. M. Tait (2003)]

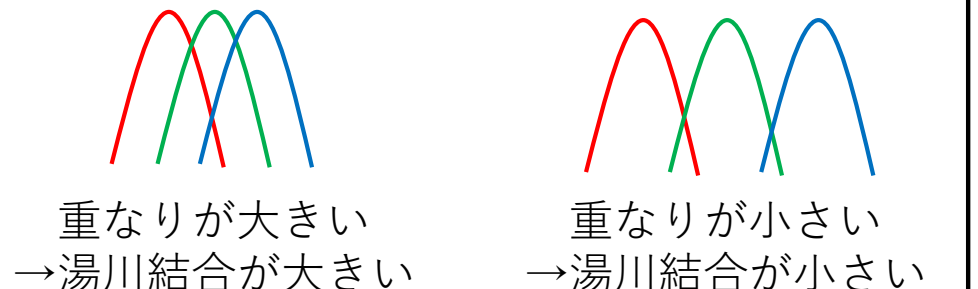
[H. C. Cheng, J. L. Feng, K. T. Matchev (2002)]



- **フレーバー問題にも適用可能**  
湯川結合を余剰次元方向の波動関数の重なり積分で表現

[N. Arkani-Hamed, M. Schmaltz (2000)]

[D. Cremades, L. E. Ibanez, F. Marchesano (2002)]



フレーバー問題は大塚さんの方が圧倒的に詳しいです

# 余剰次元理論のデメリット 🙄

- **余剰次元空間、見つからない**  
余剰次元空間の長さの上限は後述

- **謎の場が増える**  
KK粒子、モジュライ場??

- **余剰次元空間は安定か？**  
空間のサイズを安定化する必要性  
(モジュライ固定)

- **非くりこみ可能な理論**  
基本的にはあるスケール以下の有効理論として扱う

$$\begin{aligned} e^{5D}(x^\mu, y) & \leftarrow 5次元の電子 \\ &= e_\mu^{(0)}(x^\mu) f^{(0)}(y) \leftarrow 4次元の電子 \\ &+ e_\mu^{(1)}(x^\mu) f^{(1)}(y) \leftarrow 暗黒物質? \\ &+ \dots \leftarrow 無限に現れる?? \end{aligned}$$

$$g_{MN} \rightarrow \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & g_{\mu 5} \\ g_{5\nu} & g_{55} \end{pmatrix} \leftarrow \text{何者?? (ラディオオン)}$$

非摂動効果を取り込んでモジュライ固定  
(KKLTモデル)

$$W = W_0 + Ae^{-aT}$$

[S. Kachru, R. Kallosh, A. D. Linde, S. P. Trivedi (2003)]

非自明なUV固定点があれば、UV発散が  
なくて問題ないかも？(漸近的安全性)

[A. Pastor-Gutierrez, M. Yamada (2023)]

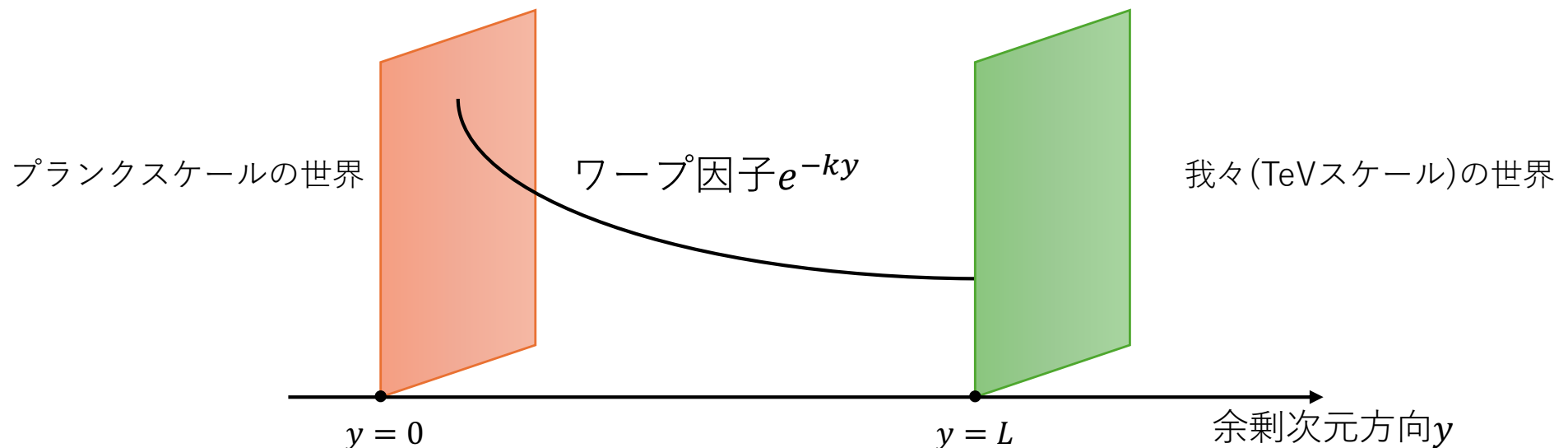
# 余剰次元理論の種類

## ① Large Extra Dimension [N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. R. Dvali (1998)]

- プランク長 $10^{-35}$  mより長い余剰次元のサイズ $L$ を持つ
- 4次元プランク質量と $(D+4)$ 次元プランク質量の関係から、  
 $D = 1$ で $L = 10^{13}$  cm、 $D = 2$ で $L = 10^{-1}$  mm

## ② Randall-Sundrum model [L. Randall, R. Sundrum (1999)]

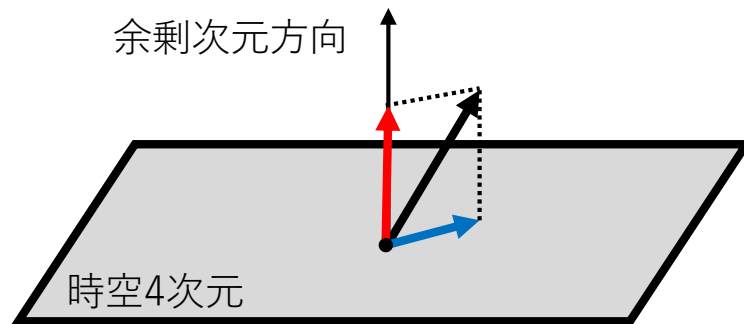
- 5次元空間の両極端に2つの世界(ブレーン)があり、  
それをワープ因子で繋ぐと考える理論



# 余剰次元理論の種類

## ③ Gauge-Higgs Unification [N. S. Manton (1979), Y. Hosotani (1983)]

- 5次元目のゲージ場 $A_5$ を4次元ヒッグス場と考える



5次元ゲージ場 $A_M = (A_\mu, A_5)$

5次元方向のみのゲージ場 = **ヒッグス場**

4次元方向のみのゲージ場 = **4次元ゲージ場**

## ④ Dark Dimension(s) [M. Montero, C. Vafa, I. Valenzuela (2023); L. A. Anchordoqui, I. Antoniadis, D. Lust (2025)]

- 2022年に提唱されたLarge Extra Dimensionの亜種
- Swampland予想から、1つの余剰次元のみ $0.1 - 10 \mu\text{m}$ を预言

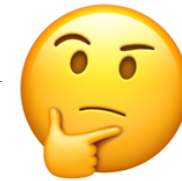
## ⑤ Universal Extra Dimension [T. Appelquist, H. C. Cheng, B. A. Dobrescu (2001)]

- 標準理論を単純に5次元以上に拡張したモデル
- 階層性問題を解決しない
- 興味深い例としてSU(5) GUT orbifoldがある [Y. Kawamura (2001)]

津村さんとのチャットにてDimensional Deconstructionなるものを知るが割愛

# 余剰次元の長さの制限

余剰次元の長さ $L$ に制限はある？



考慮すべき点(主にLarge Extra Dimension)

1. プランク長 $10^{-35}\text{m}$ より長い(重力理論より高エネルギーではない)
2. LHC加速器実験の制限(余剰次元が発見されていない) [ATLAS collaboration (2021)]
3. 天体物理学的な制限(超新星爆発、中性子星) [S. Hannestad, G. G. Raffelt (2003)]
4. ねじれ秤りによる万有引力の逆二乗則のズレによる制限

[J. G. Lee et.al (2020)]

現在の制限

赤:最も厳しい制限  
青: 2025年4月に修正された制限

| Dimension $D$                                      | 1                    | 2                    | 3                    | 4                    | 5                    | 6                    |
|----------------------------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| torsion balance [ $\mu\text{m}$ ]                  | 30                   | 23                   | 22                   | 22                   | 19                   | 17                   |
| neutron star (excecc heat) [ $\mu\text{m}$ ]       | $8.3 \times 10^6$    | $5.9 \times 10^{-2}$ | $1.3 \times 10^{-4}$ | $5.9 \times 10^{-6}$ | $9.4 \times 10^{-7}$ | $2.8 \times 10^{-7}$ |
| neutron star ( $\gamma$ sources) [ $\mu\text{m}$ ] | $3.9 \times 10^2$    | $3.8 \times 10^{-4}$ | $4.2 \times 10^{-6}$ | $4.7 \times 10^{-7}$ | $1.3 \times 10^{-7}$ | $5.4 \times 10^{-8}$ |
| LHC [ $\mu\text{m}$ ]                              | $5.3 \times 10^{14}$ | 3.8                  | $9.9 \times 10^{-5}$ | $5.0 \times 10^{-7}$ | $2.1 \times 10^{-8}$ | $2.4 \times 10^{-9}$ |

# 最近やった余剰次元理論関連の研究

## 1. 磁場入りトーラス方向のゲージ場＝NGボソン [TH, H. Otsuka, K. Tsumura, Y. Uchida (2024)]

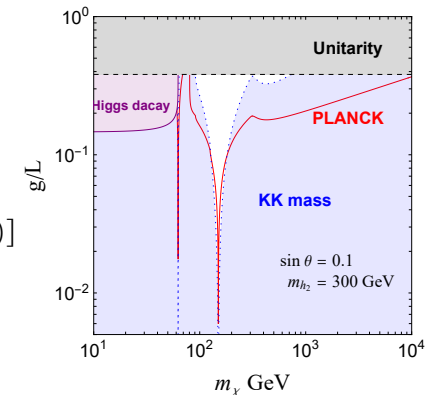
- masslessの $A_{5,6}$ 場の数は、背景磁場の行列のランクで分かる:

$$n_{\text{NG}} = \text{rank}\langle F \rangle$$

- オービフォルドの固定点でpNGボソン→Higgs? [T. Kobayashi, H. Otsuka, H. Uchida (2026)]

## 2. 背景磁場を含む6次元理論でpseudo NG DM [K. Akamatsu, TH, N. Maru, A. Nago (2026)]

- 余剰次元方向のゲージ場＝pNG DMと考える
- 薄い青色: 1<sup>st</sup> KK mode＝DMとなってしまう領域



## 3. 2HDM in 6D SU(4) GHU [K. Akamatsu, TH, N. Maru, A. Nago (2026)]

- ゲージ場 $A_{5,6}$ =Higgs doublet×2個と考える
- ブレーン局在項を入れてHiggsの質量を再現
- 荷電Higgsの制限から、Type-I, Type-X 2HDMの可能性

[T. Abe, M. Kakizaki, S. Suzuki, K. Tsumura (2021), unpublished?]

# 後半：余剰次元とインフレーション

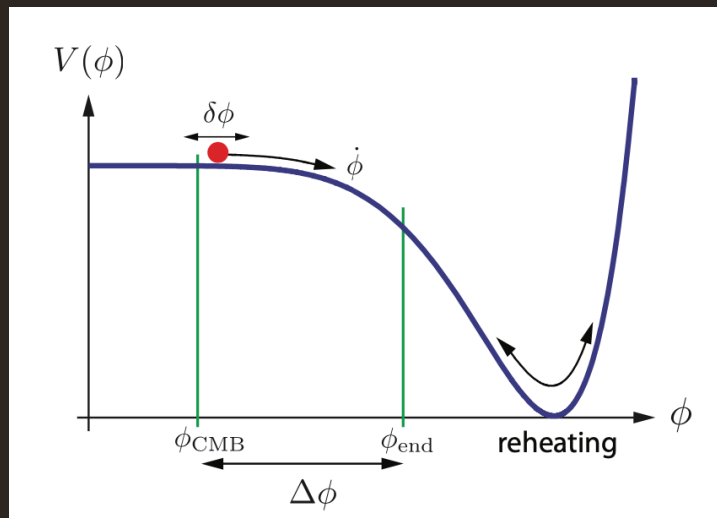
# 1. インフレーションの基礎

インフレーションはビッグバン理論の謎を解決する!

- 地平線問題:  
急激な膨張により因果関係が保てる
- 平坦性問題:  
急激な膨張により曲率が平坦化する

スローロール  
インフレーション

インフレーションを引き起こすにはインフラトン場 $\phi$ が必要



Baumann, TASI lecture (2009)

Slow-roll parameters

$$\epsilon_V = \frac{M_{pl}^2}{2} \left( \frac{V_\phi}{V} \right)^2$$

$$\eta_V = M_{pl}^2 \frac{V_{\phi\phi}}{V}$$

↑  
ポテンシャルがどれだけ平坦かを表すパラメータ

# 1. インフレーションの基礎

インフラトンポテンシャルの情報は次の $n_s, r$ に読み換えれる

- スペクトル指数:  $n_s$

スカラー摂動の2点相関関数のパワースペクトルの指数

(空間計量の)

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \propto k^{n_s-1}, \quad n_s = 1 - 6\epsilon_V + 2\eta_V$$

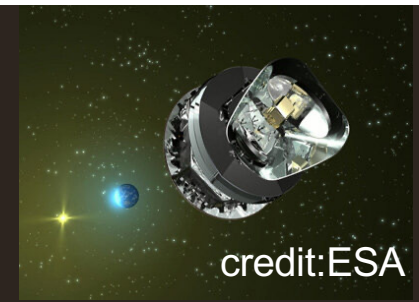
- テンソル-スカラー比:  $r$

テンソル、スカラー摂動のパワースペクトルの比

$$r = \frac{\mathcal{P}_h}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} = 16\epsilon_V$$

↙ テンソル摂動のパワースペクトル  
↘ スカラー摂動のパワースペクトル

# 1. インフレーションの基礎



$n_s$ と $r$ はCMBの観測で制限されている！！

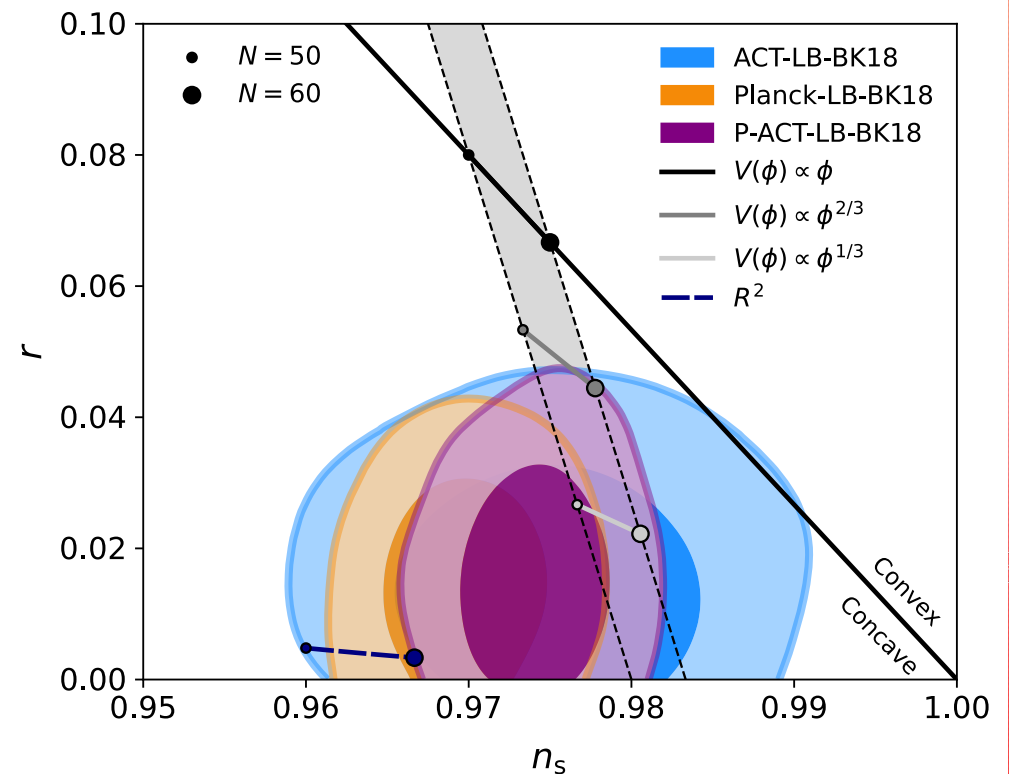
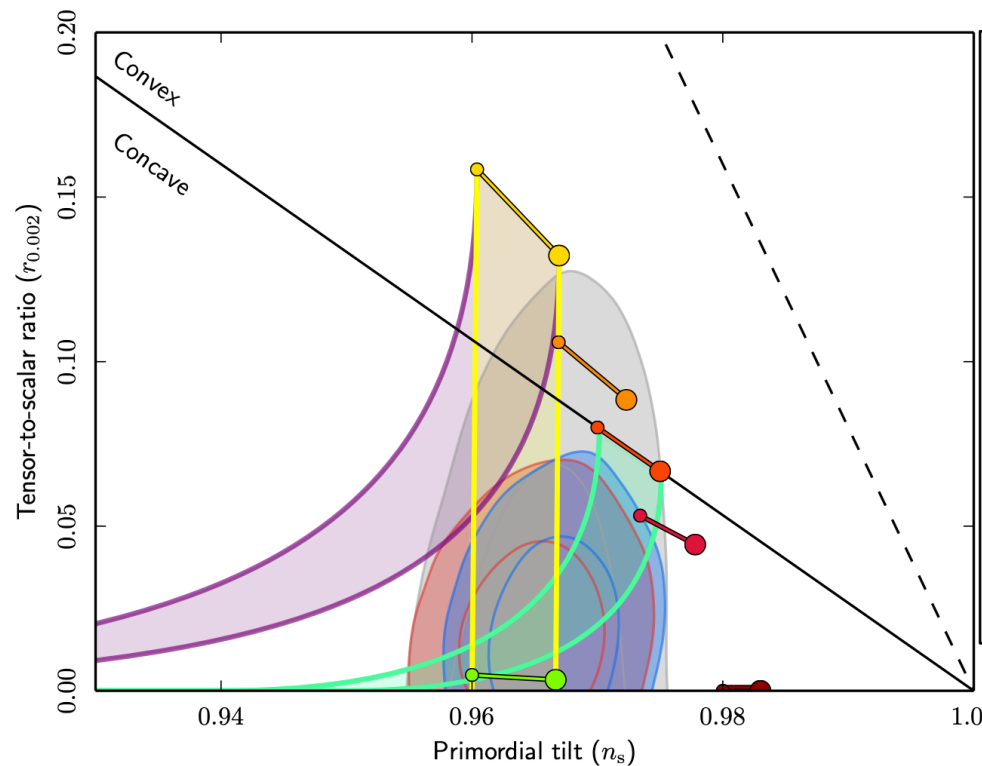
Planck 2018

$$n_s = 0.9649 \pm 0.0042$$

$$r < 0.10$$

ACT DR6 (Mar. 2025)

$$n_s = 0.9743 \pm 0.0034$$



## 2. Higher-dim uniform inflation

ある理論が余剰次元を持つなら、  
インフレーション期にその余剰次元も  
膨張するのでは？



前川さん(名大) 「膨張しなくてもいいんじゃないかなあ」  
難波さん(静岡大)「同じようなこと考えたことある～」

### 先行研究

- L. A. Anchordoqui, I. Antoniadis (2023)  
Large extra dimensions from higher-dimensional inflation  
➡ 本来の研究のモチベーションは**Dark Dimension**
- I. Antoniadis, J. Cunat, A. Guillen (2023)  
Cosmological perturbations from five-dimensional inflation

## 2. Higher-dim uniform inflation

- L. A. Anchordoqui, I. Antoniadis (2023)

FRW計量 with 余剰次元空間

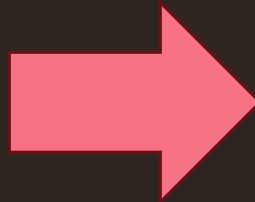
$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\vec{x}_3^2 + b(t)^2 dy^2$$

$a(t)$ : 3Dスケール因子

$b(t)$ : 余剰次元空間のスケール因子

$a(t)$  と  $b(t)$  の膨張率は同じ

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\dot{b}}{b}$$



**Higher-dimensional  
uniform inflation**

※ 異なる膨張率も過去に研究されている [N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos et.al (2000)]

## 2. Higher-dim uniform inflation

- I. Antoniadis, J. Cunnat, A. Guillen (2023)  
5D uniform inflationにおける宇宙論的摂動論

$$ds^2 = a(t)^2 \left\{ - (1 + 2\Phi) d\tau^2 + \left( \underbrace{(1 + 2\mathcal{R})\delta_{ij}}_{\text{スカラー摂動}} + \underbrace{2h_{ij}}_{\text{テンソル摂動}} \right) dx^i dx^j + \underbrace{(b_0^2 - \Xi) dy^2}_{\text{余剰次元方向のスカラー摂動}} \right\}$$

$b_0$ : 余剰次元空間の膨張前の半径

スペクトル指数とテンソル・スカラー比は...

$$n_s = 1 - 7\epsilon_V + 2\eta_V, \quad r = 24\epsilon_V$$

$n_s$  と  $r$  がわずかに異なる!!

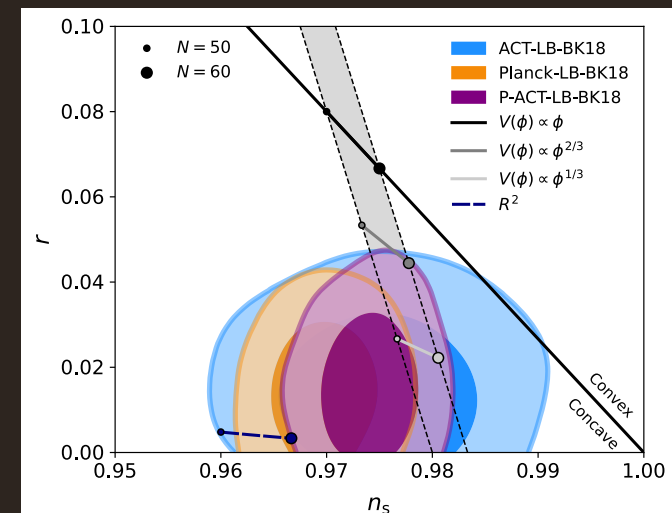
※ cf.  $n_s = 1 - 6\epsilon_V + 2\eta_V$ ,  $r = 16\epsilon_V$  (4次元時空の場合)

## 2. Higher-dim uniform inflation

### 今回の研究

1. 5D uniform inflationを  $D + 4$ 次元に拡張  
余剰次元空間:  $S^1 \times S^1 \times \dots S^1$
2. スペクトル指数とテンソル・スカラー比の一般式を導出
3. 5つのインフレーションモデルを再解析  
これらの  $n_s, r$  と Planck-2018 ACTの結果を比較

- Chaotic inflation
- Natural inflation
- Quartic hilltop inflation
- Spontaneously broken SUSY model
- $R^2$  inflation (Starobinsky inflation)



### 3. 今回の研究 (拡張)

#### セットアップ

- 余剰次元空間:  $S^1 \times S^1 \times \dots S^1$  (全方向の初期半径:  $b_0$ )
- $a(t)$  と  $b(t)$  の膨張率は同じ

$$a(t) = e^{Ht}, \quad b(t) = b_0 e^{Ht}, \quad H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\dot{b}}{b}$$

- 計量:  $ds^2 = a^2(\tau) \left( -d\tau^2 + d\vec{x}_3^2 + b_0^2 d\vec{y}_D^2 \right)$
- フリードマン方程式 [N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, et.al (2000)]

$$\frac{(D+2)(D+3)}{2} \mathcal{H}^2 = \frac{a^2(\tau)\rho}{M_{pl}^2}, \quad (D+2) \left( \mathcal{H}' + \frac{D+1}{2} \mathcal{H}^2 \right) = -\frac{a^2(\tau)p}{M_{pl}^2}$$

$\tau$ : 共形時間

$\mathcal{H}$ : 共形ハッブルパラメータ

### 3. 今回の研究 (拡張)

インフレーションのパラメータ (インフラトン場 =  $\phi$ )

- Slow-roll parameters

$$\epsilon_V = \frac{D+2}{4} M_{pl}^2 \left( \frac{V_\phi}{V} \right)^2, \quad \eta_V = \frac{D+2}{2} M_{pl}^2 \frac{V_{\phi\phi}}{V}$$

- e-folds

$$N_* = \ln \frac{a_{\text{end}}}{a} = \frac{2}{(D+2)M_{pl}^2} \int_{\phi_{\text{end}}}^{\phi_*} \frac{V}{V_\phi} d\phi$$

$\phi_*$ : CMB観測による場の値

典型的な範囲  $N_*: 50 \leq N_* \leq 70$

### 3. 今回の研究 (拡張)

アインシュタイン方程式

$M, N \dots$  時空添字  $\mu, \nu$ ,  
余剰次元空間の添字  $m, n$

$$R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R = \frac{1}{M_{pl}^2} T_{MN}$$

から、 $\Phi, \mathcal{R}, h_{ij}, E$  について方程式を書き下す...

- 00成分
- 0*i*成分
- 0*m*成分
- *ii*成分
- *ij*成分 ( $i \neq j$ )
- *im*成分
- *mm*成分
- *mn*成分 ( $m \neq n$ )

特に $\mathcal{R}, h_{ij}$ について注目すると...

スカラー、テンソル摂動を導出できる！



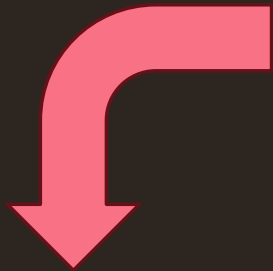
### 3. 今回の研究 (導出)



スカラー、テンソル摂動から  
 $n_s$  と  $r$  が導出

#### ■ パワースペクトル

とても辛い計算の後...



スカラー:  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \sum_{\vec{n}} |\mathcal{R}_{k,n}|^2$

テンソル:  $\mathcal{P}_h(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{2 \cdot 4}{M_{pl}^2} \sum_{\vec{n}} |h_{ij}|^2,$

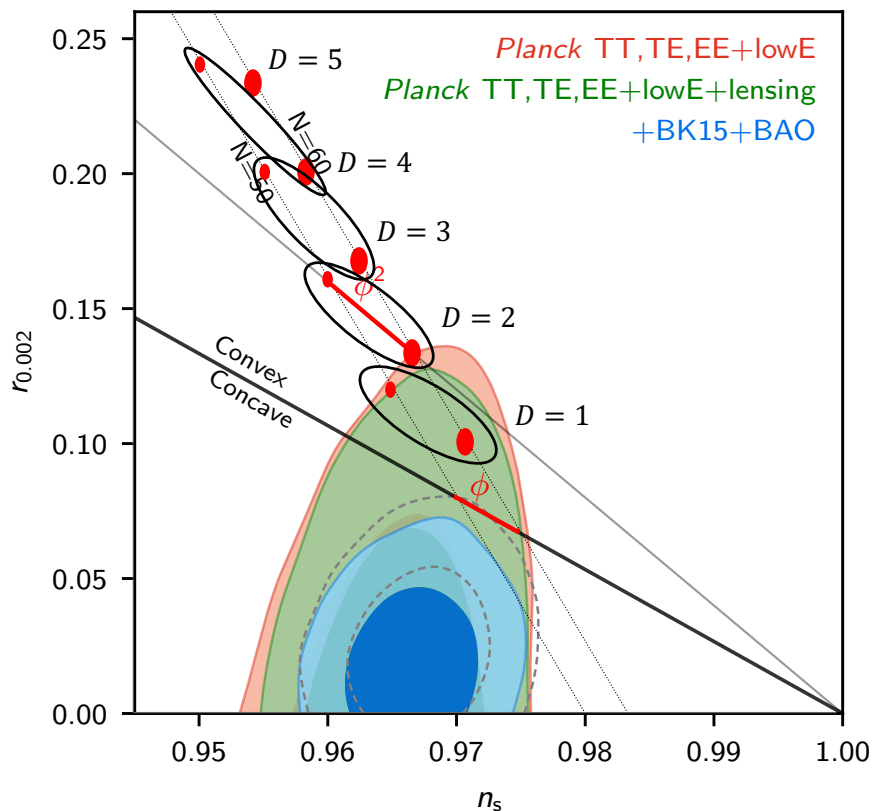
$$n_s = 1 - (D + 6)\epsilon_V + 2\eta_V, \quad r = 8(D + 2)\epsilon_V \quad (b_0 k \gg 1)$$

# 3. 今回の研究 (比較)

## 1. Chaotic inflation [A. D. Linde (1983)]

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{n} \phi^n \quad (\lambda: \text{あるcoupling})$$

$$n = 1$$



- $n = 2$  かつ  $D = 1$  のとき,  
 $n_s = 0.9505, r = 0.24$  ( $N_* = 50$ )  
 $n_s = 0.9587, r = 0.20$  ( $N_* = 60$ )

➡  $n \geq 2$  かつ  $D \geq 1$  は排除 !

- 可能性:  $n \leq 1, D \geq 1$

➡  $n = 1$  かつ  $D \geq 2$  は排除 !

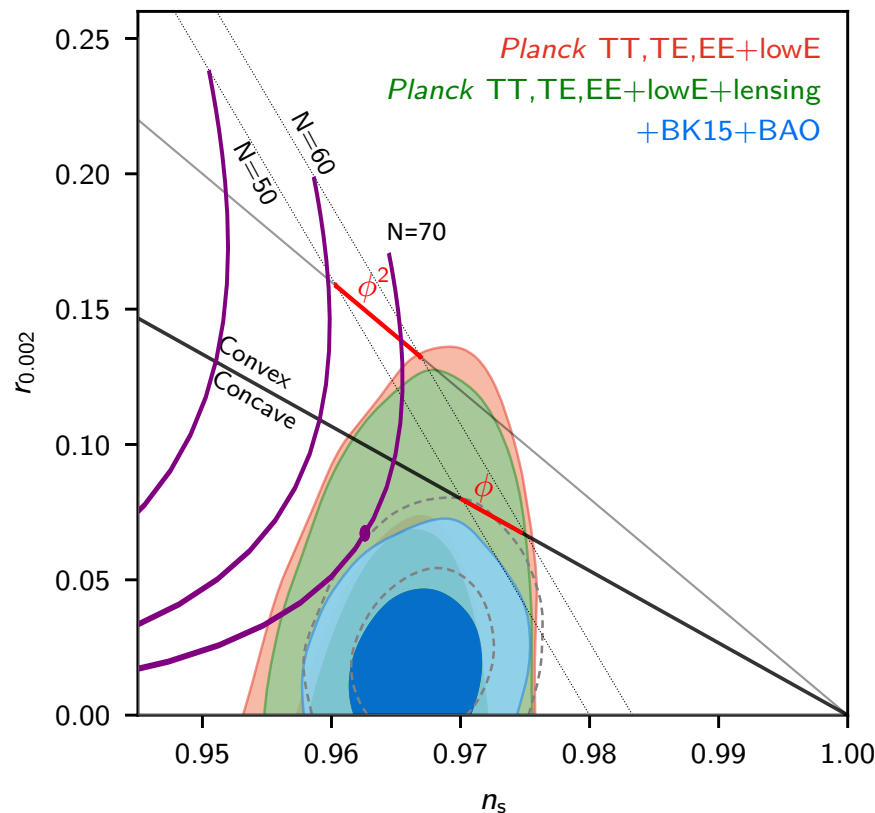
- $n = 1$  かつ  $D = 1$  のとき,  
 $n_s = 0.9652, r = 0.12$  ( $N_* = 50$ )  
 $n_s = 0.9710, r = 0.10$  ( $N_* = 60$ )

### 3. 今回の研究 (比較)

#### 2. Natural inflation [K. Freese, J. A. Frieman, A. V. Olinto (1990)]

$$V(\phi) = V_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{\phi}{f} \right) \right) \quad (f: \text{あるスケール})$$

$$D = 1$$



- $D \geq 2$  のとき, 許される領域に紫の線はなし



$D \geq 1$  かつ  $N_* \leq 60$  は排除 !

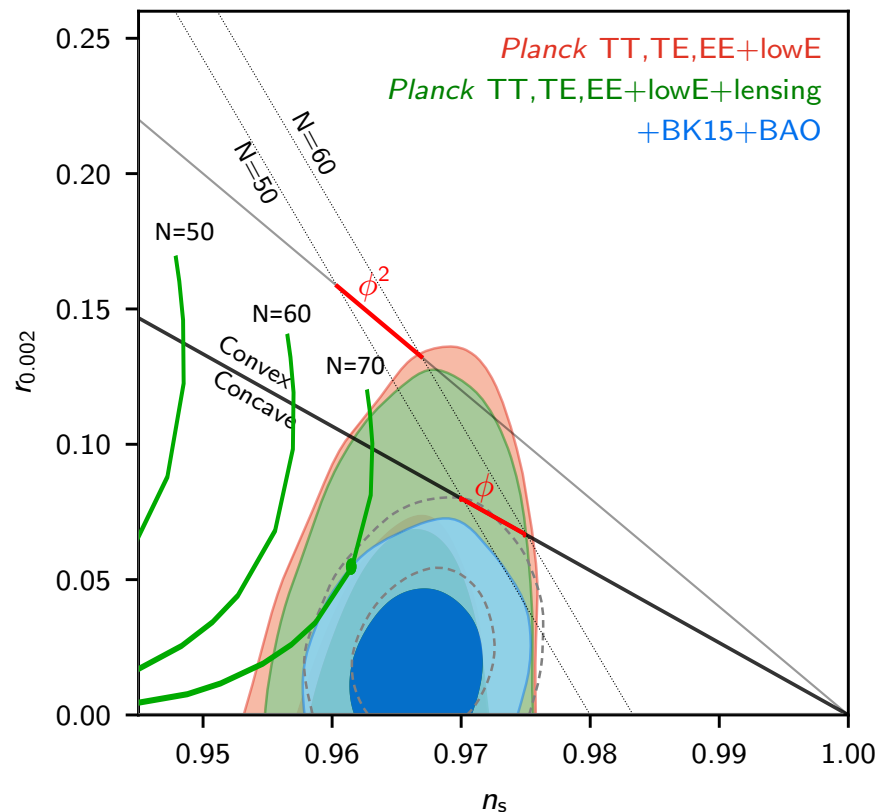
- $D = 1$  かつ  $N_* = 70$  のみ  
許される領域に入っている
- $D = 1$  かつ  $f = 8M_{pl}$  のとき,  
 $n_s = 0.9627, r = 0.067$  ( $N_* = 70$ )

# 3. 今回の研究 (比較)

## 3. Quartic hilltop inflation [A. D. Linde (1982), K. Dimopoulos (2020)]

$$V(\phi) = V_0 \left( 1 - \lambda \frac{\phi^4}{M_{pl}^4} \right) \quad (\lambda: \text{あるcoupling})$$

$$D = 1$$



- $D \geq 2$  のとき, 許される領域に  
緑の線はなし



$D \geq 1$  かつ  $N_* \leq 60$  は排除 !

- $D = 1$  かつ  $N_* = 70$  のみ  
許される領域に入っている
- $D = 1$  かつ  $\lambda = 10^{-6}$  のとき,  
 $n_s = 0.9616, r = 0.054$  ( $N_* = 70$ )

### 3. 今回の研究 (比較)

#### 4. Spontaneously broken SUSY model

[G. R. Dvali, Q. Shafi,  
R. K. Schaefer (1994)]

$$V(\phi) = V_0 \left( 1 + \alpha_h \ln \frac{\phi}{M_{pl}} \right) \quad (\alpha_h: \text{あるパラメータ})$$

- このモデルの特徴:  $r$ が非常に小さい値を预言
- しかし、 $n_s$  が大きすぎてCMBの観測結果より棄却...
- 次元の影響に関わらず、次の値を取る

$$\begin{aligned} n_s &\approx 0.980 \quad (N_* = 50) \\ n_s &\approx 0.983 \quad (N_* = 60) \end{aligned} \quad (\alpha_h \leq 10^{-1})$$

 The spontaneously broken SUSY model は生き返らず

### 3. 今回の研究 (比較)

#### 5. $R^2$ inflation (Starobinsky inflation) [A. A. Starobinsky (1980)]

- $D + 4$  次元  $R^2$  インフレーションのポテンシャル

[S. P. Otero, F. G. Pedro, C. Wieck (2017)]

$$V(\phi) = V_0 \exp \left[ \frac{D}{\sqrt{(D+2)(D+3)}} \frac{\phi}{M_{pl}} \right] \left( 1 - \exp \left[ -\sqrt{\frac{D+2}{D+3}} \frac{\phi}{M_{pl}} \right] \right)^2$$

- $D > 0$  かつ  $\phi/M_{pl} \rightarrow \infty$  のとき,

$$n_s \rightarrow 1 - \frac{D^2(D+2)}{4(D+3)}, \quad r \rightarrow \frac{2D^2(D+2)}{D+3}$$



余剰次元空間が膨張する  $R^2$  inflation は排除される！

## 4. まとめ(インフレーション)

- Higher-dimensional uniform inflationを考えた

余剰次元空間:  $S^1 \times S^1 \times \dots S^1$

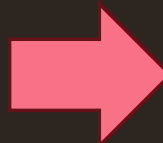
- $n_s$  と  $r$  の一般公式

$$n_s = 1 - (D + 6)\epsilon_V + 2\eta_V, \quad r = 8(D + 2)\epsilon_V \quad (b_0 k \gg 1)$$

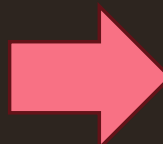
- 5つのインフレーションモデルを再解析

これらの $n_s, r$ とPlanck 2018 ACTの結果を比較

- Chaotic inflation
- Natural inflation
- Quartic hilltop inflation
- SSB SUSY model
- $R^n$  inflation



余剰次元空間の膨張は  
CMB観測的に好まれない！



特殊な場合のみ可能性あり！

# 4. Discussion

- 余剰次元空間の膨張はACTの結果より好まれない

- 3次元非コンパクト空間のみが膨張, 余剰次元空間は膨張しない方が良い

- 異なる膨張率をもう一度再検討? [N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos et.al. (2000)]

津村さん「異なる膨張率の場合ってどうなるの？」  
今の僕「結構、非自明かも？」

- 余剰1次元空間の膨張のみ許される可能性

- Dark Dimension proposalの示唆、あるいはSwamplandと関係?

- 再加熱温度の議論を高次元に拡張 [L. A. Anchordoqui, I. Antoniadis, J. Cunnat (2026)]

- 他のインフレーションモデル

- Extra-natural inflation [N. Arkani-hamed, H. C. Cheng, P. Creminelli, L. Randall (2003)]

- Fibre inflation [M. Cicoli, C. P. Burgess, F. Quevedo (2009)]

Fibre inflation面白いですよ！ by甲斐くん

- Radion stabilizationを含めた解析 [L. A. Anchordoqui, I. Antoniadis (2023)]

高次元宇宙論のダイナミクスを真面目にやっていくべき by山田さん(IBS)

## 4. まとめ(素粒子と余剰次元)

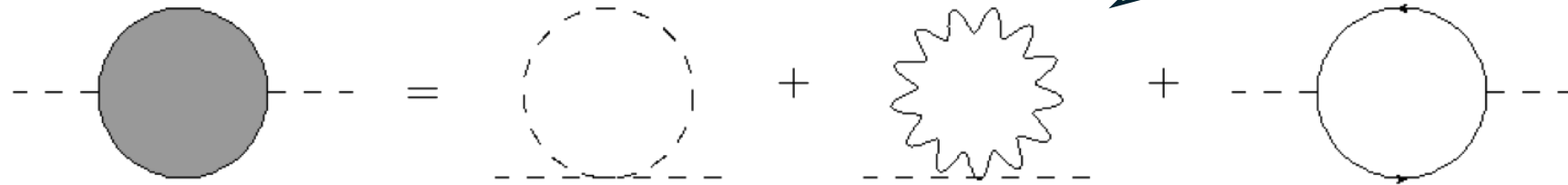
- 余剰次元理論…3次元空間と別に小さい空間があると考える理論
- 余剰次元理論は主に5つ
  - ① Large Extra Dimension
  - ② Randall-Sundrum model
  - ③ Gauge-Higgs Unification
  - ④ Dark Dimension
  - ⑤ Universal Extra Dimension
- 余剰次元の長さの制限

| Dimension $D$                                      | 1                    | 2                    | 3                    | 4                    | 5                    | 6                    |
|----------------------------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| torsion balance [ $\mu\text{m}$ ]                  | 30                   | 23                   | 22                   | 22                   | 19                   | 17                   |
| neutron star (excecc heat) [ $\mu\text{m}$ ]       | $8.3 \times 10^6$    | $5.9 \times 10^{-2}$ | $1.3 \times 10^{-4}$ | $5.9 \times 10^{-6}$ | $9.4 \times 10^{-7}$ | $2.8 \times 10^{-7}$ |
| neutron star ( $\gamma$ sources) [ $\mu\text{m}$ ] | $3.9 \times 10^2$    | $3.8 \times 10^{-4}$ | $4.2 \times 10^{-6}$ | $4.7 \times 10^{-7}$ | $1.3 \times 10^{-7}$ | $5.4 \times 10^{-8}$ |
| LHC [ $\mu\text{m}$ ]                              | $5.3 \times 10^{14}$ | 3.8                  | $9.9 \times 10^{-5}$ | $5.0 \times 10^{-7}$ | $2.1 \times 10^{-8}$ | $2.4 \times 10^{-9}$ |

# Appendix

# 階層性問題とは？ ～より深く～

階層性問題とは



Feynman図と呼ばれる  
量子補正を図的に表す絵

- ヒッグス粒子の質量補正が新物理スケール $\Lambda$ の2乗に比例（2次発散）し、観測値の125 GeVより大きくなる問題

$$\delta m_H^2 \propto \Lambda^2$$

- 上記を認めて、質量補正の絶妙な相殺が起きていると考えたと、とんでもなく不自然なパラメーター調整が必要（微調整問題）
- 階層性問題はスカラー場に特有の問題
  - フェルミオン・・・カイラル対称性
  - ゲージ場・・・ゲージ対称性
  - スカラー場・・・ ???

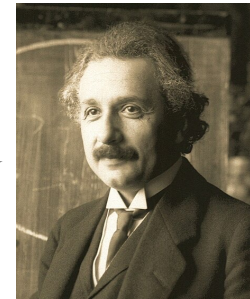
# 余剰次元理論における質量補正

余剰次元の長さ： $L$ (有限の長さ)

ある粒子の質量(の量子補正) $\delta m$ について、余剰次元の長さにどのように関係するか？

①

$$E = mc^2 \text{ より} \\ (\text{エネルギー}) = (\text{質量}) \text{ じゃ}$$



アインシュタイン

②波の基本公式 $c = v\lambda \rightarrow \omega = ck$ より(振動数)=(長さ) $^{-1}$

③光子のエネルギー $E = \hbar\omega$ より(エネルギー)=(振動数)

①～③から、

$$\delta m_H^2 \propto \frac{1}{L^2}$$

※自然単位系  $c = 1, \hbar = 1$

# ゲージヒッグス統一理論

余剰次元があると、ゲージ場(電場、磁場)が余分に増える…

4次元：ゲージ場  $A_\mu(x)$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ )

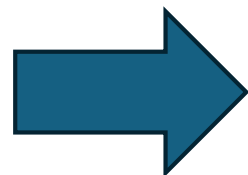
↑      ↓  
時間成分      空間成分

5次元：ゲージ場  $A_\mu(x, y), A_5(x, y)$  ( $y$ ：5次元目の座標)



マントン

この5次元目のゲージ場 $A_5$ を  
ヒッグス場と思えばええんちゃう？



**ゲージヒッグス統一理論**

# ゲージヒッグス統一理論

ゲージ場の余剰次元成分をヒッグス場だと思う発想

ex)  $S^1/Z_2$   $SU(3)$ ゲージヒッグス統一理論

$$A_\mu^a t^a = \begin{pmatrix} W_\mu^3 + \frac{B_\mu}{\sqrt{3}} & \sqrt{2}W_\mu^+ & 0 \\ \sqrt{2}W_\mu^- & -W_\mu^3 + \frac{B_\mu}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}}B_\mu \end{pmatrix},$$

$$A_5^a t^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{H^+} \\ 0 & 0 & \boxed{H^0} \\ \boxed{H^-} & \boxed{H^{0*}} & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{Higgs doublet} \\ \leftarrow \end{matrix}$$

- コンパクト空間から離散的な運動量が出てくる(KKモード)
- そこからフーリエ級数展開可能

$$A_M^{(+,+)}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \left[ A_M^{(0)}(x) + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_M^{(n)}(x) \cos(ny/R) \right]$$

# ゲージヒッグス統一理論

- 細谷機構：Wilson lineの位相が期待値を持つことでゲージ対称性が破れる機構

$$W = P \exp \left[ -ig \int_0^{2\pi R} dy \langle A_5 \rangle \right]$$

1ループ有効ポテンシャルが有限に計算でき、  
高次元ゲージ場の質量補正が有限に得られる

ex) S1 case [H. Hatanaka, T. Inami, C. S. Lim, 1998]

$$m_H^2 = \frac{9e_4^2}{16\pi^4 R^2} \zeta(3)$$

# Appendix: pNG Dark Matter

Set up

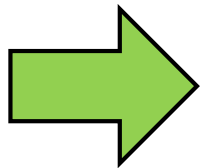
- 6D scalar QED with magnetized torus

explicitly shift-breaking term

$$\mathcal{L}_6 \supset -\frac{1}{4}F_{MN}F^{MN} - |D_M H|^2 - V(\phi, H)$$

$$V(\phi, H) = -\frac{m_H^2}{2}|H|^2 + L^2 \frac{\lambda_H}{2}|H|^4 - \underbrace{\frac{m_\phi^2}{2}|\phi|^2 + L^2 \frac{\lambda_\phi}{2}|\phi|^4}_{\text{Unknown origin}\cdots}$$

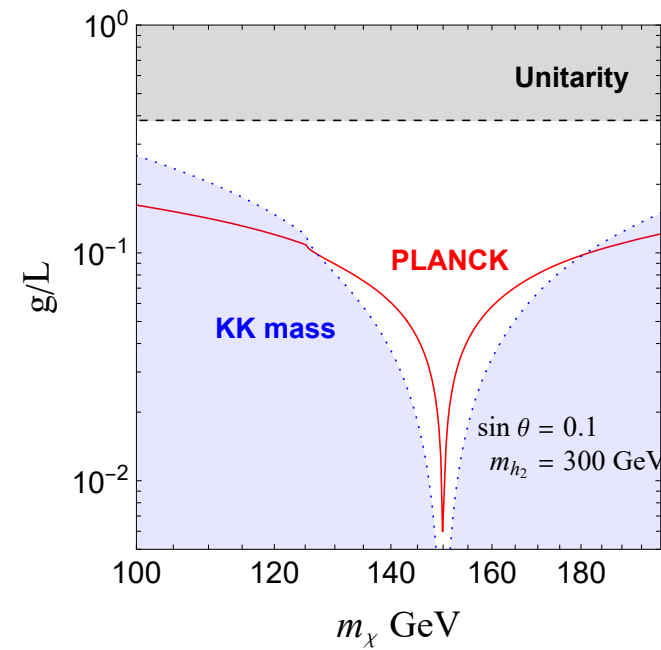
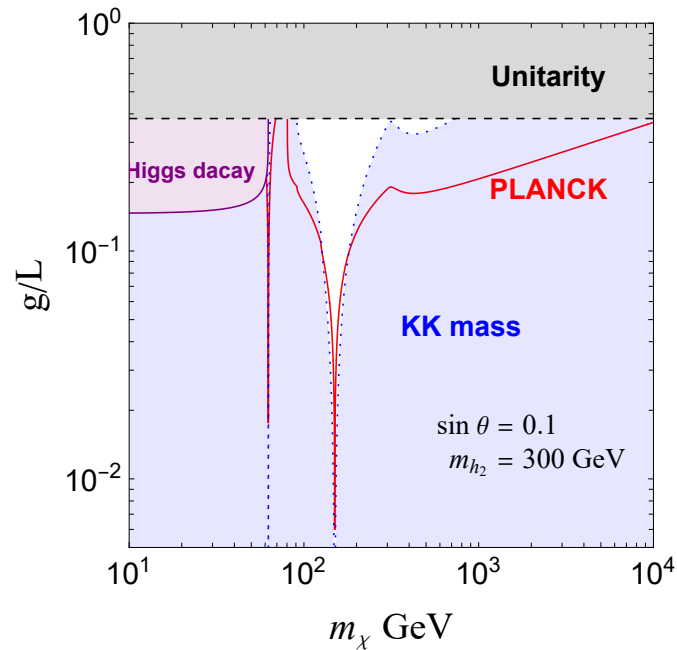
- $\phi, H \rightarrow s, h$  (diagonalization)
- Imaginary part of  $\phi$ :  $\chi \cdots$  pseudo NG dark matter



**WL scalar = pNG Dark Matter**

# Appendix: pNG Dark Matter

## Results



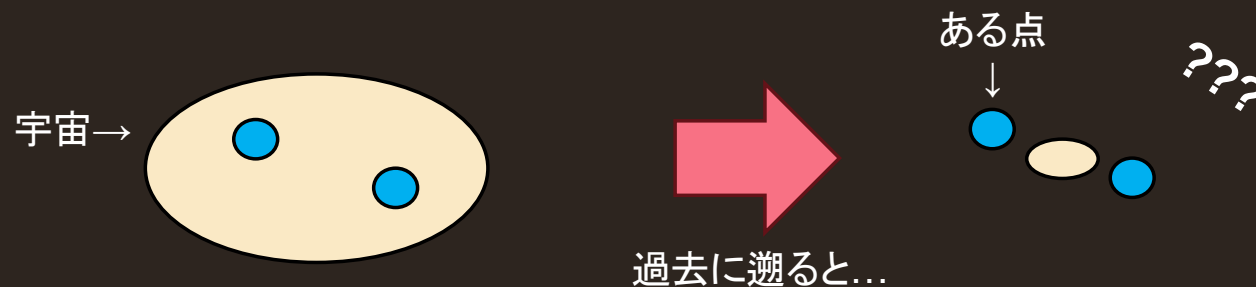
- Red line: density parameter by Planck  $\Omega_{DM} = 0.1200$
- Blue region: forbid decay channel  $\varphi \rightarrow H_{1,0}H_{0,0}$   
(1<sup>st</sup> KK modes are not stable DM)

# 1. インフレーションの基礎

## ビッグバン理論の問題点

- 地平線問題:

離れた距離にある2点がなぜ因果関係を持つのか？



- 平坦性問題:

なぜ宇宙初期に極めて高い精度で宇宙が空間的に平坦であるのか？

現在の曲率:  $|\Omega_K| = 0.0096$  [Planck collaboration (2018)]

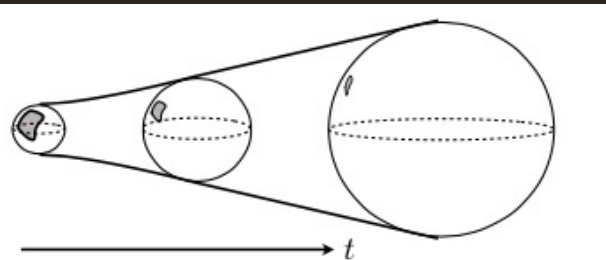
# 1. インフレーションの基礎

インフレーションがこの2つの問題を解決できる！！



宇宙の超初期に空間が急激に膨張する理論

- 地平線問題:  
急激な膨張により因果関係が保てる
- 平坦性問題:  
急激な膨張により曲率が平坦化する



[Koyama, doctoral dissertation]

# 1. インフレーションの基礎

どれくらい膨張すれば解決？



宇宙の膨張を表す計量 (ロバートソン・ウォーカー計量)

$$ds^2 = -dt^2 + \underline{a^2(t)} d\vec{x}^2$$

スケール因子: 宇宙の膨張具合を表すパラメータ

e-folds: インフレーション開始前後の膨張具合を表す指標

$$N_* = \ln \frac{a_f}{a_i} = \frac{1}{M_{pl}^2} \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{V}{V_\phi} d\phi \quad \leftarrow \phi \text{ と } V \text{ については次ページ}$$

諸々の理由により、 $50 < N_* < 60$ であれば解決できる！

# 1. インフレーションの基礎

スカラー摂動、テンソル摂動？

宇宙の膨張を表す計量(ロバートソン・ウォーカー計量)

$$ds^2 = -dt^2 + \underline{a^2(t)} d\vec{x}^2$$

スケール因子: 宇宙の膨張具合を表すパラメータ

空間部分にゆらぎがあると考ええると(宇宙論的摂動論)...

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(1 + 2\mathcal{R}\delta_{ij} + 2h_{ij})dx^i dx^j$$

$\mathcal{R}$  : (空間計量の)スカラー摂動

$h_{ij}$  : (空間計量の)テンソル摂動

# 1. インフレーションの基礎

簡単な例: カオティックインフレーション [A. D. Linde (1983)]

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{n} \phi^n \quad (\lambda: \text{あるcoupling})$$

- スローロールパラメータ

$$\epsilon_V = \frac{M_{pl}^2}{2} \left( \frac{V_\phi}{V} \right)^2 = \frac{n^2}{2} \left( \frac{M_{pl}}{\phi} \right)^2, \quad \eta_V = M_{pl}^2 \frac{V_{\phi\phi}}{V} = n(n-1) \left( \frac{M_{pl}}{\phi} \right)^2$$

- e-folds:  $N_* = \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{V}{V_\phi} d\phi = \frac{1}{2nM_{pl}^2} (\phi_i^2 - \phi_f^2)$

→  $\epsilon_V \sim 1$  で  $\phi_f$  を決める

- スペクトル指数とテンソル・スカラー比

$$n_s = 1 - 6\epsilon_V + 2\eta_V \simeq 1 - \frac{n+2}{2N_*}, \quad r = 16\epsilon_V = \frac{4n}{N_*}$$

$n = 2$  かつ  $N_* = 50$  だと  $(n_s, r) = (0.96, 0.16)$

$N_* = 60$  だと  $(n_s, r) = (0.9667, 0.13)$

### 3. 今回の研究 (拡張)

計量の摂動(宇宙論的摂動論)

$$ds^2 = a(t)^2 \left\{ - (1 + 2\Phi) d\tau^2 + \left( (1 + 2\mathcal{R}) \delta_{ij} + 2h_{ij} \right) dx^i dx^j \right. \\ \left. + (b_0^2 - 2\Xi) \eta_{mn} dy^m dy^n \right\}$$

摂動量にフーリエ変換を施すと、

$$A(\tau, x^i, y_D^m) = \int d^3k \sum_{\vec{n}} A_{k,n}(k, \tau) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}_3} e^{i\vec{n} \cdot \vec{y}_D}$$

Kaluza-Klein質量  $m_{k,n}^2$  を次のように定義

$$m_{k,n}^2 = k^2 + \frac{|\vec{n}|^2}{b_0^2}$$

### 3. 今回の研究 (拡張)

Kaluza-Klein展開 (半径 $R$ の $S^1$ を例に)

$$\text{周期境界条件: } \phi(x^\mu, y + 2\pi R) = \phi(x^\mu, y)$$

この条件からフーリエ級数展開が可能

$$\phi(x^\mu, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(x^\mu) e^{\frac{iny}{R}} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

さらにKlein-Gordon方程式から

$$(\partial_\mu \partial^\mu + \partial_y \partial^y) \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \left( \partial_\mu \partial^\mu - \frac{n^2}{R^2} \right) \phi_n = 0$$

Kaluza-Klein (KK)質量

### 3. 今回の研究 (拡張)

アインシュタイン方程式

$M, N \dots$  時空添字  $\mu, \nu$ ,  
余剰次元空間の添字  $m, n$

$$R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R = \frac{1}{M_{pl}^2} T_{MN}$$

から、 $\Phi, \mathcal{R}, h_{ij}, E$  について方程式を書き下す...

- 00成分
- 0*i*成分
- 0*m*成分
- *ii*成分
- *ij*成分 ( $i \neq j$ )
- *im*成分
- *mm*成分
- *mn*成分 ( $m \neq n$ )

特に $\mathcal{R}, h_{ij}$ について注目

### 3. 今回の研究 (拡張)

スカラー摂動の運動方程式

テンソル摂動の方程式と同じ

$$\Theta'' + (D + 2)\mathcal{H}\Theta' + m_{k,n}^2\Theta = 0$$

ここで

$$\Omega'' + \left[ (D + 2)\mathcal{H} + \frac{2(\mathcal{H}')^2 - \mathcal{H}\mathcal{H}''}{\mathcal{H}(\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}')} \right] \Omega' + m_{k,n}^2\Omega = 0$$

$$\Theta \equiv \mathcal{R} + \frac{\Xi}{b_0^2}$$

$$\Omega \equiv \frac{1}{(D + 2)m_{k,n}^2} \left[ \left( 2m_{k,n}^2 + \frac{|\vec{n}|^2}{b_0^2} \right) \mathcal{R} - \left( Dm_{k,n}^2 - \frac{|\vec{n}|^2}{b_0^2} \right) \frac{\Xi}{b_0^2} \right]$$

⊙ と  $\Omega$  の解が得られれば、スカラー摂動  $\mathcal{R}$  の解が導ける !!

### 3. 今回の研究 (導出)

$$\Theta''_{k,n} + (D+2)\mathcal{H}\Theta'_{k,n} + m_{k,n}^2\Theta_{k,n} = 0$$



適切な変数変換...

$$y = a^{(D+2)/2}, \quad \theta_{k,n} = y\Theta_{k,n}$$

$$\theta''_{k,n} + \left( m_{k,n}^2 - \frac{y''}{y} \right) \theta_{k,n} = 0 \quad \text{佐々木-ムハノフ方程式}$$

- 佐々木-ムハノフ方程式の解...第二種ベッセル関数
- 同じプロセスは $\Omega_{k,n}$ も適用可能

スカラー摂動を導出できる！



### 3. 今回の研究 (導出)

- 佐々木-ムハノフ方程式の解( $f = \theta_{k,n}, \omega_{k,n}$ )

$$f(\tau) \rightarrow e^{i\pi(\nu_f - \frac{1}{2})} 2^{\nu_f - 1} \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \Gamma(\nu_f) \frac{1}{(m_{k,n} \tau)^{\nu_f}}$$

※1 Bunch-Davis真空

※2 長波長極限  $m_{k,n} \tau \rightarrow 0$

- パワースペクトル: スカラー

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \simeq & \frac{2^D \Gamma^2(\frac{D+3}{2})}{\pi^3 (D+2) \epsilon M_{pl}^2} b_0^D (b_0 k)^3 H^{D+2} \tau^{D+3} \times \left[ \tau^{-2\nu_\omega} S_{\nu_\omega}((b_0 k)^2) \right. \\ & \left. + \frac{\epsilon M_{pl}^2}{D+2} \tau^{-2\nu_\theta} \left( (D-1)^2 S_{\nu_\theta}((b_0 k)^2) + 2(D-1)(b_0 k)^2 S_{\nu_\theta+1}((b_0 k)^2) + (b_0 k)^4 S_{\nu_\theta+2}((b_0 k)^2) \right) \right] \end{aligned}$$

ここで

$$S_\nu(x) \equiv \sum_{\vec{n}} \frac{1}{(|\vec{n}|^2 + x)^\nu}$$

$$\nu_\theta = \frac{D+3}{2} + \frac{D+2}{2} \epsilon, \quad \nu_\omega = \frac{D+3}{2} + \frac{D+6}{2} \epsilon - \eta$$

### 3. 今回の研究 (導出)

- パワースペクトル: スカラー

$S_\nu(x^2)$ の振舞いはSchwinger表示, Poisson resummation, Bessel関数で理解できる

$$\begin{aligned} S_\nu(x^2) &= \sum_{\vec{n}} \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dt t^{\nu-1} \exp [-(|\vec{n}|^2 - x^2)t] \quad \leftarrow \text{Schwinger representation} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dt t^{\nu-1} e^{-x^2 t} \left( \sum_{n=-\infty}^\infty e^{-n^2 t} \right)^D \\ &= \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(\nu)} x^{D-2\nu} \sum_{\vec{n}} \int_0^\infty du u^{\frac{2\nu-D}{2}-1} \exp \left[ -u - \frac{1}{4u} (2\pi x |\vec{n}|)^2 \right] \quad \begin{array}{l} \text{Poisson resummation} \\ \downarrow \end{array} \\ &= \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(\nu)} x^{D-2\nu} \sum_{\vec{n}} \left( \frac{z}{2} \right)^{\frac{2\nu-D}{2}} K_{\frac{2\nu-D}{2}}(z) \quad \leftarrow \text{Modified Bessel function} \\ &\simeq \frac{\pi^{D/2} \Gamma(\nu - \frac{D}{2})}{\Gamma(\nu)} x^{D-2\nu} \quad (x \gg 1) \end{aligned}$$

# 3. 今回の研究 (導出)

## 正確な結果

### ■ パワースペクトル: スカラー

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \simeq \begin{cases} \frac{2^D \Gamma^2\left(\frac{D+3}{2}\right)}{\pi^3 (D+2) \epsilon M_{pl}^2} \frac{H^{D+2}}{k^D} \left[ \left(\frac{k}{aH}\right)^{-(D+6)\epsilon+2\eta} + \frac{D}{D+2} \epsilon M_{pl}^2 \left(\frac{k}{aH}\right)^{-(D+2)\epsilon} \right] & (b_0 k \ll 1) \\ \frac{2^{D-1} \pi^{\frac{D-5}{2}} \Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right)}{(D+2) \epsilon M_{pl}^2} b_0^D H^{D+2} \left[ \left(\frac{k}{aH}\right)^{-(D+6)\epsilon+2\eta} + \frac{f(D)}{D+2} \epsilon M_{pl}^2 \left(\frac{k}{aH}\right)^{-(D+2)\epsilon} \right] & (b_0 k \gg 1) \end{cases}$$

ここで,

$$f(D) = (D-1)^2 + \frac{6(D-1)}{D+3} + \frac{15}{(D+3)(D+5)}.$$

### ■ パワースペクトル: テンソル

$$\mathcal{P}_h(k) \simeq \begin{cases} \frac{2^{D+3} \Gamma^2\left(\frac{D+3}{2}\right)}{\pi^3 M_{pl}^2} \frac{H^{D+2}}{k^D} \left(\frac{k}{aH}\right)^{-(D+2)\epsilon} & (b_0 k \ll 1) \\ \frac{2^{D+2} \pi^{\frac{D-5}{2}} \Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right)}{M_{pl}^2} b_0^D H^{D+2} \left(\frac{k}{aH}\right)^{-(D+2)\epsilon} & (b_0 k \gg 1) \end{cases}$$

### 3. 今回の研究 (導出)

正確な結果

- スペクトル指数  $n_s$

$$n_s = 1 - (D + 6)\epsilon_V + 2\eta_V - D \quad (b_0 k \ll 1)$$

$$n_s = 1 - (D + 6)\epsilon_V + 2\eta_V \quad (b_0 k \gg 1)$$

- テンソル・スカラー比  $r$

$$r = 8(D + 2)\epsilon_V$$

- スカラー振幅  $A_s$

$$A_s = \frac{2^{D-1} \pi^{\frac{D-5}{2}} \Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right)}{(D + 2)\epsilon M_{pl}^2} b_0^D H^{D+2}$$

# CMB future experiment

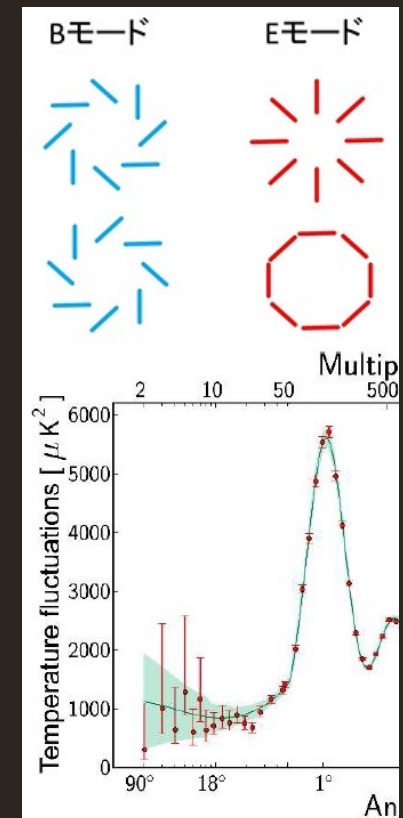
## LiteBIRD

(**lite** (light) satellite for the studies of **B**-modes polarization and **I**nflation from cosmic background **R**adiation **D**etection)



## Mission

- Observation of CMB B-mode polarization from the primordial gravitational wave  
→ **Rule out many inflationary models !**
- Precise measurement of low- $\ell$  anomaly in TT power spectrum cf. cosmic variance



# Another motivation

- Dark Dimension scenario [M. Montero, C. Vafa, I. Valenzuela (2023)]

Motivated by AdS distance conjecture or Swampland

## AdS distance conjecture [D. Lust, E. Palti, C. Vafa (2019)]

- Quantum gravity on  $D$ -dimensional AdS space with cosmological constant  $\Lambda$
- An infinite KK tower of states with mass scale  $m$
- as  $\Lambda \rightarrow 0$ , behave as

$$m \sim |\Lambda|^\alpha,$$

( $\alpha$ : a positive order-one number)

Attempt to solve the hierarchy of the particle physics and cosmology (cosmological hierarchy problem)

※ Original large extra dimensions is related to the gauge hierarchy problem.

# Another motivation

- Dark Dimension scenario [M. Montero, C. Vafa, I. Valenzuela (2023)]

This conjecture predicts the radius of extra dim as

$$R \sim 0.1 \mu\text{m} - 10 \mu\text{m} \quad \rightarrow \quad \text{Dark Dimension} \\ \text{(one mesoscopic extra dimension)}$$

Can we observe a micro-sized extra dimension?



Current bound of the size of extra dim

| Dimension $D$                | 1                    | 2                                   | 3                    | 4                    | 5                    | 6                    |
|------------------------------|----------------------|-------------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| Bound size [ $\mu\text{m}$ ] | 30                   | $1.6 \times 10^{-4}$                | $2.6 \times 10^{-6}$ | $3.4 \times 10^{-7}$ | $2.1 \times 10^{-8}$ | $2.4 \times 10^{-9}$ |
|                              | ↑<br>torsion balance | └──────────┘<br>astrophysical bound |                      |                      | └──────────┘<br>LHC  |                      |

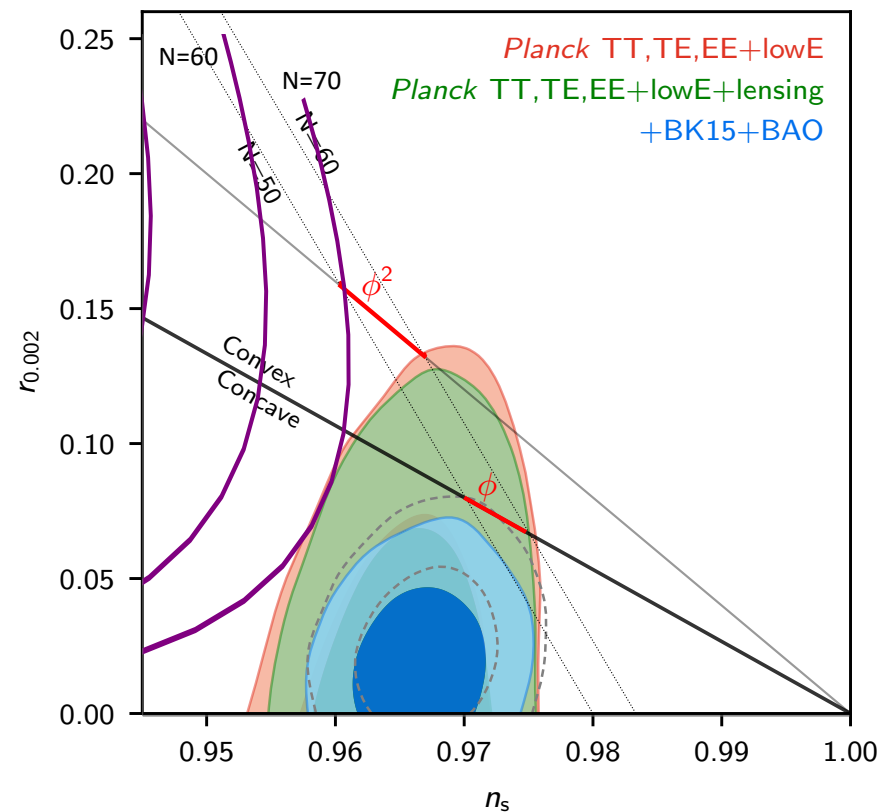
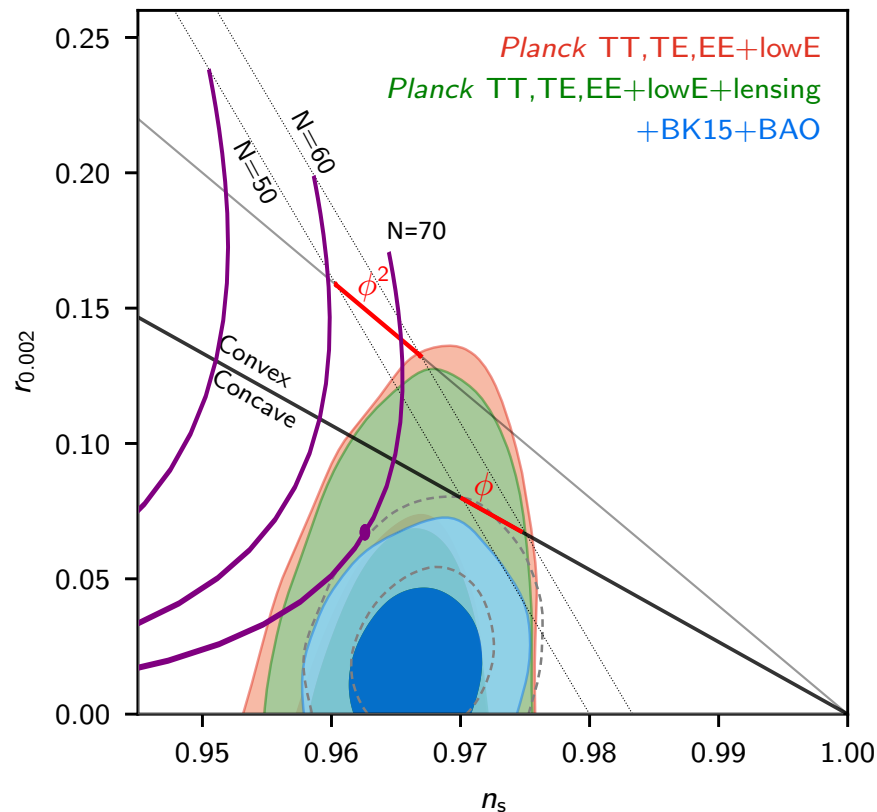
# Appendix

## 2. Natural inflation

$$V(\phi) = V_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{\phi}{f} \right) \right) \quad (f: \text{a scale})$$

$D = 1$  case

$D = 2$  case



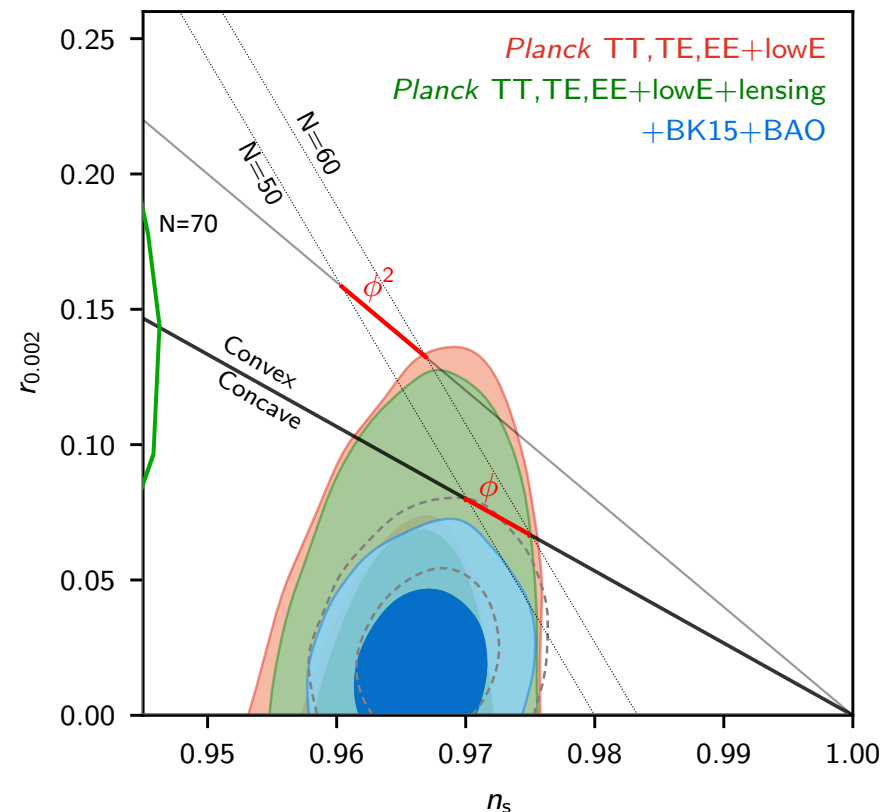
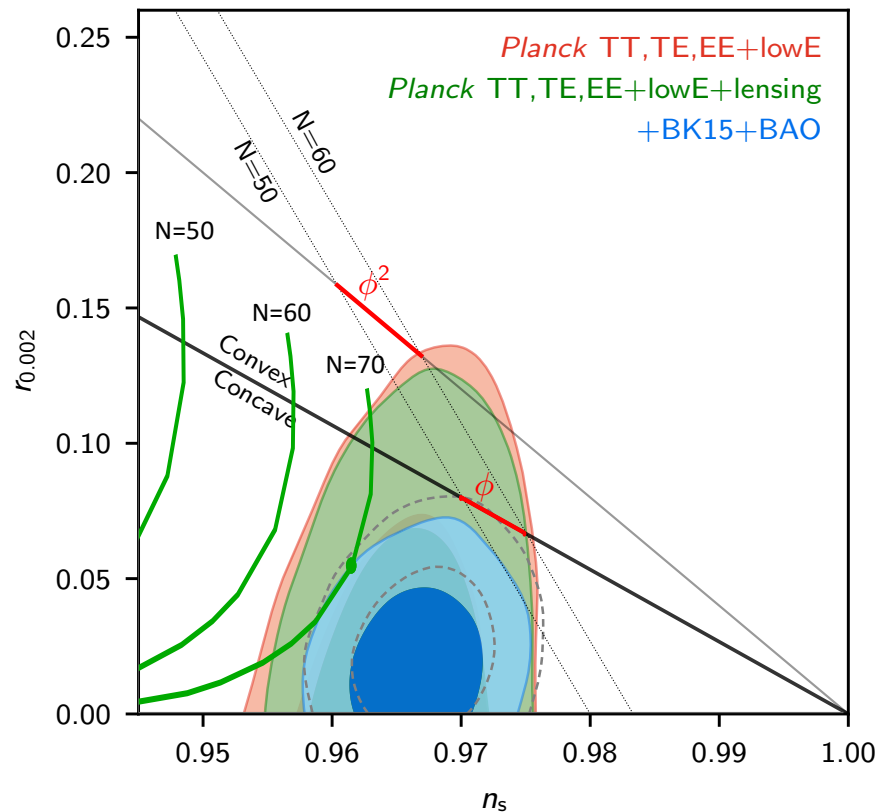
# Appendix

## 3. Quartic hilltop inflation

$$V(\phi) = V_0 \left( 1 - \lambda \frac{\phi^4}{M_{pl}^4} \right) \quad (\lambda: \text{a coupling})$$

$D = 1$  case

$D = 2$  case



# Appendix

Parameters:  $r = 0.10$ ,  $b_0^{-1} = 10^{15}$  GeV,  $A_s = 2.1 \times 10^{-9}$

- The energy of inflation ( $D = 1$ )

$$V = \frac{(D+2)(D+3)}{8} \left( \frac{r A_s M_{pl}^{D+4}}{\pi^{\frac{D-5}{2}} \Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right) b_0^D} \right)^{\frac{2}{D+2}}$$
$$\approx 2.6 \times 10^{16} \text{ GeV}$$

- The energy during inflation ( $D = 1$ )

$$H = \left( \frac{r A_s M_{pl}^2}{2^{D+2} \pi^{\frac{D-5}{2}} \Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right) b_0^D} \right)^{\frac{1}{D+2}}$$
$$\approx 1.1 \times 10^{14} \text{ GeV}$$